Sáv (1. félév)

1. előadás (diff top)

Embeddings and Immersions (japán)
Hirsch: Differential Topology

Fuks – Fomenko – Gutenmacher: Homotopic topology
Milnor – Stasheff: Characteristic classes

$S^1 \looparrowright R^2$ $\mathrm{Imm}(S^1, R^2)$ reg. homotópiaosztályok

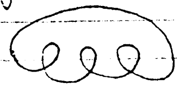
reg. homotópia: mindig immerzió, folyt. változik a derivált

$f_t : S^1 \looparrowright R^2$ $S^1 \times I \looparrowright R^2 \times I$
$(x, t) \longrightarrow (f_t(x), t)$

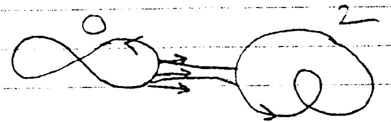
$\mathrm{Imm}(S^1, R^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$ epi

$f : S^1 \looparrowright R^2$ $\|f'(s)\| = 1$ $f' : S^1 \longrightarrow S^1$ homot. osztálya invariáns

$\forall n$-re $\exists f : [f'] = n$



$\nu : S^1 \longrightarrow S^1$ normálvektorok $\deg \nu$



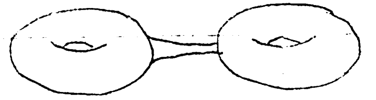
művelet

$\mathrm{Imm}(S^1, R^2) \xrightarrow{\deg\nu - 1} \mathbb{Z}$ epi   HF: 1) homomorfizmus
2)* izomorfizmus

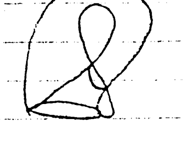
Görbék immerzióinak osztályozása kész

F^2 zárt felület. $\nexists F^2 \looparrowright R^2$, mert a kép nyílt az implicit fv. t. miatt, de kompakt ↯.

$F^2 \looparrowright R^3$ irányíthatók:

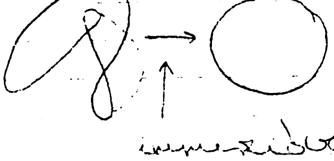


Klein-palack:



⇒ páros Euler-karakterisztikájúak

Klein-kancsó keresztmetszete:



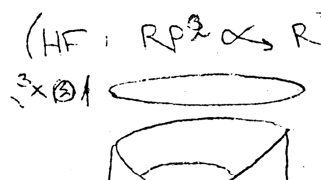
$RP^2 \looparrowright R^3$

immerzióval átdeformáljuk

és így egy Möbius-szalagra egy körlemezt ragaszthatunk ($= RP^3$)   a Klein-k. alsó fele

$RP^2 \hookrightarrow R^4$

(HF: $RP^2 \looparrowright R^3 \Rightarrow$ van 3-szoros pont)

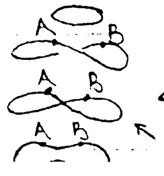


Möbius-szalag pereme egy ~~[illegible]~~ trivi csomó, izotópiával körré alakítható, végül egy körlemezt (félgömböt) rakunk rá.

$0 < t < 1$-ben egy henger

$R^3 \times t \subset R^4$

Másképp:



← R^3-beli metszetek

↖ nyeregpont

Whitney tételei

1.) $\forall M^n \ \exists R^q \quad M^n \hookrightarrow R^q$

2.) $M^n \hookrightarrow R^{2n+1}$, $\forall$ leképezés tetszőlegesen approx.-ható beágyazással.

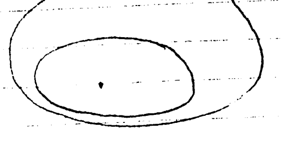
3.) $M^n \hookrightarrow R^{2n}$ (nem törődünk a beágyazásokkal)

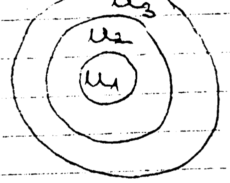
4.) $M^n \looparrowright R^{2n}$, erre törődünk

5.) $M^n \looparrowright R^{2n-1}$, nem törődünk

Biz. M^n kompakt-ra

1.) M^n $\quad U_1^i \subset U_2^i \subset U_3^i$ koncentrikus n-dim gömbökkel diffeomorfak



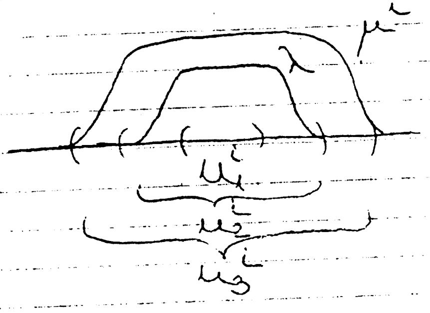


Lefedjük véges sok U_1^i-vel M^n-et. $\quad i=1,\dots,k$

$\varphi_i : U_3^i \to R^n$ diffeo.

$\mu^i|_{U_2^i} \equiv 1 \quad \mu^i|_{M \setminus U_3^i} \equiv 0 \quad C^\infty$

$\lambda^i|_{U_1^i} \equiv 1 \quad \lambda^i|_{M \setminus U_2^i} \equiv 0 \quad C^\infty$



$\psi_i = \mu^i \cdot \varphi_i : M \to R^n \quad i=1,\dots,k$

$\Psi_{\cancel{\mu}} : M \to \underbrace{R^n \times \_ \times R^n}_{k} \quad \Psi_{\cancel{\mu}} = (\psi_1,\dots,\psi_k)$ immerzió (max. rangú)

$\Lambda : M \to R^k \quad \Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)$

$f = (\Psi, \Lambda) : M \to R^{nk} \times R^k$.

(Tfh $f(x) = f(y)$, ~~$x \neq y$~~. $\exists i : x \in U_1^i \subset U_2^i \Rightarrow$
$y \in U_2^i$)

Tfh $f(x) = f(y) \overset{\text{de } x \neq y}{\Longrightarrow} \psi_i(x) = \psi_i(y) \overset{\psi_i \text{ inj.}}{\Longrightarrow} y \notin U_2^i$.

$\exists i : x \in U_1^i \subset U_2^i \quad y \notin U_2^i \Rightarrow \lambda^i(y) = 0, \lambda^i(x) = 1.$ □

2.) $M^n \hookrightarrow R^{2n+1}$ Először topologikusan

$M^n \overset{i}{\hookrightarrow} R^q$ kell irányok, amire vetítve beágyazás marad

$\varphi(x,y) = \frac{i(x) - i(y)}{\| \quad \|} \in S^{q-1} \quad x, y \in M^n$ rossz irányok

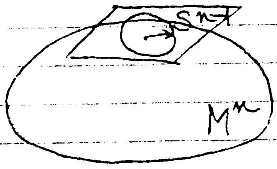
$\varphi : M^n \times M^n \setminus \overset{\text{átló}}{\Delta}(M) \to S^{q-1}$ sima. Ha $q-1 > 2n$, akkor a Sard t. miatt im φ s.s.s.. im φ = rossz irányok

Tehát van jó irány. Lejutunk $(2n+1)$-ig.
Nem diff. top beágyazás, mert nem felt. max rangú, de diffható.

Max rang szempontjából rossz irányok, ha $\exists$ olyan irányú érintő egyenes. Ezek egy $(2n-1)$ dim sima sokaságot alkotnak.

$\Rightarrow M^n \looparrowright R^{2n}$, mert jó irányba vetítjük

$\Rightarrow M^n \hookrightarrow R^{2n+1}$ diff. top beágyazás.



Def Érintőnyaláb: $f: M^n \hookrightarrow R^q$

$TM = \{(x,v) \mid x = f(p), p \in M, v$ érintővektor a p-ben$\} \subset$
$\subset R^q \times R^q$.

$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$ sima, $\gamma(0) = p$

$\frac{(f\circ\gamma)(t)}{dt}(0)$ v-k df képét futják be

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "R^n"] & M \\ (x,v) \arrow[r] & p \end{tikzcd}$$

Vektornyalábok

Def Lokálisan triviális nyaláb (fibrálás, fibre bundle)

$p: E \to B$ $\forall b \in B$ $\exists U_b$ körny. $p^{-1}(U_b) \xrightarrow{\text{hom}} U_b \times F$
homeom (F a fibrum)

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[r, "\text{hom}"] \arrow[dr, "p|"'] & U_b \times F \arrow[d, "\text{proj.}"] \\ & U_b \end{tikzcd}$$

Pl. $E = B \times F \to B$ $p = pr.$
direkt szorzat

$E' \xrightarrow{F} B$ triviális fibrálás, ha

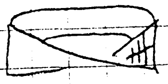
$E' \to B \times F$ homeom.

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d] & B \times F \arrow[d] \\ B \arrow[r, "id"] & B \end{tikzcd}$$

Két (lok. triv.) fibrálás izomorf, ha

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\text{homeom}"] \arrow[d, "F"] & E' \arrow[d, "F"] \\ B \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Pl nem trivi nyaláb a Möbius – szalag



$= E$

$\downarrow I$

S^1 = körkör $= B$

E: totális tér
B: bázistér
F: fibrum

Def $G \subset \text{Homeo}(F)$

Lok. trivi nyaláb G – struktúracsoporttal

$\coprod U_i \times F \qquad U_i \cap U_j \xrightarrow{h_{ij}} \text{Homeo}(F)$

$h_{U_j} \circ h_{U_i}^{-1} \Big|_{(U_i \cap U_j) \times F} : \underset{U_i \times F}{\underset{\cap}{(U_i \cap U_j) \times F}} \longrightarrow \underset{U_j \times F}{\underset{\cap}{(U_i \cap U_j) \times F}}$

h_{ij} ragasztó leképezés. $\qquad G \subset \text{Homeo}(F)$

$h_{ij} \circ h_{jk} = h_{ik}$

Vektornyaláb: $F = \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$, $G = GL(n, \mathbb{R})$

HF: TM = vektornyaláb

2. előadás (alg. top.)

jegy: beadható feladatok, amíg el nem hangzik

$[X, Y]$ homotópiaosztályok száma

$X \supset A \longrightarrow Y$ kiterjesztési probl.

1. HF: $\exists$-e $\mathbb{R}P^n \searrow \mathbb{R}P^{n-k}$ retrakció

(segítség: $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $\underset{i<n}{\pi_i(S^n) = 0}$)

2. HF: $[\mathbb{R}P^n, S^1]$

3. HF: $\exists f: X \longrightarrow Y \ \forall f_{*n}: \pi_n(X) \xrightarrow{0} \pi_n(Y)$ de $f \not\simeq 0$.

4. HF: $[F_1 \longrightarrow F_2] = \text{Hom}(\pi_1(F_1), \pi_1(F_2)) / \text{Inn}\, \pi_1(F_2)$

F_1, F_2 zárt felületek, nem S^2, $\mathbb{R}P^2$ — hatás — belső autom.

$\pi_n \quad , \quad H_n$

Čech

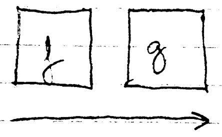
Hopf $\quad \pi_3(S^2) \not\simeq H_3(S^2) = 0$

Def $\pi_n(X, x_0) \qquad C((I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)) / \sim$ homotópia

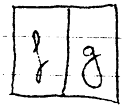
Kompakt – nyílt topológia $C(A, B)$-n: $K \subset A$ kompakt,

$U \subset B$ nyílt, $\{N_{K,U} = \{f: A \to B \mid f(K) \subset U\}\} = C(A,B)$

Ennek az útöf.-i komponensei a homotópiaosztályok

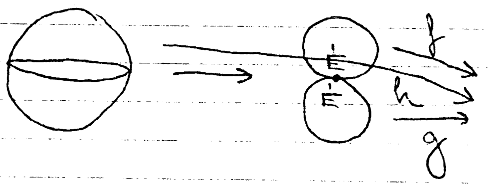


$$h(s_1,\dots,s_n)=\begin{cases} f(2s_1,s_2,\dots,s_n) & 0\le s_1\le \frac{1}{2}\\ g(2s_1-1,s_2,\dots,s_n) & \frac{1}{2}\le s_1\le 1\end{cases}$$

$h=$


$[h]=[f]+[g]$

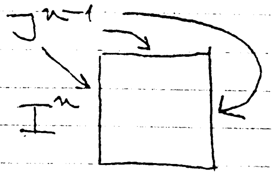
$C\Big((S^n,p)\longrightarrow(X,x_0)\Big)$



HF. $n\geq 2\Rightarrow \pi_n(X,x_0)$ komm.

Def Relatív homotopikus csoportok

$\pi_n(X,A,x_0)$ $\quad x_0\in A\subset X$



$J^{n-1}=\partial I^n\setminus \overset{\circ}{I}{}^{n-1}$ ← belseje

$I^{n-1}\longrightarrow A$ $\quad (I^n,I^{n-1},J^{n-1})\longrightarrow(X,A,x_0)$

Komm. ha $n\geq 3$.

Áll (X,A,x_0) Egzakt sorozat:

$$\pi_n(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial}$$
$$\to\pi_{n-1}(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_{n-1}(X,x_0)\longrightarrow \dots$$

indukált homom.:

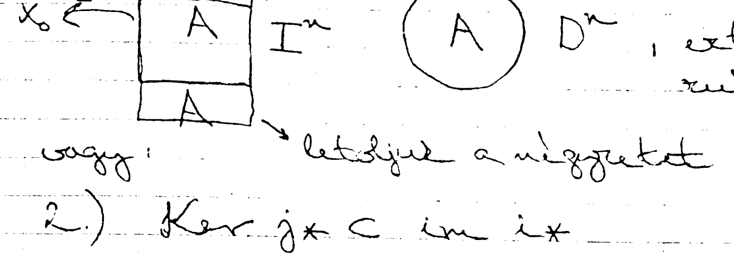
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ \square \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$f:(X,A,x_0)\longrightarrow(Y,B,y_0)$ $\quad f_*$ rel. homot. csop

$\pi_n(X,x_0,x_0)=\pi_n(X,x_0)$

Biz 1.) $j_*\circ i_*=0$

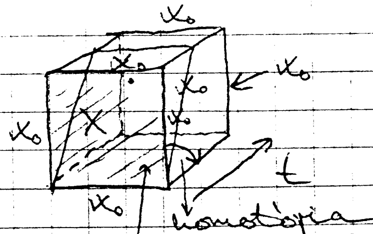
Megj. $\pi_n(X,A,x_0)$-ban 0-t repr.-ja $\forall$ leképezés, melynek képe A-ban van.



, ezt saját maga mentén behúzzuk → konstanssal homotóp

vagy: → letoljuk a négyzetet

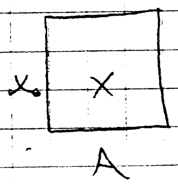
2.) Ker $j_*\subset$ im i_*



alul A, elöl X, másutt a peremen x_0

Def. ∂ $\quad f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$

$$f|_{I^{n-1}} : I^{n-1} \longrightarrow A$$
$$\partial I^{n-1} \longrightarrow x_0$$

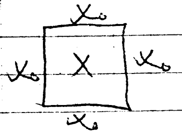


határhomomorfizmus

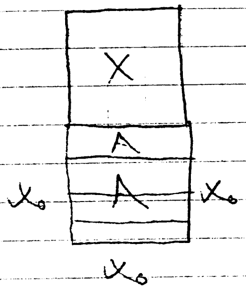
Relatív hom. csoportok: $(D^n, S^{n-1}, p) \longrightarrow (X, A, x_0)$ rel. szferoid

(I^n, I^{n-1}, J^{n-1})

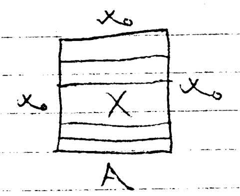
3.) $\partial \circ j_* = 0$



4.) $\mathrm{Ker}\,\partial \subset \mathrm{im}\, j_*$



5.) $i_* \circ \partial = 0$



6.) $\mathrm{Ker}\, i_* \subset \mathrm{im}\,\partial$ ✓ □

HF. (X, A, B, x_0) $\quad X \supset A \supset B \ni x_0$

Egzakt sorozat:

$$\pi_n(A, B, x_0) \to \pi_n(X, B, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial}$$
$$\to \pi_{n-1}(A, B, x_0) \to \pi_{n-1}(X, B, x_0) \to \ldots$$

Áll. A retr.-a X-nek $\Rightarrow$ $\pi_n(A) \rightarrowtail \pi_n(X)$ inj.

$$0 \to \pi_n(A) \to \pi_n(X) \to \pi_n(X, A) \to 0$$

Biz. $A \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} X$ $\quad r \circ i = id_A$

i_* ~~epi~~ mono

Áll 1.) Lokálisan triviális fibrálás ⇒ Serre fibrálás.

2) A homotopikus egzakt sorozat teljesül ∀ Serre fibrálásra.
(tetsz pont ősének homot. csoportja uaz.)

Példa Serre fibrálásra

$$\begin{tikzcd} P(X,x_0) \arrow[d, "p"'] & \gamma \text{ út} \arrow[d, mapsto] \\ X & \gamma(1) \end{tikzcd}$$

$P(X, x_0)$ = x_0-ból induló utak X-ben

$p^{-1}(x_0) = \Omega(X, x_0)$ = hurok tere

HF. Serre fibrálás.

Áll 2) ⇒ $\pi_n(X) \approx \pi_{n-1}(\Omega X)$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\pi_n(PX)} \longrightarrow \pi_n(X) \xrightarrow[\approx]{\partial} \pi_{n-1}(\Omega X) \longrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\pi_{n-1}(PX)}$$

~~pontrahúzható~~
∀ utat önmaga mentén behúzzuk

$S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\pi_n(S^1)} \longrightarrow \pi_n(S^3) \xrightarrow{\approx} \pi_n(S^2) \longrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\pi_{n-1}(S^1)} \text{ ha } n \geq 3$$

$$\pi_i(S^1) = 0 \quad i > 1 \quad \text{mert} \quad \begin{tikzcd} & R^1 \arrow[d] \\ S^i \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\pi_3(S^3) = \mathbb{Z} \Rightarrow \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (Hopf)

$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ ($n=2$: $\pi_2(S^3) = 0 \longrightarrow \pi_2(S^2) \xrightarrow{\approx} \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^3)$)

Freudenthal t. $\pi_{n+k}(S^k) \longrightarrow \pi_{n+k+1}(S^{k+1})$

izom ha $k \geq n+2$
epi ha $k \geq n+1$

(spec $\pi_2(S^2) \approx \pi_3(S^3) \approx \pi_4(S^4) \approx \ldots$)

3. előadás (diff top.)

$[F_1, F_2] = \text{Hom}(\pi_1(F_1), \pi_1(F_2)) / _{\text{In}}$

F_1, F_2 nem S^2, RP^2.

Szükséges ismeret: Univ. fedő = nyílt körlap

Riemann-felület: 1 dim komplex sok.

Ált. Riemann tétel: $\forall$ 1-ö. R felület $\underset{\text{diffeomorfizmus}}{\overset{(\text{kplx diff})}{=}}$ $\begin{cases} S^2 = \hat{\mathbb{C}} \\ U \text{ nyílt körlap} \\ \mathbb{C} \end{cases}$

$\forall$ 2 dim $\overbrace{\text{felületen}}^{\text{irányítható}}$ $\exists$ komplex struktúra.

Komplex struktúra keletkezik a fedőtéren.

g = génusz $g = 0$: S^2

$g > 1$ U az univ. fedőtér

$g = 1$ $\mathbb{C}$

$\forall g \geqq 1$ génuszú irányítható felületnek és RP^2-től kül. nem ir.-ható felületnek az univ. fedője pontra húzható.

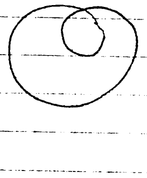
Segéd L $[F_1, p_1 ; F_2, p_2]$ homotópiák és fixen tartják a p_1-et

$\| $

$\text{Hom}(\pi_1(F_1), \pi_1(F_2))$

$F_1, F_2 = S^2, RP^2$ 2

HF-k: 1)



$f : M^2_{ir} \looparrowright R^3$

$\nu_f : M^2 \longrightarrow S^2$

$x \longmapsto \nu_{f(x)}$

áll: $\deg \nu_f = \dfrac{\chi(M)}{2}$

2) $\text{Imm}(n,k) - \{M^n \looparrowright R^{n+k}\}$ / kobordizmus

zárt, összes immerzió

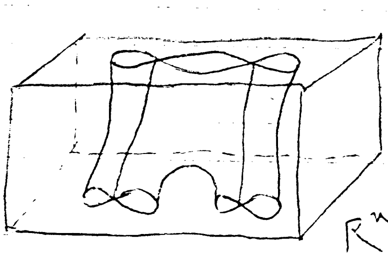
$f_1 : M_1^n \looparrowright R^{n+k}$

$f_0 : M_0^n \looparrowright R^{n+k}$ $f_1 \underset{\text{kobord}}{\sim} f_0$ ha $\exists W^{n+1}$ peremes $\partial W^{n+1} =$

$= M_1^n \amalg M_0^n$, és $\exists F : W^{n+1} \looparrowright R^{n+k} \times [0,1]$:

$\partial F = f_0 \amalg f_1$, akkor $F|_{M_0} = f_0 : M_0^n \looparrowright R^{n+k} \times 0$

$F|_{M_1} = f_1 : M_1^n \looparrowright R^{n+k} \times 1$



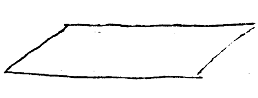
$R^{n+k} \times 1$

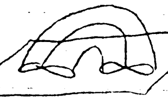
$R^{n+k} \times [0,1]$ $(n = k = 1)$

$R^{n+k} \times 0$

Csoportművelet: Unió indukálja

Inverz? Nullelem: a 0-kobordánsak, azaz a peremek:





$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi_n(A) \arrow[r, tail, "i_*"] & \pi_n(X) \arrow[l, bend left, "r_*"'] \arrow[r, "j_* \text{ epi}"'] & \pi_n(X, A) \arrow[r, "0"] & {} \end{tikzcd}$$

splitting

$$\pi_n(X) \approx \pi_n(A) \oplus \pi_n(X, A)$$

<u>HF.</u> $\pi_i(S^n) \approx \pi_i(RP^n) \quad \forall i > 1$

Fibrálások egzakt sorozata

$p: E \xrightarrow{F} B$ ← fibrum (rost)

totális ↑ E, bázis ↑ B

$\forall b \in B \; \exists U_b \quad p^{-1}(U_b) \sim U_b \times F$

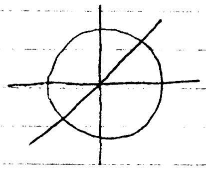
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[dr, "p"'] & & U_b \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_b & \end{tikzcd}$$

Hopf fibrálás

$S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$

CP^1

lok. triviális.



C^2

$S(C^2) = S^3 \longrightarrow CP^1 = S^2$

$v \longmapsto [c \cdot v]$ egyenes

<u>Tétel.</u> Egzakt:

$$\begin{tikzcd} \pi_n(F) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(E) \arrow[r, "p_*"] \arrow[dr] & \pi_n(B) \arrow[r, "\partial"] & {} \\ \arrow[r] & \pi_{n-1}(F) \arrow[r] & \dots & \\ & & \pi_n(E, F) \arrow[uu, "\overline{p}_*", "\approx"'] \arrow[ur, "\partial"'] & \end{tikzcd}$$

$F \overset{i}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{p} B$

<u>$\propto$</u> $\pi_n(E, F) \xrightarrow{\overline{p}_*} \pi_n(B, b_0)$ izom.

$\overline{p}_*: \pi_n(E, F, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0)$

(E, F) pár egzakt sorozata

<u>Def</u> $p: E \to B$ leképezés ~ CHP = homotópia felemelési tul. (covering homotopy property), ha $\forall$ homotópiát fel lehet emelni.

K = poliéder (= véges szimpl. komplexus)

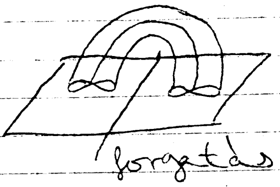
$$\begin{tikzcd} K \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d] \\ K \times I \arrow[r, "h"', "\text{homot.}"] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd}$$

$\exists H$ a diagr. komm.

$I = [0, 1]$

<u>Def</u> Ha $p: E \to B$ telj. a CHP tul-ot a véges szimpl. kompl.-ra: Serre fibrálás. (p nem felt. fibrálás)

Inverz = tükörkép



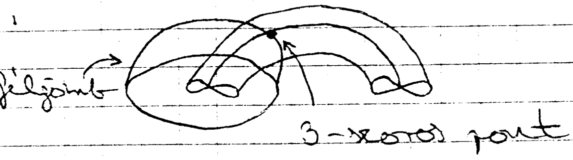
a) $\mathrm{Imm}(1,1) = ?$

b) $\mathrm{Imm}_2(1,1) = ?$

↓

az összekötő kobordizmusnak nincs 3-szoros pontja

pl. nem jó:



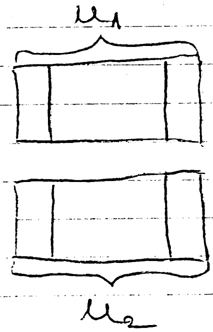
3.) $\forall f: M^n \to R^{2n}$ approx-ható immerzióval

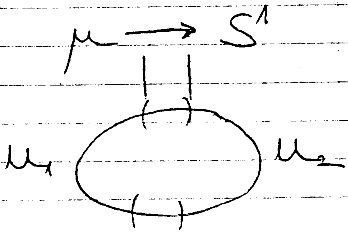
4.) $TM \subset R^q \times R^q$

$p: E \xrightarrow{F} B = \cup U_i \qquad E = \coprod U_i \times F$

$U_i \times F \sim p^{-1}(U_i) \qquad U_i \cap U_j \to G \subset \mathrm{Homeo}(F)$

pl. Möbius-szalag $F = [0,1] = I$



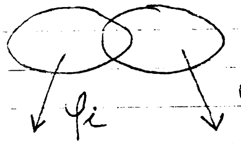


$F = R^n, \quad G = GL(n, R)$

$M = \cup U_i$ lok. koord. környezetek (M tekinthető 0-ds vektornyalábnak)

$\varphi_i \quad U_j \times R^n \supset (U_i \cap \underset{(x,v)}{U_j}) \times R^n$

$\varphi_j \quad U_j \times R^n \supset (U_i \cap U_j) \times R^n$



$\frac{d(\varphi_i \circ \gamma)}{dt}(0) \quad \frac{d(\varphi_j \circ \gamma)}{dt}(0)$

$\varphi_j \circ \gamma = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i \circ \gamma)$

$\frac{d}{dt}(\varphi_j \circ \gamma) = D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \frac{d}{dt}(\varphi_i \circ \gamma)$

↓

a $\varphi_i(x)$ pontban

M^n parallelizálható, ha $TM \to M$ triviális ⇔

∃ n db ∀ pontban lin. ftlen vmező.

Def $p: E \xrightarrow{R^n} B$ (vektornyaláb) szelés! $s: B \longrightarrow E$ folyt., $p\circ s = id$.

Vektormező M^n-en = $TM \to M$ érintőnyaláb szelése.

Megj. $E \xrightarrow{R^n} B$ nyaláb.

∀ fibrum pontjain értelmezettek a vektortér elemein végezhető műveletek. Szelésekben is pontonként.

S^2 nem parallelizálható.

S^1, S^3, S^7 paral. Csak ezek a gömbök paral.

feladat: $S^{n_1}\times S^{n_2}\times\ldots\times S^{n_k}$ mikor paral.?

$\chi(M\times N) = \chi(M)\cdot\chi(N)$

Poincaré-Hopf $\Rightarrow \chi(M)\neq 0 \Rightarrow \nexists$ sehol sem 0 vmező.

Pontosan akkor paral $k>1$ esetén, ha ∃ ptlan az $n_1, \ldots, n_k$ között.

$f: M^m \longrightarrow N^n$ diff. ∃-e Taylor pol.?

Def. r-jetek (r-csírák)

$\varphi\,(\cancel{f}): (M,x) \longrightarrow (N,y)$ x egy környezetének leképezése

$\varphi: (U_x, x) \longrightarrow (N,y)$

$\psi: (V_x, x) \longrightarrow (N,y)$ φ és ψ ekv., ha ∃ $W_x \subset U_x \cap V_x$ és

$\varphi|W_x = \psi|W_x$. φ egy x-beli csíra.

$(W_x, x) \longrightarrow (N,y)$

f, g csírák. $f \sim g$, ha r-ig bezárólag az összes $\leq r$-rendű deriváltjuk (x-ben) megegyezik (ha egy lok. koord. környezetben ⇒ mindegyikben).

Csírák egy ekv. osztálya egy r-jet. Ezek tere

$J^r_{x,y}$ = r-jetek $x \longrightarrow y$.

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[lld, "J^r f"'] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] \\
J^r(M,N) \overset{def}{=} \bigcup\limits_{\substack{x\in M \\ y\in N}} J^r_{x,y} \arrow[r, "R^q"] & \underset{(x,y)}{M\times N} \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

$U \subset M$ nyílt, $f: U \longrightarrow N$ C^r-fv. $J^r f_u$ $\forall u \in U$

$J^r f_u$ f u-beli r-jetje.

$J^r(M,N)$-en vesszük a legerősebb topológiát, melyre ∀ $J^r f$ leképezés folyt.

$J^r(M,N) \longrightarrow M$ r-jet nyaláb (nem felt. vektornyaláb)

$f: M \longrightarrow N$ C^r-lekép., $J^r f: M \longrightarrow J^r(M,N)$ a
$x \longmapsto J^r f x$

Taylor polinom. (Ez egy szelete az r-jet nyalábnak)

<u>Máshogy users:</u> R^q $\overset{m}{M} \times \overset{n}{N}$

$q = \# |\alpha| \leq r$ $R^m \to R^n$ α-rendű deriváltaknak a száma, ahol $|\alpha| \leq r$ (a Taylor-polinom együtthatóinak száma, az összes lehetséges parc. deriváltak száma)

multiindex

$x_1, \dots, x_m$ $y_1, \dots, y_n$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} y_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

$\varphi_i, U_i \subset M$
$\psi_j, V_j \subset N$

$$\coprod_{U_i, V_j} U_i \times V_j \times R^q$$

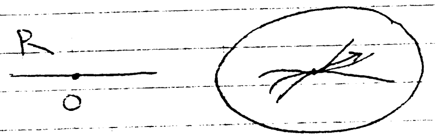
$\varphi_j', U_i' \subset M$
$\psi_j', V_j' \subset N$

egy $M \to N$ leképezés $\forall$ lok. környezetpárban megad egy Taylor-polinomot, ennek az együtthatói egy R^q-beli vektor, ezek mentén ragasztunk, és kapjuk r-jet nyalábot.

<u>Példa.</u> $M = R$, $r = 1$

$$\begin{tikzcd} J^1(R,N) \arrow[d, "R^n"] & \supset & J^1(R,N)_0 = TN \arrow[d] \\ R \times N & \supset & 0 \times N \end{tikzcd}$$

$(0, x)$



<u>4. előadás</u> (alg. top)

HF:

1) $S^3 \to S^2$ Hopf fibr. $\nexists$ (?) szelése

2) a) $\pi_r(S^4) \approx \pi_r(S^7) \oplus \pi_{r-1}(S^3)$

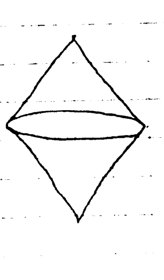
Ált. Hopf fibr.: $S^7 \xrightarrow{S^3} S^4 = HP^1$

$(S^3 = S(C^2) \longrightarrow CP^1 = S^2)$

b.) $\pi_r(S^8) \approx \pi_r(S^{15}) \oplus \pi_{r-1}(S^7)$

Cayley számok $S^{15} \xrightarrow{S^7} S^8$

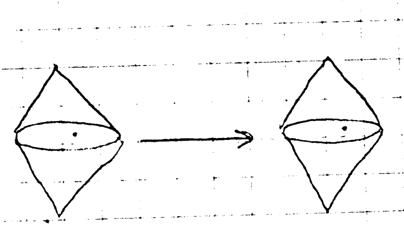
3.) Szuszpenzió



SX (vagy ΣX)

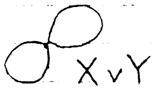
$f: X \to Y$

$Sf: SX \to SY$

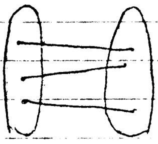


Tehát S egy funktor.

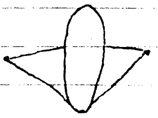
$SA_p \cong S^3 \vee \bigvee_{i=1}^{2p} S_i^2$



4.) join $X*Y$ X ∀ pontját összekötjük egy szakasszal Y ∀ pontjával, ezen van egy term. topológia



$S^p * S^q = S^{p+q+1}$



$S^1 * S^0 = S^2$

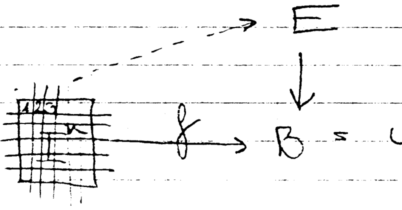
(* asszociatív $X*Y*Z$ Δ-ekkel adható meg)

Á $\pi_n(E,F,e_0) \approx \pi_n(B,b_0)$

Biz

$\boxed{I^n} \longrightarrow B$ $\bar{p}_* : \pi_n(E,F,e_0) \to \pi_n(B,b_0)$ izomorfizmus

$\partial I^n \longrightarrow b_0$



U_α fölött triv. a nyaláb

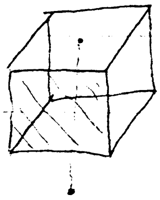
Lebesgue lemma: ∃ felosztása I^n-nek, hogy f-nél vett képe ∀ kis kockának $\subset U_\alpha$.
Felül kezdve sorra felemeljük a kis kockákat.

i^n - egy kis kocka. A határának egy része már fel van emelve. Ezen részekhez nem tartozik hozzá az alsó lap, de hozzátartozik a felső lap

$p^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times F$

Felemelés ⟺ leképezés F-be.

∂i^n egy részén adott a leképezés F-be. Ezt kell kiterjeszteni i^n-re.



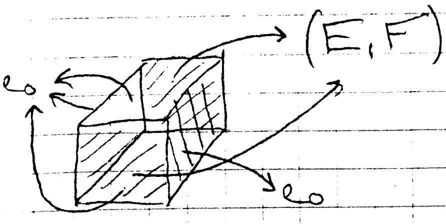
$i^n \xrightarrow[\text{vetíthető}]{} \underline{\text{palást}} \cup \text{fedőlap}$

ha itt már adott a leképezés F-be, akkor kész (kompozíció). Ha a palást valamelyik lapján még nincs megadva a leképezés, akkor ezt a lapot hasonlóan vetítjük stb.

I^n alja F-be megy (most b_0-ra vetül).

Tehát $\bar{p}_*$ epi

$\bar{p}_*$ mono? (Mert epi a homotópiákon)



Homotópia két (E,F)-beli szferoid B-beli képe között.

Kapunk egy (E,F,e_0)-beli homotópiát.

□

Ezzel a fibrálás egzakt sorozata kész (következik a tételből):

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(F) \arrow[r] & \pi_n(E) \arrow[r] \arrow[dr, "p_*"'] & \pi_n(E,F) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_{n-1}(F) \arrow[r] & \ldots \\
 & & \pi_n(B) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Megj. Ugyanígy lehet belátni, hogy lok. triv. fibr. ⇒ Serre fibr.

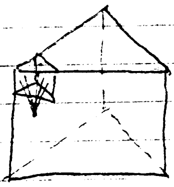
$$\begin{tikzcd}
K\times 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
K\times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

kommutatív ⇒ ∃ ⇢

CHP

véges szimpl. komplexus

Biz. Felosztjuk K-t kis szimplexekre, I-t kicsi intervallumokra: $h(\Delta\times[t_n,t_{n+1}])\subset U_\alpha$



felül adott, ugyanígy kiterjesztjük.

□

Áll. Serre fibrálásra van egzakt sorozat. Elég:

α. CHP ⇒ $\pi_n(E,F)\approx\pi_n(B)$
(véges szimpl. kompl.-ra)

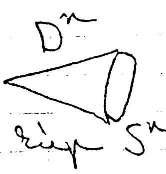
F egy tetsz. pont őse.

Biz. α. $S^n\to B$-et tekintsük úgy, mint

$S^{n-1}\times I\to B$-t

$S^{n-1}\times 0\to e_0$

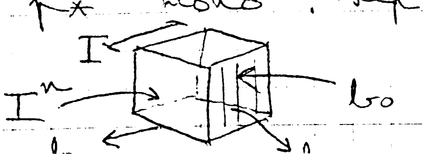
$\overset{CHP}{\Longrightarrow}$ $\exists\ S^{n-1}\times I\longrightarrow E$
$S^{n-1}\times 0\longrightarrow e_0$



kúp S^{n-1} felett

$(D^n,S^{n-1})\longrightarrow(E,F)$

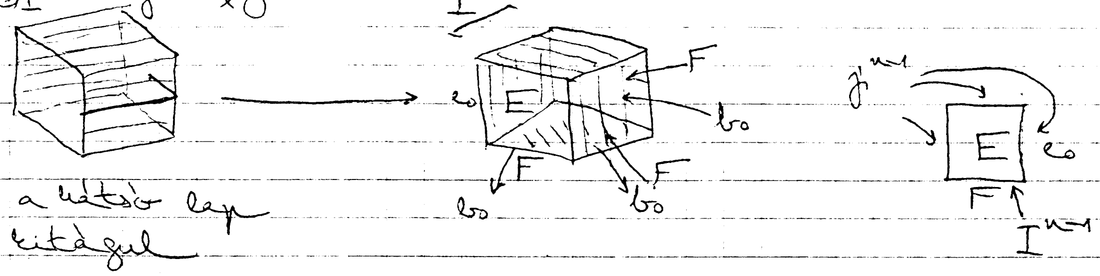
$\overline{p_*}$ mono? Kép 0-homotóp ⇒ felemeltje is az:



alsó lap →

$$\begin{tikzcd}
I^n\times 0 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & E \arrow[d] \\
I^n\times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

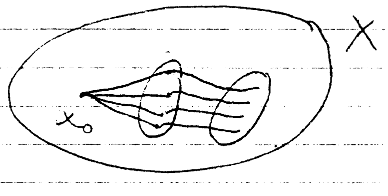
$J^{n-1}\times ③ I \to J^{n-1}\times 0$



Így az egész palást e_0-ba képződik. □

<u>Megj.</u> $PX \xrightarrow{\Omega X} X$ Serre fibráció, ha $X \sim T_1$.

$$\begin{tikzcd}
K\times 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, bend left] & PX \arrow[d] \\
K\times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & X
\end{tikzcd}$$



Az alsótér képei segítségével felemeljük.

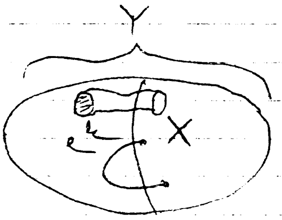
Whitehead tétele

$f: X \to Y$ folyt., X, Y CW kompl, f_{*n} izom. $\pi_n(X) \to \pi_n(Y) \Rightarrow f$ homot. ekv.

<u>Megj.</u> Nem igaz: X, Y CW kompl és $\pi_n(X) \approx \pi_n(Y)$, akkor $X \cong Y$.

<u>Biz</u> a) $X \overset{\cdot}{\subset} Y$ X rész CW kompl Y-ban

i_* izom. $\Rightarrow \pi_n(X,Y) = 0$ (Egz. sorozatból).

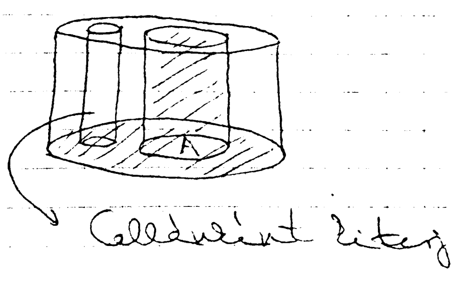


$\pi_k(X,Y) = 0 \Rightarrow$ az e^k cella homotópiával bedeformálható X-be

Ez kiterjed$^{(?)}$ az Y homotópiájává, mely bedeformálja Y-t X-be, és X-en az id. Tehát X deform. retraktuma Y-nak.

<u>Lemma</u> $A \subset X$ X CW kompl, A rész CW kompl

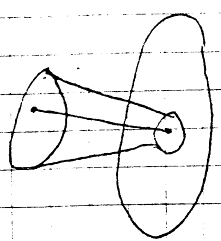
$$\left.\begin{array}{l} f: X \to Y \\ h_t \text{ homotópia } f|A \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists H_t \text{ homot. } f\text{-nek}: \\ H_t|A = h_t \end{array}$$



Borsuk pár. (kofibráció)

b) Tetsz. f-re: „$\forall$ leképezés beágyazás"

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_*", "\simeq"'] & Y \\ Cyl(f) & \end{tikzcd}$$

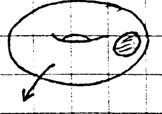


∀ pontot szakasszal összekötjük a képével

A diagr. homot. komm.

f helyett tekinthetjük i_*-ot.

múltkori HF 3.) : $S^1 \times S^1 \xrightarrow{f} S^2$ deg f ≠ 0



összehúzzuk 1 pontba

$f_{*n} = 0$, mert $\pi_n(S^1) = 0$ ha $n > 1$

Ha $H^3(X;\mathbb{Z})$-ben ∄ 2-rendű elem, akkor igaz a Hauptvermutung (homeomorf top terekhez adott egy-egy triang., akkor ∃ közös finomítás).

4.) az egyikből lehet kiterjeszteni, ill. $\pi_2(F^2) = 0$.

5. előadás (diff top.)

Új feladatok

1.)* f, g: $S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$ reg. homot. ⇔ forgásuk egyenlő.

2.) $\pi_i(V_{n,k}) = \begin{cases} 0 & i < n-k \\ \text{ill. } i = n-k & \mid \mathbb{Z} \text{ v. } \mathbb{Z}_2 \end{cases}$

Def $V_{n,k} = V_k(\mathbb{R}^n)$ Stiefel sokaság

$\mathbb{R}^n$-ben ∀ lehetséges lin. flen vektor

$V_k(\mathbb{R}^n) = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in \mathbb{R}^n \text{ lin. flen}\}$

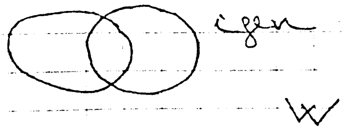
$V'_{n,k}$ $V'_k(\mathbb{R}^n)$ – ⊥-ek és 1 hosszúak

$\subset (\mathbb{R}^n)^k$ $V_{n,k}$ és $V'_{n,k}$ homot. ekv.

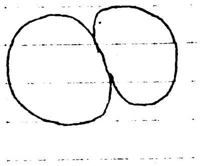
Hint: $V_{n,k} \xrightarrow{V_{n-1,k-1}} S^{n-1}$

3.) M^m, N^n zárt irányított sok. $\subset \mathbb{R}^{n+m}$

Tfh. transzverzálisan metszik egymást.



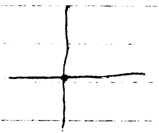
igen



$\overset{W}{\cup}$

Def. M transzv. N-re, ha ∀ p metszéspontban

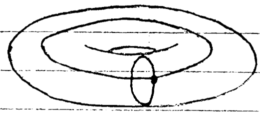
$\{T_pM, T_pN\} = T_pW$.



∀ metszéspontban előjel definiálható.

Bb.: az előjelek összege 0.

Általában $\mathbb{R}^{n+m}$ helyett W^{n+m} irányított



(homologikus invariáns az összeg)

Def Hurkolódási együttható (linking number)

A^a, B^b zárt beágyazott diszjunkt irányított sokaságok, ~~(ahol)~~ $\mathbb{R}^n$-ben, ahol $n = a+b+1$.

$\partial \tilde{A}^{a+1} = A^a \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^n$

$lk(A,B) = \cap(\tilde{A},B)_{alg.}$ ↖ a metszéspontok előjeleinek összege

4.) Előjel erejéig szimm. az lk.

$F: A \times B \longrightarrow S^{a+b} = S(\mathbb{R}^n)$

$F(x,y) = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ $\quad \deg F = lk(A,B)$

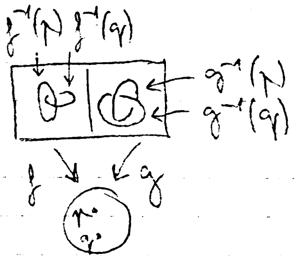
5.) $f: S^3 \longrightarrow S^2$ $\quad \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$

Def Hopf invariáns

$f: S^3 \longrightarrow S^2$ sima, p, q reg. értékek

$lk(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) = H(f)$ adja meg f homot. osztályát.

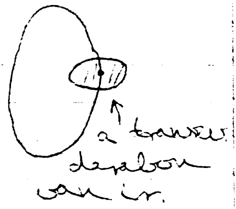
↳ S^3-ból 1 pontot kidobva R^3-ban lesznek



Homomorfizmus

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "?"] & S^2 \arrow[r, "k"] & S^2 \end{tikzcd}$$

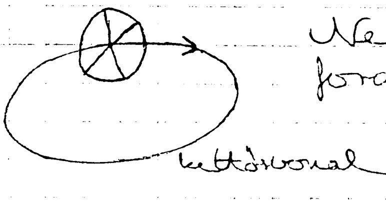
öröklön az ir.:



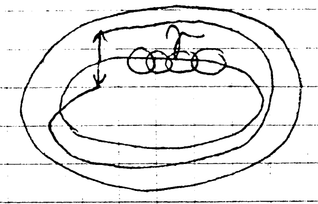
$[f] = H(f)$

6.) a) $M^n \hookrightarrow R^{n+1} \Rightarrow M^n$ irányítható

b) $F^2 \looparrowright R^3$, nincs 3-szoros pont és a 2-ős pontok mentén transzv. saját magára.



Nem történhet az, hogy 90 fokkal fordul el a ∀ pont.

a) 
M^n γ irányításváltó út (az áttérési függvények előjeleinek szorzata mentén -1)

Itt a normálirány megfordul, leír egy görbét, ami nem metszi M^n-et. Hozzávéve a 2 vektor által meghatározott szakaszt egy $S^1 \hookrightarrow R^{n+1}$-et kapunk, 1 pontban metszi M^n-t.

(↯ 3. feladat)

Ugyanis: S^1 0-homotóp $\Rightarrow \exists f: D^2 \to R^{n+1}$ $f \overset{\text{transzv.}}{\pitchfork} M^n$,

D^2 pereme S^1-el megegy. Ez egy ~~zárt~~ kompakt görbét metsz ki M^n-ből, kompakt $\Rightarrow$ szakasz, de csak 1 végpontja van ↯.

Transzverzalitás

Def $f: A \to B \supset C$

$f \pitchfork C$, ha $\forall x \in A$, melyre $f(x) = y \in C$

$\{df(T_xA), T_yC\} = T_yB$.

Tétel $C^r(A,B)$ a C^r top-val

$\cup$

$\{f \mid f \pitchfork C\}$ – sűrű halmaz

Ha A kompakt, akkor nyílt
A tetsz. G_δ

$J^r(A,B)$

$$\begin{tikzcd}
J^r(M,N) \arrow[d, "R^{\gamma}"] & U \times V \times R^{\gamma} \arrow[rr, "\text{deriváltak}"] \arrow[d] & & U' \times V' \times R^{\gamma} \arrow[d] \\
M \times N \arrow[d] & U \times V & & U' \times V' \\
M \arrow[u, bend left, "\text{graf } f"] \arrow[uu, bend right, "j^r f"'] & (x,y) & &
\end{tikzcd}$$

$\varphi: U \to R^m$

$\psi: V \to R^n$

$\varphi': U' \to R^m$

$\psi': V' \to R^n$

$$\begin{tikzcd}
C^r(M,N) \arrow[r] \arrow[dr] & \Gamma(J^r(M,N) \to M) \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[l, phantom, ""] \\
& C(M, J^r(M,N))
\end{tikzcd}$$

szelések

kompakt-nyílt top

$C^r(M,N)$-en C^r topol.: legszűkebb, melyre

$f \to J^r f$ folyt. leköp. (gyenge C^r top)

$K \subset \mathcal{U} \subset M$

$f: M \to N$ C^r leköp $f(K) \subset V \subset N$

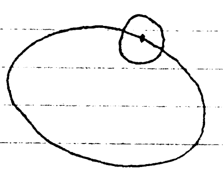
f-nek egy környezete $\mathcal{W}_{K,\underset{\varphi}{\mathcal{U}},\underset{\psi}{V},\varepsilon}(f) =$

$$= \left\{g : \sum_{|\alpha| \le r} \left\| D^\alpha \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) - \psi \circ g \circ \varphi^{-1}(x)\right)\right\| < \varepsilon \ \ \forall x \in \varphi(K)\right\}.$$

Megj: Nemkompakt ért. tart.-ra $\exists$ másik topológia is. Kompaktra a két def ua.

(Erős C^r top: Megsz sok ilyen $\mathcal{W}(f)$ metszete, melyre a kompaktok lok véges halmazok.)

Biz



$\overset{b}{B} \supset C$ C-nek van csöves környezete

$\Rightarrow \forall p \in C \ \exists (U_p, \varphi)$ lok. koord rsz.

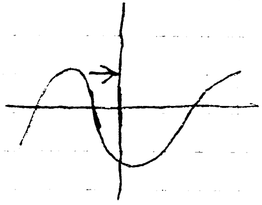
$$\begin{tikzcd} \varphi: U_p \arrow[r] & \mathbb{R}^b \\ U_p \cap C \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & \mathbb{R}^c \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

$f: A \to B \supset C$ A kompakt, $f \in C^r$

1.) $B = \mathbb{R}^b \supset C = \mathbb{R}^c$

$f: A \to \mathbb{R}^b \supset \mathbb{R}^c \xrightarrow[\substack{\text{vetítés} \\ \mathbb{R}^c\text{-vel } \|\text{-an}}]{\pi} \mathbb{R}^k$ $k = b - c$

$f \pitchfork \mathbb{R}^c \iff \pi \circ f$-nek reg értéke a $\underline{0}$.



Sard L. $\Rightarrow$ 0-hoz tetsz közel $\exists$ reg. érték (-1)-szer ezzel eltolva f-et már transzv. lesz □

$f(A)$-t lefedjük véges sok $\overset{U_i}{\text{koord}}$ rsz-rel, melyekhez tartozó lok. koord-ban C-nek az adott környezetbe eső része egy altérnek felel meg.

A-t lefedjük $D_i^a \subset \text{int}\, D_i'^a \subset D_i'^a \subset V_i \leftarrow$ koord. rsz

$A = \cup D_i^a$ $f(D_i'^a) \subset U_i$ Csak olyan g-ket, melyek ezeket a (nyílt) feltételeket megtartják.

Végigmegyünk ~~Vegyünk~~ van $D_i'^a$-kon $i = 1, 2, \ldots < \infty$. Sorra approximálunk.

$i=1 \xrightarrow{1.)} g_1 : D_1^{'a} \to U_1$ és $\pitchfork$ $U_1 \cap C$-re.

$f_1 = f + \lambda_1(g_1 - f)$ $\quad \lambda_1|_{D_1^a} \equiv 1$, ~~$(\lambda)$~~ supp $\lambda_1 \subset \text{int}\, D_1^{'a}$

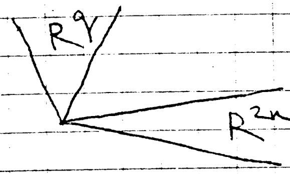
$i=2$ ~~(g)~~ $f_2 = f_1 + \lambda_2(g_2 - f_1)$.

olyan közel vesszük a g_2-t az f_1-hez, hogy ahol már $\pitchfork$ ott öröklődjön meg a transzverzalitás (nyílt feltétel). □

HF megoldások:

3) $f : M^n \to \overset{N}{R^{2n}}$ sima $\qquad x \mapsto (f(x), g(x))$

$g : M^n \looparrowright R^q \qquad\qquad \mathbb{R}^{q+2n}$



a vetítő irányok, melyre immerzió lesz, sűrűn vannak.

4.) vektornyalábok összege: $\xi \oplus \eta$

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[d, "R^n"] & \eta \arrow[d, "R^k"] & \xi \oplus \eta \arrow[d, "R^n \oplus R^k"] \\ B & B & B \end{tikzcd}$$

$A : R^n \to R^n \quad A' : R^k \to R^k$ mtx

b, U, V
$b \in U \cap V$

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ a nyalábtól lesz a direktösszegben

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[rd, "R^n"'] & \subset & \eta \arrow[ld, "R^k"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$n < k$

B parakompakt → ~~(g)~~ lehet a nyalábon metrikát (skalár szorzás) definiálni

$\xi^\perp \subset \eta$ ortogonális komplementum.

Def

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & E \arrow[d, "p", "F"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$$f^*E = \{(x,e) \mid x \in X,\ e \in E,\ f(x) = p(e)\}$$

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[d, "F"] & (x,e) \arrow[d] \\ X & x \end{tikzcd}$$

Triviális nyaláb visszahúzottja triv.

Áll $M \times N$ paral., ha $\chi(M) = 0$ és M, N

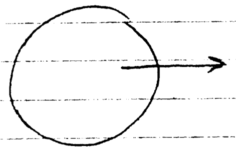
Def. M sok. stabilan paral., ha $\mathcal{E}^1 \oplus TM$ = triviális

$\mathcal{E}^1$ a trivi vonalnyaláb: $M \times \mathbb{R}^1 = \mathcal{E}^1$

Pl. S^n stab. paral.:

$TS^n \oplus \mathcal{E}^1 = R^{n+1}$ érintőnyalábja S^n-re megszorítva.

$\uparrow$ S^n normálnyalábja trivi

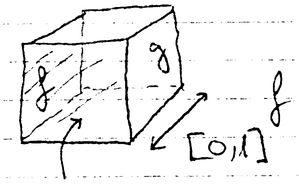


6. előadás (alg. top)

$p: E \xrightarrow{F} B$ Serre fibr.

$$\begin{tikzcd} K\times 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d] \\ K\times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

$p_*: \pi_n(E,F) \to \pi_n(B,b_0)$ mono?



$f,g: (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (E,F,e_0)$

$\boxed{I^n}$

$J^{n-1}\times[0,1] \to e_0$

Keresünk $H: I^n\times I \to E$ homotópiát

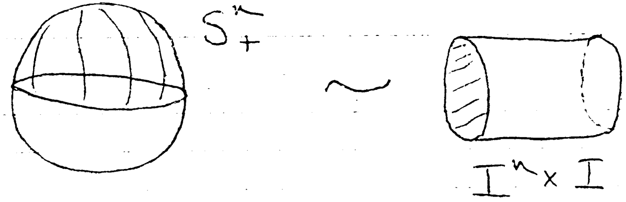
$H|I^n\times 0 = f$ $H|I^n\times 1 = g$

$H(J^{n-1}\times[0,1]) = e_0$ $H(I^{n-1}\times[0,1]) \subset F$

$I^{n+1} \sim D^{n+1}$

$\partial' = \partial I^{n+1}$ egy részén $(I^n\times 0, I^n\times 1, J^{n-1}\times[0,1])$ adott a leképezés E-ben. Továbbá adott a vetülete B-ben.

$(I^{n+1}, \partial') \sim (D^{n+1}, S^n_+)$



$K = I^n$-nel alk. a CHP-t. □

Relatív CHP:

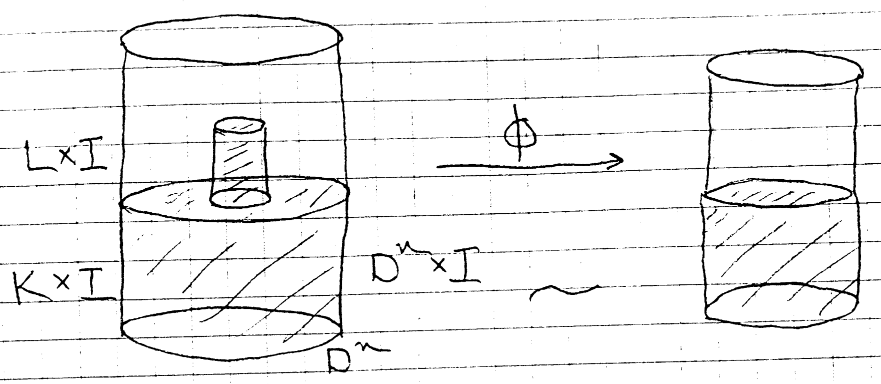
$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "F"] \\ B \end{tikzcd} \sim \text{Rel CHP}$$

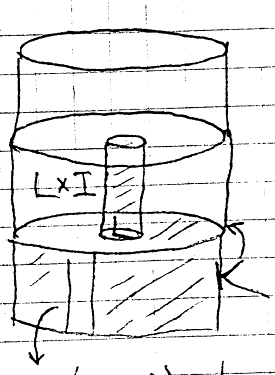
$$\begin{tikzcd} L\times I \cup K\times 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "F"] \\ K\times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

$L\subset K$ részkompl

Ez ekv. a CHP-vel.

Mit csinálunk:

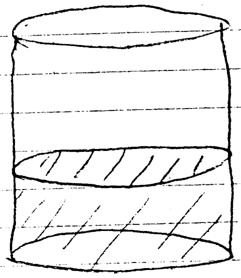




konstansként kiterjesztjük

Alk. a ϕ homeom-t.

↓



← ezt elhagyhatjuk

Itt a kiterj. köv. az eredeti CHP-ből

□

Tétel (Whitehead)

$X, Y \xrightarrow{\text{össf.}}$ CW kompl, $f: X \to Y$, f_{*n} izom

$\Rightarrow$ f homot. ekv.

Γ π_0: össf.-i komponensek $(S^0, *) \to (X, *)$

$\pi_1(F) \to \pi_1(E) \to \pi_1(B) \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(B)$

(az egzaktságnak van értelme, mert van kijelölt elemük)

Biz a) $i: X \hookrightarrow Y$ beágyazás, X rész CW-kompl

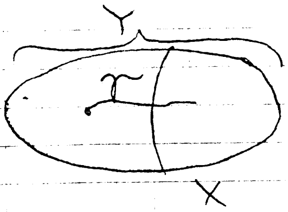
i_* izom $\Rightarrow \pi_*(Y, X) = 0$

$\Rightarrow \exists$ deformációs retrakció $Y \to X$

$(\pi_i(X) \xrightarrow{\approx} \pi_i(Y) \xrightarrow{0} \pi_i(Y, X) \xrightarrow{0} \pi_{i-1}(X) \xrightarrow{\approx} \pi_{i-1}(Y))$

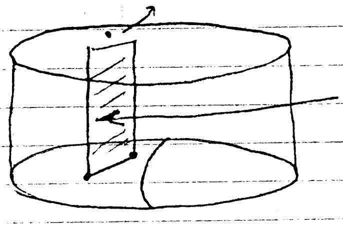
Cellák dim-ja szerinti indukcióval:

$sk_0 Y \setminus sk_0 X$



Y útöz

kivetítéssel kiterjesztjük az 1-ds cellákra, stb



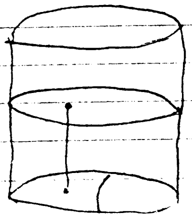
itt a γ a homotópia

$r^0_t : sk_0 Y \longrightarrow Y \qquad r^0_0 = id|_{sk_0 Y}$

$r^0_1 (sk_0 Y) \subset X$

Ez kiterjed $R^0_t : Y \to Y$ homotópiává

$R^0_0 = id_Y \qquad R^0_1 (sk_0 Y) \subset X$

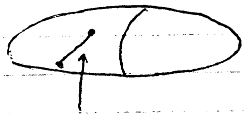


Konstr. R^1_t homotópiát

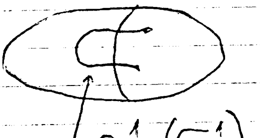
$R^1_0 = R^0_1$-től indul

$R^1_1 (sk_1 Y) \subset X$

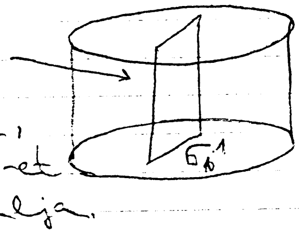
$(k-1)$-vázon R^k_t rögzített



σ^1_0 1-ds cella



$R^1_0(\sigma^1)$

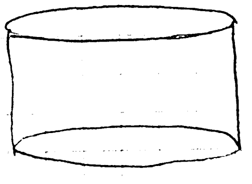


a homotópia, mely $R^1_0(\sigma^1)$-et X-be deformálja.

R^k_t homotópia az összes k-dim cellát bekergeti X-be (az sk_{k-1}-en fix).

Probl: ∞ sok homotópiánk van (∀k-ra van egy) Az R^k homotópiát az $\left[1-\frac{1}{2^k}, 1-\frac{1}{2^{k+1}}\right]$ szakaszon végezzük el.

Miért lesz folytonos?
Mert ∀ zárt cellán konst. egy idő után



$Y \times I \to Y$

A felső lapon is definiálva van, mert ∀ pont benne van egy pl. k ds cellában, és azon a lépéses homotópia k után stabilizálódik.

(W) axióma: $F \subset \cancel{X} Y$ zárt ⟺ ∀ $F \cap$ zárt cella zárt az adott cellában

$Y \to Z$ folyt. ⟺ ∀ zárt cellára megszorítva folyt

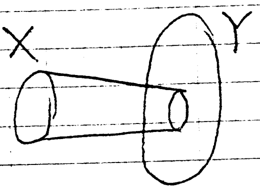
($\Leftarrow$ zárt halmaz őse ∀ cellában zárt ⟹ zárt)

b) $f: X \to Y$ CW leképezés.

Def $f(sk_k X) \subset sk_k \cancel{(F)} Y$ ∀k-ra

„Minden leképezés beágyazás"

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y \arrow[dl, "\cong"] \\ Cyl(f) & \end{tikzcd}$$



f CW ⟹ Cyl(f)-en létezik egy CW felbontás.

f_{*n} izom ⟹ i_{*n} izom $\overset{a)}{\Longrightarrow}$ i homot. ekv. ⟹ f h.e.

Tétel ∀ $f: X \to Y$ homotóp CW leképezéssel, ha X,Y CW kompl.

Ál1. X CW kompl, $K \subset X$ kompakt ⟹ K véges sok nyílt cellát metsz

Biz Tfh ∞ sokat metsz. x_i az i-edik nyílt cellából, amit metsz ($\cancel{\Longrightarrow}$) $\{x_i\}$ diszkrét, kompakt ↯

(C) ∀ zárt cella határa benne van véges sok kisebb dim nyílt cella egyesítésében

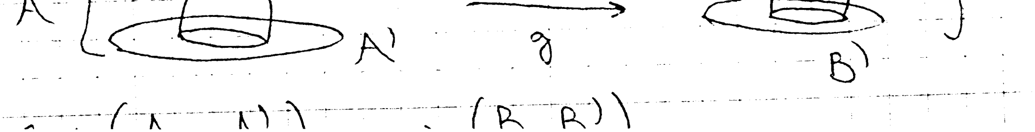
∀ zárt cellából véges sok pontot tartalmaz

⟹ diszkrét top ezen a véges részhalmazon

$\{x_i\}$ ∀ részhalmaza zárt ⟹ diszkrét.

K-nak $\{x_i\}$ zárt részh. ⟹ kompakt. □ Ál1.

Ál2



(A, A') → (B, B')

$\Rightarrow$ g homotóp rel A' egy $\bar g$-sal, melyre $\bar g(A) \subset B'$.

Biz Ha $g(\mathring{D}^k)$ nem fedi le $\mathring{D}^n$-et, akkor

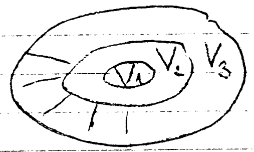
$\exists\, p \in \mathring{D}^n \setminus \operatorname{im} g$, p-ből kifújjuk

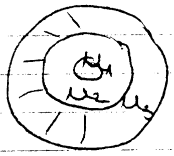
$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \operatorname{int} D^n$, $V_i = g^{-1}(U_i)$

$V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \operatorname{Int} D^k$ (im $A' \subset B'$ miatt)

$g|_{V_3} : V_3 \longrightarrow U_3$ approximálható simával (eukl tér nyílt halmazainak tekinthetők)

$\tilde g$ sima approx. Lehet elég finom az approx., hogy U_1-be semmi se képződjön $V_3 \setminus V_2$-ből.





$\lambda|_{\overline{V_2}} \equiv 1$ $\lambda|_{A \setminus V_3} \equiv 0$ vágófv.

$\check g = \lambda \tilde g + (1-\lambda) g$ Ez V_2-n belül sima.

Ha $\tilde g$ approximálja g-t elég finoman, hogy $V_3 \setminus V_2$-ből $\check g$ semmit sem képez U_1-be

U_1-be csak V_2-ből képződhetnek pontok $\check g$-vel.

De V_2-n $\check g$ sima $\xRightarrow{\text{Sard-l}}$ im $\check g$ nem fedi le U_1-et.

□ L2

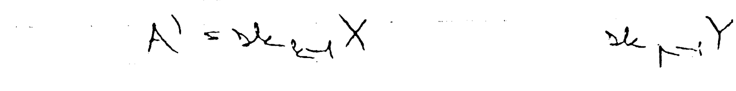
Biz ($\exists$ CW appr.)

$f : X \longrightarrow Y$

Tfh $f(\mathrm{sk}_{k-1} X) \subset \mathrm{sk}_{k-1} Y$.

$\bar e^k$ zárt cella X-ben $\xRightarrow{L1}$ $f(\bar e^k) \subset$ véges sok ~~zárt~~ nyílt cella uniója. $\exists\, d^r$ egy max dim Y-beli cella, melyet metsz $f(\bar e^k)$. Tfh $r > k$.

Alk L2-t



$\bar e^k$-t ki tudjuk kergetni $\forall$ k-nál nagyobb dim cellából.

Ezt egyszerre elvégezhető $\forall$ k-dim cellára X-ben (mert sk_{k-1}-en fcx).

$f|_{sk_k X}$-nek kapjuk egy homotópiáját, melyre

$f'(sk_k X) \subset sk_k Y$. Ezt a homotópiát kiterj. X-re.

$\forall$ k-ra kaptunk homotópiát. Ebből 1 db homot. mint az a) lépésben

□

Ugyanígy bizonyítható a rel. CW approximációs tétel:

(HF.) Ellenpélda: S^2 és $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ $(\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^{n+1})$

izomorfak a homot. csoportjaik, de nem homot. ekv.

Hint: $S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} \mathbb{C}P^n$

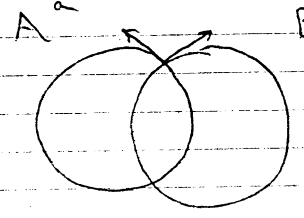
$\overset{\shortparallel}{S(\mathbb{C}^{n+1})}$

pont $\longmapsto$ rajta átmenő komplex egyenes

$$\Longrightarrow \pi_i(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} 0 & i \neq 2 \quad i < 2n-1 \\ \mathbb{Z} & i = 2 \end{cases}.$$

7. előadás (diff top)

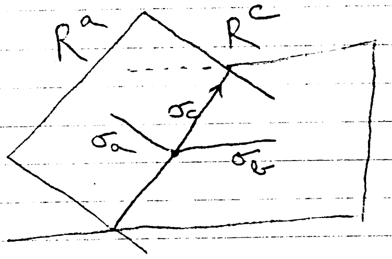
Ált transzverzalitás tétel

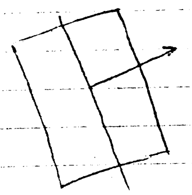


$\subset N^n$

$A \cap B = C^c$ $c = a+b-n$

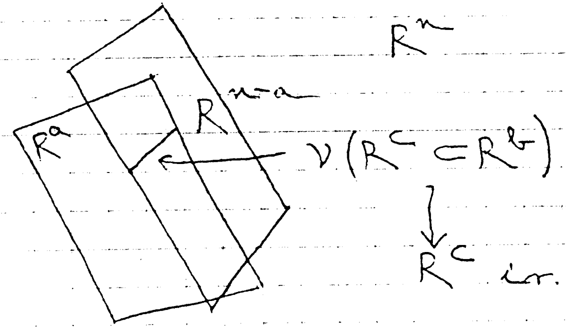
$\subset \mathbb{R}^n$





az egyenesen indukálódik ir.

Metszet irányítása:



Jet transzverzalitás tétel

$$\begin{tikzcd} j^r(M,N) \arrow[d] & \supset V \text{ részsokaság} \\ M\times N \arrow[d] & \\ M \arrow[uu, bend left=60, "j^r f"] \arrow[u, bend right=60, "\text{graf } f"'] & \end{tikzcd}$$

Tek. $C^r(M,N)$-ben azon f-eket, melyekre $j^r f \pitchfork V$.

M kompakt $\Longrightarrow$ ilyen f-ek sűrű nyílt részh.

M tetsz $\Longrightarrow$ sűrű G_δ.

Köv. $M^n \to N^{2n}$ immerziók sűrű nyílt részhalmaz $C^r(M,N)$-ben

Biz (Köv.)

L Σ^r $m\times n$-es mátrixok terében az a részhalmaz, melyre rank $=\min(m,n)-r$. $m\leq n$

Ekkor $\operatorname{codim}\Sigma^r = r(n-m+r)$.

$r=1$ $\underset{\text{lin lekép.}}{L}(R^n \to R^{2n}) \supset \Sigma^1$ $\operatorname{codim}\Sigma^1 = n+1$

$$\begin{tikzcd} j^1(M^n, N^{2n}) \arrow[d, "L_{(x,y)}(R^n, R^{2n}) \supset \Sigma^1_{(x,y)}"] & \supset \Sigma^1 = \bigcup\limits_{\substack{x,y\\ x\in M\\ y\in N}} \Sigma^1_{(x,y)} \\ \begin{matrix} M\times N \\ (x,y) \end{matrix} \arrow[d] & \\ M \arrow[uu, bend left=60, "j^1 f"] & \end{tikzcd}$$

Sűrű azon f-ek halmaza, melyre $j^1 f \pitchfork \Sigma^1$.

$\Longleftrightarrow$ $j^1 f(M) \cap \Sigma^1 = \emptyset$ mert $\operatorname{codim}\Sigma^1 = n+1$, $\dim M = n < n+1$

$\Longrightarrow$ f immerzió. $\square$

Biz. L.

$$S = \begin{array}{c|cc} & k & m-k \\ \hline k & \boxed{A} & B \\ n-k & C & D \end{array}$$

$m \leq n$

$k = m - r$

$S \in \Sigma^r$ $\quad \det A \neq 0$

$S' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ közeli $\quad \det A' \neq 0$

$T = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ -C'A'^{-1} & E_{m-k} \end{pmatrix}$ $\quad E_k$ egységmtx

$TS' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D'-C'A'^{-1}B' \end{pmatrix}$

$\operatorname{rk} S' = \operatorname{rk} TS'$. $\quad \operatorname{rk} TS' = k \iff D'-C'A'^{-1}B' \equiv 0$.

$S' \xrightarrow{\phi} D'-C'A'^{-1}B' \qquad S' \in \Sigma^r \iff \phi(S') = 0$

ϕ submerzió $\Rightarrow$ $\phi^{-1}(0)$ részsokaság.

Codim $\Sigma^r = r(n-m+r)$ □

Biz (jettranszv. tétel)

a) $M^m \supset D^m \qquad N^n = R^n \qquad f: M \to N$ adott.

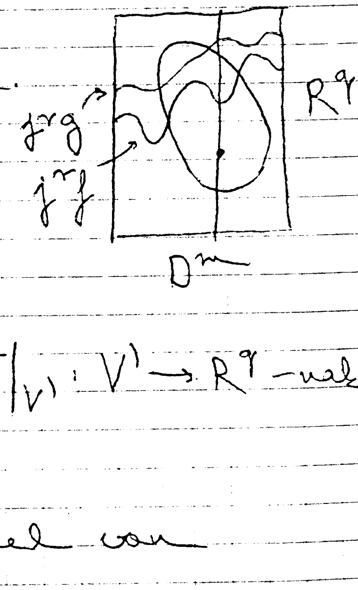
P_r = $\leq r$ fokú polinomiális leképezések $R^m \to R^n$

$D^m \times P_r$

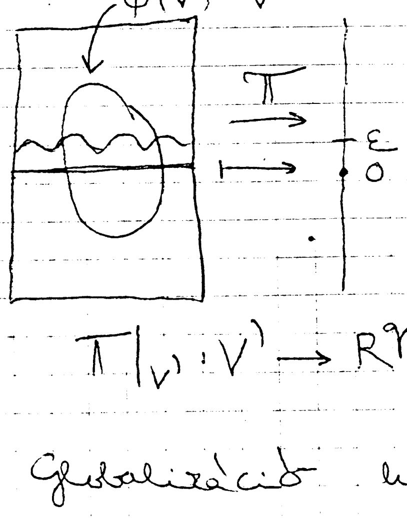
$\pi: j^r(M,N) \longrightarrow M$

$D^m \times P_r \xrightarrow{\phi} \pi^{-1}(D^m)$ diffeom.

$(x, \varepsilon) \longmapsto (x, j^r f_x + j^r \varepsilon_x)$



Olyan átkoordinátázás, ami f grafikonját „vízszintessé" teszi!



$\pi|_{V'}: V' \to R^q$

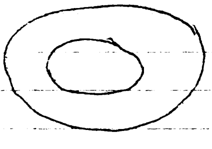
$\phi(j^r f) \pitchfork V' \iff \pi|_{V'}: V' \to R^q$-nak 0 reg. értéke.

0-hoz tetsz. közel van reg. értéke $= \varepsilon$.

Ehhez tartozik egy $\varepsilon \in P_r$.

$g := f + \varepsilon \qquad j^r g \pitchfork V$

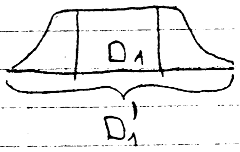
Globalizáció hasonlóan, mint a transzv. t.-ben.



$D_i \subset \overset{\circ}{D_i'} \subset U_i$ ← koord. körny.

$\cup D_i = M$ λ_i vonófv.

$i=1$ $g_1 = f_1 + \lambda_1 \mathcal{E}$



stb.

b) N tetsz. $f: M \to N$ adott.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"'] \arrow[d, phantom, "\cup" description] & N \arrow[d, phantom, "\cup" description] \\ D_i' & D_i^* \end{tikzcd}$$

$f(D_i') \subset D_i^*\}$ (*)

D_i^* $\cap$ lok. koord. körny.

ha approx mindig megtartja (*)-kat. □

Áll Ha $\overset{M\text{ komp.}}{\text{öntranszv.}}$ immerziók sűrűek az immerziók között.

↑ Nyíltság világos ($\pitchfork \Leftrightarrow$ bizonyos minorok nem elfajulók)

Biz f imm. ⇒ ∀ pont egy környezetében beágyazás.

$f: M \to N$ imm.

$\exists\, \varepsilon > 0$: ∀ pontnak az ε-környezetén f beágyazás.

∃ f-nek olyan C^2-környezete, melyben ∀ immerzióra

és $\forall\, p \in M\ \exists\, \varepsilon > 0$ ε-környezeten ∀ imm. inj. :

y, z ugyanoda képződnek

$x = y - z$

$$\underset{\overset{\uparrow}{df_y \cdot x}}{Ax} + O(x^2) = 0 = f(z) - f(y)$$

$\det A \neq 0$ $\|Ax\| > \underset{\uparrow}{a}\|x\|$

közös poz. $\underline{a}$ az egész környezetre

$|O(x^2)| < \underset{\uparrow}{K} \cdot \|x\|^2$

közös korl az egész körny.

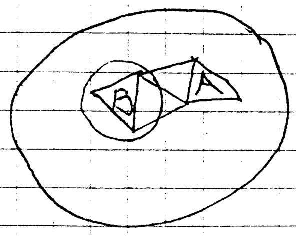
$\|Ax\| > a\|x\| > K \cdot \|x\|^2 > \|O(x^2)\|$ ↯ $Ax + O(x^2) = 0$

ha $\|x\| < \frac{a}{K}$

M-nek tek. olyan finom triangulációját, hogy

∀ n-dim szimplexre a tőle nem diszj.-ak uniója $< \varepsilon$ átmérőjű.

A diszjunkt szimplexpárokon $\pitchfork$-sá tesszük a leképezést.



Sorban végigmegyünk a diszj. párokon úgy, hogy a további transzverzalitásokat ne rontsuk el. A szomszédos párokkal nem lesz baj, mert ezen a 2-n beágyazás.

□

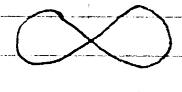
C^∞ top. $\quad C^\infty(M,N) \hookrightarrow C^r(M,N)$

A legszélsőségesebb $\uparrow$ top., amire ∀ ilyen beágyazás folyt.

körny. egy $r > 0$
egy C^r-körny $\cap\, C^\infty(M,N)$

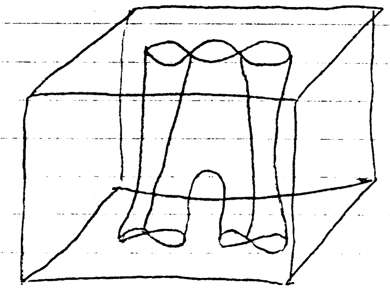
$\mathrm{Imm}(1,1) \approx \mathbb{Z}_2$

$$f \longmapsto \# \underset{\substack{\downarrow \\ \text{kettőspontok}}}{\Delta_2(f)} \bmod 2$$



$f \sim f' \Rightarrow \Delta_2(f) \equiv \Delta_2(f') \bmod 2$

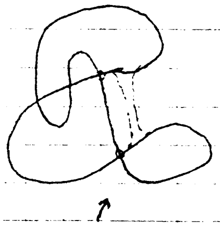
<u>Biz</u> $\quad F^2 \pitchfork R^2 \times [0,1]$



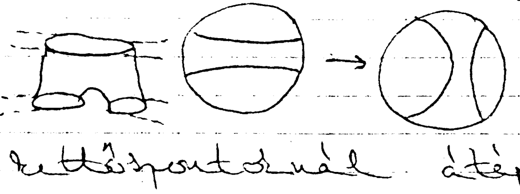
$\partial \Delta_2(F) = \Delta_2(f) \amalg \Delta_2(f')$
↗ páros

1 dis kompakt sok.
∀ 1-dis peremes sok.-nak 2 db perempontja van

Ha S^1 egy immerziójának ps. sok kettőspontja van, akkor 0-kobordáns

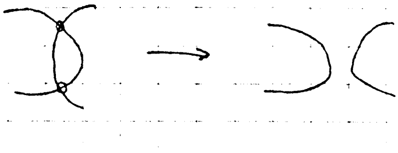


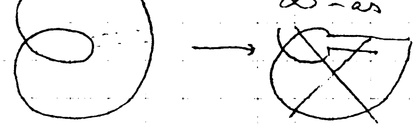
∃ kobordizmus, ami egy kis környezetben ezt csinálja:

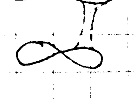


átépítés

a szomsz. kettőspontoknál átépítünk, majd szét-húzzuk.







Ha két komponenseket kapunk 1-1 kettősponttal, összekötjük a komponenseket.
Végül 1 db beágyazott kört kapunk, ami 0-kobordáns. □

$\text{Imm}_2(1,1) \approx \mathbb{Z}_2$ ugyanígy

8. előadás (alg. top.)

HF-k:

1.) $\pi_i(X \cup_\varphi D^{n+1}) = \pi_i(X)$ ha $i<n$

ütőf. $\varphi: S^n \to X$ $\quad \pi_n(X)/\{[\varphi]\} \leftarrow [\varphi]$ $\pi_1(X)$-orbitja által generált csoport

$\pi_1(X)$ hat $\pi_n(X)$-en

2.) ∀ X top. térnek ∃ CW approximációja.

$\alpha: K \to X$ $\quad \alpha_{*n}$ izo. ∀ π_n-ben

CW kompl.

3.) G top. csop

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ top. csop} \\ [f] \in \pi_k(G,e) \\ [g] \in \pi_n(G,e) \end{array}\right\} \Rightarrow [f,g] \in \pi_{n+k-1}(G,e)$$

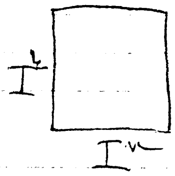
Whitehead szorzat.

áll: $[f,g] = 0$.

Def $[f] \in \pi_k(X,*)$ $\quad [g] \in \pi_n(X,*)$

$f: (I^k, \partial I^k) \to (X,*)$ $\quad g: (I^n, \partial I^n) \to (X,*)$

$h = [f,g]$:



$$\partial(I^{n+k}) = S^{n+k-1} \longrightarrow X,*$$

$$I^k \times \partial I^n \cup \partial I^k \times I^n$$

$$\underset{(x,y)}{\cup\!\!\!\!\!\!\!\quad} \qquad \underset{(x',y')}{\cup\!\!\!\!\!\!\!\quad}$$

$h(x,y) = f(x)$ $\quad h(x',y') = g(y')$

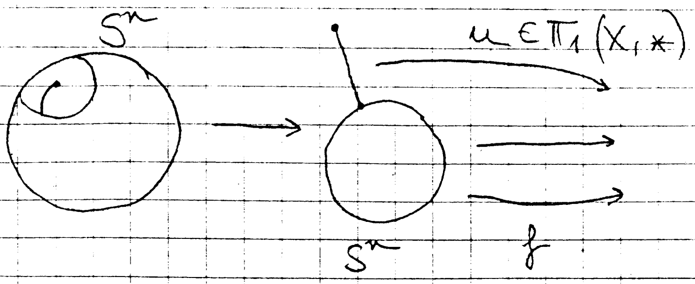
jóldef., mert a ∩ $*$-ba megy mindkettőnél

Spec $n=k=1$, akkor ez a kommutátor.

$k=1$ $\quad \pi_1(X) \times \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(X)$

Tehát π_1 hat π_n-en

Ez a hatás így is leírható:



3)' X útöf. $\pi_n(X,*)$

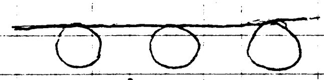
$$\downarrow \quad \text{ráképezés}$$

$$[S^n, X]$$

Azok képződnek ugyanoda, amik egy π_1-orbitban vannak.

Pl $\pi_2(S^1 \vee S^2) = \mathbb{Z}^\infty$ $\qquad [S^2, S^1 \vee S^2] = \mathbb{Z}$

$S^1 \vee S^2$ univ. fedője:



, ennek π_2-je $= \pi_2(S^1 \vee S^2)$

↑ ∞ sok S^2 csokra

4) a) S^{2k} nem homot. ekv. top csoporttal (l.3.))

b) S^{2k} nem lehet retraktuma top. csop.-nak

5.) $H(Sf) = 0$

$$[f] \in \pi_{2n-2}(S^{n-1}) \xrightarrow[\text{szusp}]{S} \pi_{2n-1}(S^n) \xrightarrow[\text{Hopf inv.}]{H} \mathbb{Z}$$

H: két reg. érték ősének hurkolódási együtthatója.

Freudenthal tétel biz.

a) $\pi_{n+k}(S^n) \xrightarrow{S} \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ epi ha $n \geq k+1$, izo ha $n \geq k+2$

$$\pi_{2k+1}(S^{k+1}) \xrightarrow{\text{epi}} \pi_{2k+2}(S^{k+2}) \xrightarrow{\approx} \pi_{2k+3}(S^{k+3})$$

b) $\pi_{2k+1}(S^{k+1}) \longrightarrow \pi_{2k+2}(S^{k+2})$ epi magja.

$\{[1_{S^{k+1}}, 1_{S^{k+1}}]\}$

↳ Whitehead szorzat ált. gen. ciklikus csop.

(nehéz)

$\pi^s(k)$ k-adik stabil homotópia csoportja a gömböknek.

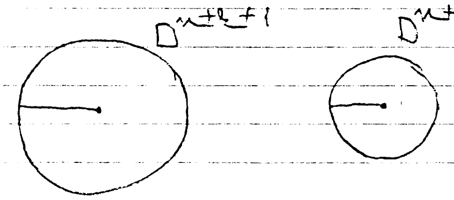
Biz $f: S^{n+k} \longrightarrow S^n \xrightarrow[\text{epi?}]{S} Sf: S^{n+k+1} \longrightarrow S^{n+1}$

$\varphi: S^{n+k+1} \longrightarrow S^{n+1}$, keresünk $f: S^{n+k} \longrightarrow S^n$-et, hogy $Sf \cong \varphi$.

1.) Tfh $\varphi(S^{n+k+1}_\pm) \subset S^{n+1}_\pm$

$\exists f$: egyenl $\longrightarrow$ egyenl.

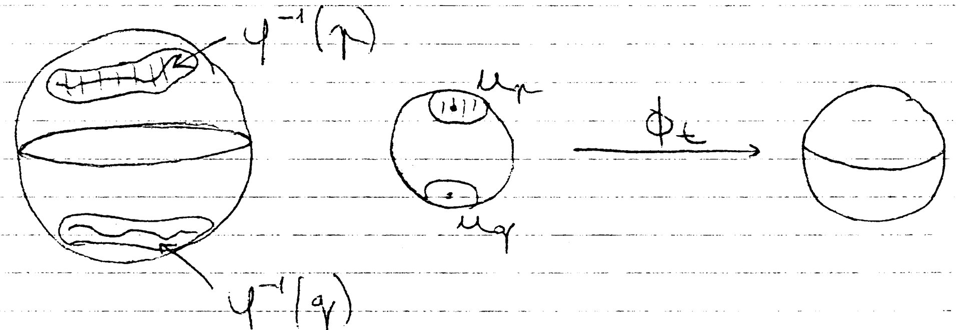
$S^{n+k+1}_\pm = D^{n+k+1} \longrightarrow D^{n+1} = S^{n+1}_\pm$ $\forall$ két ilyen leképez. homotóp rel a perem (ha a peremen megegyeznek)



$Sf \cong \varphi$

2.) p és q a két pólusa S^{n+1}-nek

$\varphi^{-1}(p) \subset \mathring{S}^{n+k+1}_+$ $\varphi^{-1}(q) \subset \mathring{S}^{n+k+1}_-$



$\exists$ U_p, U_q : $\varphi^{-1}(U_p) \subset \mathring{S}^{n+k+1}_+$
szépek

$\varphi^{-1}(U_q) \subset \mathring{S}^{n+k+1}_-$

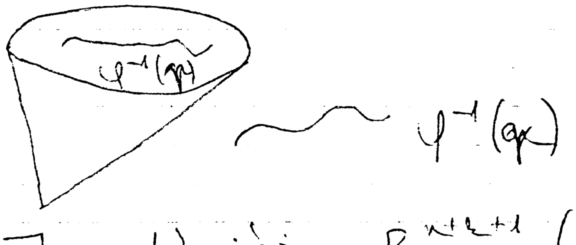
$\phi_t : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ $\phi_0 = id$

$\phi_1(U_p) = S^{n+1}_+$ $\phi_1(U_q) = S^{n+1}_-$

$\phi_1 \circ \varphi \cong \varphi = \phi_0 \circ \varphi$

↳ erre $\exists f$ 1.) szerint.

3.) Tfh $\exists$ A csillagszerű test S^{n+k+1}-ben, melyre $\varphi^{-1}(p) \subset A$ és $A \cap \varphi^{-1}(q) = \emptyset$

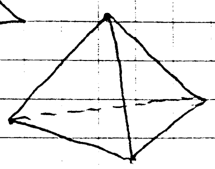


$\exists$ izotópiája R^{n+k+1} $(= S^{n+k+1} \setminus \infty)$-nek, mely A-t egy gömbbe deformálja, ez pedig azonosítható S^{n+k+1}_+-szal.

Ezek után $\varphi^{-1}(p) \subset S^{n+k+1}_+$, $\varphi^{-1}(q) \subset S^{n+k+1}_-$.

__Def__ X, Y szimpl. kompl., $f: X \to Y$ szimpliciális, ha szimplexet szimplexbe visz lineárisan.

Δ^n

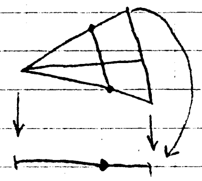


$(t_0, \dots, t_n)$ $\sum t_i = 1$ $t_i \geq 0$ baric. koord.

$a_0, \dots, a_n$ a csúcsok $b_i = f(a_i)$ csúcs Y-ban. $p = \sum t_i a_i \in \Delta^n \subset X$

$f(p) = \sum t_i b_i$

__pl.__



Tfh p, q belső pontjai S^{n+1}-ben max. dim. szimplexeknek

Ekkor $\varphi^{-1}(p)$ és $\varphi^{-1}(q)$ k-dim szimpl. komplexus (nem részkompl.).

Majdnem minden $C \in \mathbb{R}^{n+k+1}$ $(= S^{n+k+1} \setminus \infty)$ pontra $\bigcup_{a \in \varphi^{-1}(p)} \overline{Ca} = A$ esetén $A \cap \varphi^{-1}(q) = \emptyset$. (Majd [illegible] A egy kis környez. is lecserél)

~~(A rossz pontok)~~ ha $C \notin$ egyetlen $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenesnek sem, ahol $P \in \varphi^{-1}(p)$, $Q \in$ ~~p~~ $\varphi^{-1}(q)$, akkor jó. Ezek uniója $2k+1$ dim komplexus. Ez nem fedi le S^{n+k+1}-et, ha $n \geq k+1$.

__Tétel__ (Szimpliciális approximáció)

$f: X \to Y$ folyt., X, Y szimpl. kompl., X véges

$\Rightarrow \exists$ X-nek olyan finomítása X' és $\exists$ $g: X' \to Y^{(?)}$ ~~(kétpontos)~~ szimpl. leképez. $g \cong f$.

__Def.__ $g, f: X' \to Y$, f folyt., g szimpl.

g szimpl. approx.-ja f-nek, ha $\forall x \in X'$-re

$g(x) \in \underbrace{\text{si}\ f(x)}$

legkisebb szimplex, mely tart. $f(x)$-et.

__Megj.__ $g \cong f$, mert $\forall x \in X'$-re az $\overline{f(x), g(x)}$ szakasz értelmes.

szimpl. approx. a cs. a, ha

$\forall a \in sk_0 X$ $f(st\, a) \subset st\, b$ valamilyen $b \in sk_0 Y$-ra

Áll ⇒ T.: Y-ban nyílt fedés a csúcsok csillagaival.

Lebesgue l. ⇒ ∃ olyan finomítása X-nek, melyre az áll feltétele teljesül.

Biz (áll) $\forall a \in sk_0 X$-re legyen $g(a) = b$.

Tfh. $a_0, a_1, \dots, a_k$ egy X-beli szimplex csúcsai.

Kell: $b_0, \dots, b_k$ $\updownarrow$ egy Y-beli szimplex csúcsai. $(f(st\, a_i) \subset st\, b_i)$

Ezre: $\bigcap_{i=0}^{k} st\, a_i \neq \emptyset$

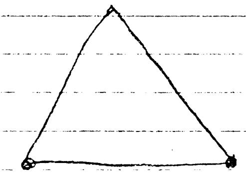
$$f\left(\bigcap_{i=0}^{k} st\, a_i\right) \subset \bigcap_{i=0}^{k} f(st\, a_i) \subset \bigcap_{i=0}^{k} st\, b_i \neq \emptyset.$$

Az így kapott g szimpl. approx., azaz $g(x) \in$ szi $f(x)$

$x \in \overset{\circ}{[a_0, \dots, a_k]}$ szimplex $= \bigcap_{i=0}^{k} st\, a_i$

$g(x) \in [b_0, \dots, b_k]$

$f(x) \in \bigcap_{i=0}^{k} st\, b_i$



$b_0, \dots, b_k$ csúcsai a szi $f(x)$-nek (lehet, hogy nem az összes csúcs)

Tehát $g(x) \in$ szi $f(x)$. □

9. előadás (diff. top.)

HF-k megoldásai:

1.) $f_* = 0$ $f \not\simeq 0$: $S^1 \times S^1 \longrightarrow S^2$

2.) $[F_1, F_2]$: $\langle F_1, F_2 \rangle \xrightarrow{1-1} Hom(\pi_1(F_1), \pi_1(F_2))$

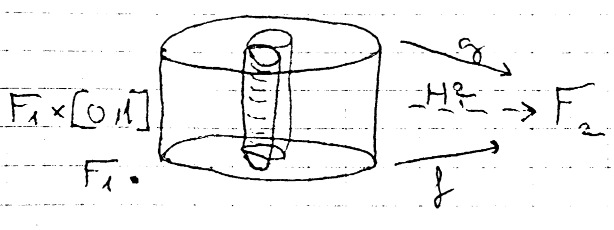
1 pont rögz. $f \longmapsto f_*$

Rá: generátorok képe megad (homot. erejéig) egy leképezést az 1-vázon $sk_1 F_1 \to F_2$

egy 0-homotóp hurok ⇒ kiterjed a 2-cellára

reláció $= a_1 b_1 a_1^{-1} \dots$ képe φ-nél

Inj.:



$sk_1 F_1 \times [0,1]$-en megvan a H (a képek homotópok: ezt választjuk a két 1 cella közé)

$D^3 = D^2 \times [0,1]$

$S^1 \times [0,1]$, $D^2 \times 0$, $D^2 \times 1$ -en adott a leképezés (ez ∂D^3)

$\pi_2(F_2) = 0$, ezért kiterjed a leképezés $D^2 \times [0,1]$-re

$\Theta : \langle F_1, F_2 \rangle \xrightarrow{rá} [F_1, F_2]$

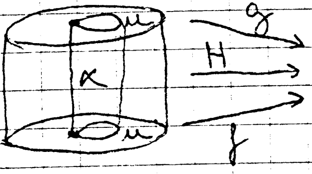
$Hom(\pi_1(F_1), \pi_1(F_2))$ $\quad f : \underset{p}{F_1} \to \underset{\underset{r}{q}}{F_2}$ homog. lemma

$\varphi, \psi \in$

$\alpha \in \pi_1(F_2)$ $\quad x \to \alpha x \alpha^{-1}$ autom.

$\Theta(\varphi) = \Theta(\psi) \Leftrightarrow \exists \alpha\ \varphi^\alpha = \psi$

$\alpha = H|_{* \times [0,1]}$



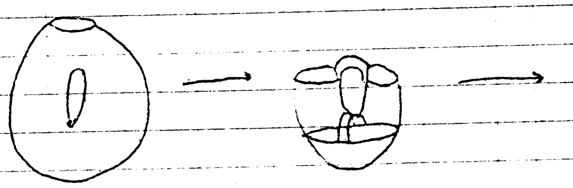
$f(u)^\alpha \cong g(u)$

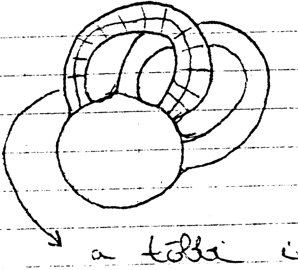
3.) Felület immerzióinak leírása. $A_p \overset{\alpha}{\looparrowright} R^3$

$A_p \setminus D^2$ $\qquad Imm(A_p \setminus D^2, R^3) \xleftarrow{1-1} Imm(A_p, R^3)$

(mert $\pi_2(SO(3)) = 0$)

lukas tórusz:



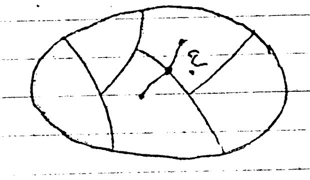


kiindulási immerzió

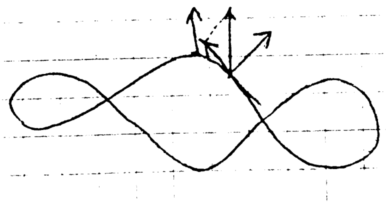
a többi immerzióban a fület tövénél néhányszor 360°-ot csavarunk (többet csavarva ugyanaz)

$\Rightarrow 2^{2p}$ db immerzió van

$C^\infty(F^2, R^3)$



immerziók reguláris homotópiaosztályai (az átmeneteket manapság sokat vizsgálják)



$$\deg \nu_f = \frac{\chi(F^2)}{2}$$

feltehető: É és D pólus reg. érték

A függőlegesen felfele álló vektort vetítsük le az érintősíkra. Kapunk egy vektormezőt, melynek 0-helyei ott vannak, ahol a normálvektor függőleges.

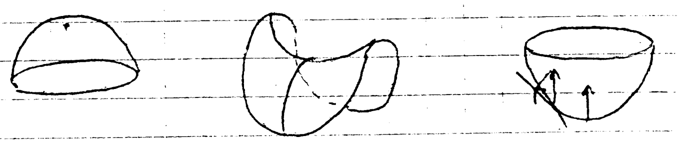
ν_f^{-1}(pólusok) = vektormező nullhelyei

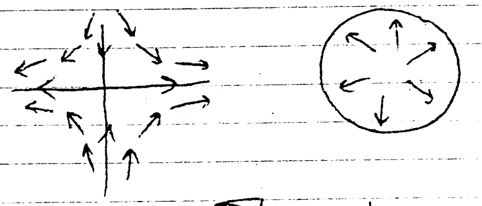
<u>A.</u> indexe = v_f foka abban a pontban

<u>B.</u> Fel lehet tenni, hogy ezen pontok körül a

z koord. fv. = u^2+v^2 vagy u^2-v^2 vagy $-(u^2+v^2)$

alakú.





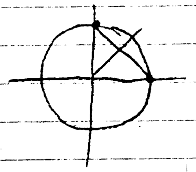
□

Poincaré - Hopf: $\chi(M^n) = \sum_{p\ 0\text{-hely}} \text{index}\, v_p$.

Tehát É-ban és D-ben a fokok összege $\chi(M^n)$, így v_f foka $\chi(M^n)/2$.

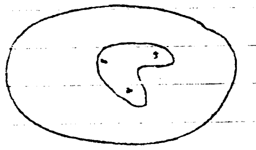
4.) $S^r * S^q = S^{r+q+1}$

$R^{r+1} \times R^{q+1}$

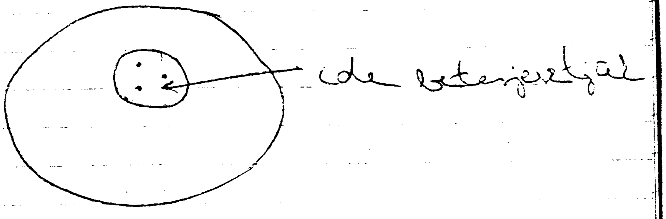


5.) $M \times N$ parallelizálható ha M, N stabilan paral. és $\chi(M) = 0$.

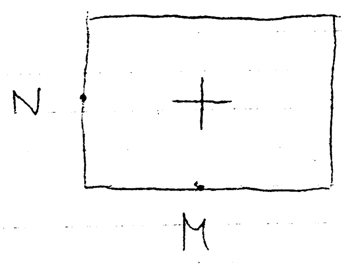
Ptlan dim. sokaságon ∃ vektormező:



homog. lemma



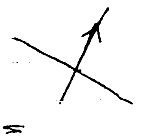
$$T_{(x,y)}(M \times N) = T_x M \oplus T_y N$$



$$\pi_1 : M \times N \longrightarrow M$$
$$\pi_2 : M \times N \longrightarrow N$$

$$T(M \times N) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pullback}}}{\pi_1^*} TM \oplus \pi_2^* TN$$

$$TM = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triv. ny.}}}{\varepsilon^1} \oplus \eta^{n-1}$$ mert M-en van vmező



$$T(M \times N) = \underset{\substack{\| \\ \pi_2^* \varepsilon^1 \leftarrow \text{triv. ny. csak egy van}}}{\pi_1^* \varepsilon^1} \oplus \pi_1^* \eta^{n-1} \oplus \pi_2^* TN =$$

$$= \pi_1^* \eta^{n-1} \oplus \underbrace{\pi_2^* (\underbrace{\varepsilon^1 \oplus TN}_{\varepsilon^{n+1}})}_{\varepsilon^{n+1}} = \varepsilon^{n+1} \oplus \pi_1^* \eta^{n-1} =$$

$\oplus \Pi_1 \underbrace{(\varepsilon \oplus TM)}_{\varepsilon^{n+1}} = C$

6.) $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ nem direkt összeg.

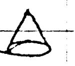
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[l, bend right, dashed] & C \arrow[r] \arrow[l, bend right, dashed] & 0 \end{tikzcd} \not\Rightarrow B = A \oplus C$$

$\pi_r(S^4) \approx \pi_r(S^7) \oplus \pi_{r-1}(S^3)$

$S^7 \xrightarrow{S^3} S^4$

$$\begin{tikzcd} \pi_r(S^3) \arrow[r, "0"'] & \pi_r(S^7) \arrow[r] & \pi_r(S^4) \arrow[r] & \pi_{r-1}(S^3) \arrow[l, bend left] \arrow[r, "0"'] & {} \end{tikzcd}$$

$A \subset X$ 0-homotóp $\Leftrightarrow$ $CA \to X$ kiterjed

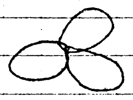


$S^{r-1} \to S^3$ leképezés kiterjed.

$CS^{r-1} \to CS^3$ $\qquad$ $\pi_r(S^4) \longrightarrow \pi_{r-1}(S^3)$

$\overset{\shortparallel}{D^r}$ $\quad$ ez adja a splittinget $\qquad$ $\overset{\shortparallel}{\pi_r(S^7, S^3)}$ # $\leftarrow$ splitting

7.) SA_p $\qquad$ $A_p =$



$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$

$\bigvee_i S_i^2 \cup_\varphi D^3$

$\varphi: \partial D^3 \to \bigvee_i S_i^2$ 0-homotóp, $\quad S^3 \vee \bigvee_i S_i^2$

φ-t homot. osztályon belül változtatva a homot. típus nem változik.

8.) $V_{n,k} \xrightarrow{V_{n-1,k-1}} S^{n-1}$

$\ldots \to \pi_{i+1}(S^{n-1}) \to \pi_i(V_{n-1,k-1}) \to \pi_i(V_{n,k}) \to \pi_i(S^{n-1}) \to \ldots$

$\pi_i(V_{n,k})$ $\quad i < n-k \quad k \geq 2 \Rightarrow$ ~~m~~ $i < n-2$

$\pi_{i_0}(V_{n,k}) \cong \pi_{i_0}(V_{n-k+1,1}) = \pi_i(S^{n-k}) = 0.$

$i = n-k \quad k \geq 3 \qquad i_0 + 1 < n-1$

$\pi_{i_0}(V_{n,k}) \cong \pi_{i_0}(V_{n-k+2,2})$

$\pi_{i+1}(S^{i+1}) \longrightarrow \pi_i(V_{i+1,1}) \longrightarrow \pi_i(V_{i+2,2}) \longrightarrow 0$

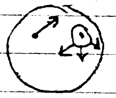
$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad G$ ciklikus

$\mathbb{Z}$ $\quad V_{r,2} \xrightarrow{S^{r-2}} S^{r-1}$.

$\overset{\shortparallel}{\pi_{r-1}(S^{r-1})} \to \pi_{r-2}(S^{r-2}) \to \pi_{r-2}(V_{r,2}) \to \pi_{r-2}(S^{r-1})$

$\overset{\cong}{\pi_{r-1}(V_{r,2}, S^{r-2})}$

$$\begin{tikzcd}
(D\ ;S'\ ) \arrow[r] \arrow[d] & (V_{r,2}, S') \arrow[d, "S^{r-2}"] \\
x \in S^{r-1}_{,x} \arrow[r, "id"'] & S^{r-1}
\end{tikzcd}$$



$V_{r,2} = S^{r-1}$ érintőtere

Ez a fölemelés kijelöl egy vektormezőt S^{r-1}-en

Csak az X-ben van 0-helye, itt a forgás 2, ha $r-1$ ps. és 0 ha $r-1$ ptlan

3.) $F^2 \looparrowright R^3$ kettőspontok nélküli immerzió

10. előadás (alg. top)

Feladatok

1.) a) $f: S^n \to S^n$, $X_f = S^n \cup_f D^{n+1}$

Ha $X_f \not\cong S^n \vee S^{n+1} \Rightarrow f \not\simeq 0$.

b) $\eta: S^3 \to S^2$ Hopf leképe.

$X_\eta \cong CP^2$

c) Bizonyítsa be $\eta \not\simeq 0$.

d) Ugyanez Freudenthal t. $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \operatorname{Ker} S \longrightarrow \pi_{2k+1}(S^{k+1}) \xrightarrow{S} \pi_{2k+2}(S^{k+2}) \xrightarrow{\approx} \pi_{2k+3}(S^{k+3}) \xrightarrow{\approx} \dots \\ \parallel \\ \{[1_{S^{k+1}}, 1_{S^{k+1}}]\} \qquad \overset{?}{\Longrightarrow} \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2. \end{array}$$

e) $S\eta \not\simeq 0$ (Ált. Freudenthal t.)

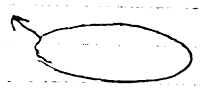
2.) $f: X \to Y$ gyenge homot. ekv. (azaz $\forall f_{*n}$ izom).

K véges szimpl. kompl.

$[K, X] \xrightarrow{f_*} [K, Y]$ 1-1 értelmű

3.) $\operatorname{Emb}^{fr}(n,k)$ framing: $\forall$ pontban ki van választva egy normálvektort

$\operatorname{Emb}(n,k)$ $M^n \hookrightarrow R^{n+k}$ kobordizmussa nézve



tüskézés = framing

kiterjed a kobordizmusra is

$$?\begin{cases} n=0 & k \geq 1 \\ n=1 & k \geq 1 \quad \text{nem triv., ha } k>1 \end{cases}$$

∀ π_n funktor

1.)
$$\begin{tikzcd} (X,A) \arrow[r] \arrow[d] & \text{hosszú egzakt sorozat} \arrow[d] \\ (Y,B) & \text{hosszú egzakt sorozat} \end{tikzcd}$$

Morfizmusok a hosszú egz sorozatok között:

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[d] \\ \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r] & D_n \arrow[r] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$
kommu

2.) homot. inv.

3.) $\pi_n(*) = 0$

Homológiák: 4.) (X,A) CW pár
~1,2,3
$$H_n(X,A) = H_n(X/A)$$

∃! funktor a CW párokon, mely ~ 1,2,3,4

Köv. $\pi_n(X,A) \not\cong \pi_n(X/A)$ (mert $\pi_n \neq H_n$)

pl. $\pi_3(D^2,S^1) = 0$ (egz sorozat), de $\pi_3(D^2/S^1) = \pi_3(S^2) \neq 0$.

Tétel. A m-öf, (X,A) n-öf $\Big\}$ $\Rightarrow$ $p: X \to X/A$, $p_*: \pi_r(X,A) \to \pi_r(X/A)$
izom. $2 \le r \le n+m$
epi. $r = n+m+1$

n-ig 0-k a rel. homot. csoportok

Köv. Ált. Freudenthal t.

⌈ Freudenthal t. „befejezése":

S mono: $\pi_{n+k}(S^n) \xrightarrow{S} \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$, dim megfontolás.

f, g $\quad Sf \cong Sg$

Kell: $Sf \cong_H Sg \Rightarrow f \cong_K g$

$SK \cong H$ (∀ paraméter értékre deszuszpendáljuk H-t, mint a szuszp. bizonyításánál, csak van egy extra paraméter)

Ált. Fr. t. X k-öf CW-kompl

$S: \pi_r(X) \to \pi_{r+1}(SX)$ izo. $r \le 2k$
epi. $r = 2k+1$

Biz. (T ⇒ Á. Fr. t.)

$\pi_r(C(X), X) \longrightarrow \pi_r(C(X)/X)$ izom. $r \leq 2k$

$\wr\!\wr$ $\quad$ $\uparrow$ $\quad$ $\|$

$\pi_{r-1}(X)$ kúp az X fölött $\quad \pi_r(SX)$ $\quad$ epi $\quad r = 2k+1$

$$\pi_r(C(X)) \longrightarrow \pi_r(C(X), X) \xrightarrow[\approx]{} \pi_{r-1}(X) \longrightarrow \pi_{r-1}(C(X))$$

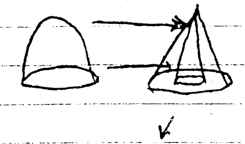
$\|$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\|$

0 (kontrakt.) $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ 0

$D^r \to C(X)$ $\quad \pi_r(C(X), X) \longrightarrow \pi_r(C(X)/X)$

$S^{r-1} \to X$ $\qquad \wr\!\wr \qquad\qquad\qquad \|$

rel. reprez.



$\pi_{r-1}(X) \xrightarrow{\approx} \pi_r(SX)$

Ez a szuszpenzió leképezés

C(X)/X-ben alul összecsípjük, tehát ez a szuszp.

X k-öf. $\quad k = n$

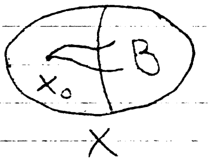
$(C(X), X)$ $\quad (k+1)$-öf $\quad k+1 = n$

$r \leq 2k+1.$ □

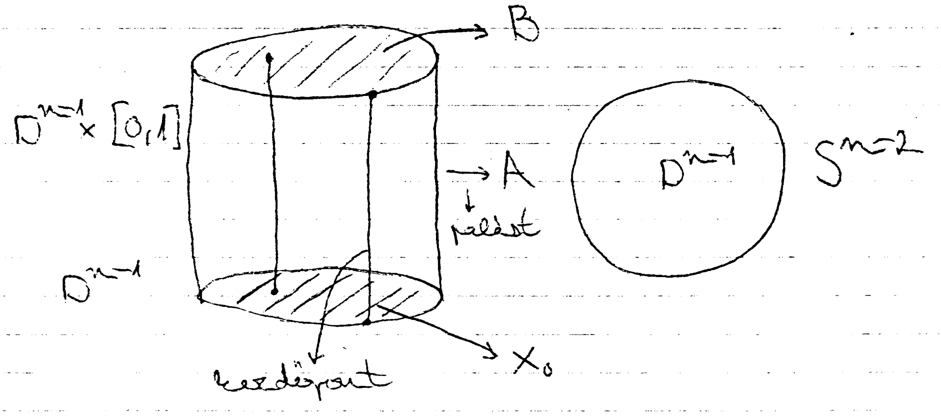
Def Triáda: $X = A \cup B \quad x_0 \in A \cap B$

Def $\pi_n(X; A, B, x_0) = \pi_{n-1}(\underbrace{P(X; x_0, B)}_{P_1}, \underbrace{P(A; x_0, A\cap B)}_{P_2}, \omega_0)$

$P(X; x_0, B)$



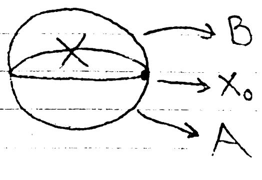
utak $x_0 \rightsquigarrow B$



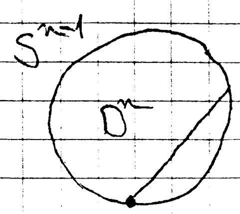
$(D^{n-1}, S^{n-2}) \to (P_1, P_2)$

Más reprezentáció: $(D^n, S^{n-1}_+, S^{n-1}_-, x_0) \longrightarrow$

(X, B, A, x_0)

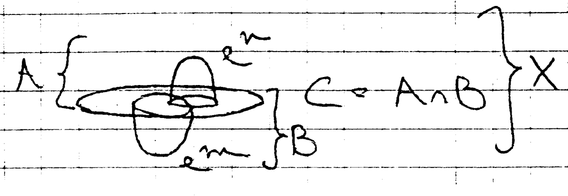


$$\begin{tikzcd}
\pi_n(P_1,P_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_{n-1}(P_2) \arrow[r] \arrow[d, equal, "?"] & \pi_{n-1}(P_1) \arrow[r] \arrow[d, equal, "?"] & \pi_{n-1}(P_1,P_2) \\
\pi_{n+1}(X;A,B,x_0) \arrow[r] & \pi_n(A,A\cap B,x_0) \arrow[r] & \pi_n(X,B,x_0) \arrow[r] & \pi_n(X;A,B,x_0)
\end{tikzcd}$$



az utak terében egy szferoid: a peremen körbemegy az egyik végpont

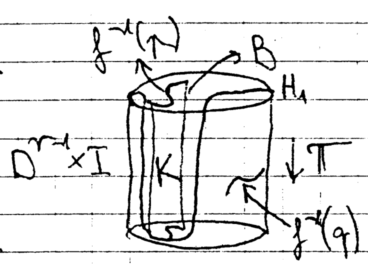
Pl.



e^n, e^m odaragasztott golyók

$\Rightarrow$ $\pi_r(X;A,B,x_0)=0$, ha $2\leq r\leq n+m-2$.

Biz



$f:(D^{r-1}\times I, S^{r-2}\times I, D^{r-1}\times\{1\}, D^{r-1}\times\{0\}\cup$
$\cup\, \overset{*}{p}\times[0,1]) \longrightarrow (X;A,B,x_0)$

$f^{-1}(p)$ részkomplexus (részsokaság)

$p\in e^m$, $q\in e^n$

$\dim f^{-1}(p) = r-m$

π vetítés. Tek. $\pi^{-1}(\pi(f^{-1}(p))) = K$ $f(K)$ nem fedi le e^n-et. $q\notin f(K)$

$\chi: D^{r-1}\longrightarrow[0,1]$ $\chi(\pi(f^{-1}(p)))=1$
$\chi(\pi(f^{-1}(q)))=0$

$H: (D^{r-1}\times I)\times I \longrightarrow D^{r-1}\times I$

$H(x,s,t) = (x, s(1-t\cdot\chi(x)))$.

$t=0$ id

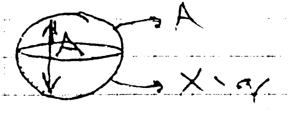
$t=1$

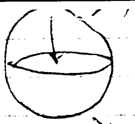
Ezt komponáljuk f-fel

Ez egy homotópia $\pi_r(X;A,X\setminus q,x_0)$-beli

és $H_{t=1}\in\pi_r(X\setminus p;A,X\setminus q,x_0)\approx\pi_r(A;A,X\setminus q,x_0)=0$

a homotópia után a leképezés elkerüli p-t.





A felső félgömböt rádeformáljuk az alsóra, és komponáljuk közben a leképezéssel.
$A\setminus q$-ban már pontrahúzható.

$X\setminus q \subset A\setminus q$

Tehát $\pi_r(A; \underset{\underset{[f]}{\cup}}{A}, X\setminus q, x_0) = 0$.

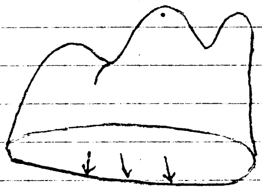
□

11. előadás (diff top)

1) Hopf inv. jól def és homot. inv.
(Útm: deg f jól def és homot. inv.)

2) Kirándulók egyenlete

Morse fv. grafikonja



$-(x^2+y^2)$
x^2+y^2
x^2-y^2

Mi a kapcsolat a min, max. és nyeregpontok száma között?

part felé csökken

3) . RP^2-n olyan fv-t, melynek 3 db krit pontja van.
(Krit. pont: ∀ irányban a derivált 0)

4) ∃-e más zárt felületen ilyen fv, ha Morse fv.

5.) $M^n \looparrowright R^{n+1}$ Majdnem ∀ egyenesre való vetítés Morse-fv.

6.) $M^n \looparrowright R^{n+k}$-ban hasonló igaz-e?

Morse elmélet

Def 1) $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ fv. Morse-fv., ha ∀ kritikus pontja nemelfajuló.

2) Kritikus pont: $p\in M$ $df(p)=0$

$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0,\ i=1,\dots,n$

3.) Kritikus pont nemelfajuló: $\det \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \neq 0$

(kritikus pontban ez jól def, máshol nem)

f Morse $\Leftrightarrow \nexists\, p\in M$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ és $\det \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = 0$.

Áll $C^\infty(M,\mathbb{R})$-ben a Morse fv-ek sűrűek
(és ha M kompakt, akkor nyílt)

[illegible]

$$\begin{tikzcd} J^2(M,R) \arrow[d] & \supset \Sigma^1 = (n+1) \text{ kodimenziós} \\ J^1(M,R) \arrow[d, "\mathbb{R}^n \leftarrow \text{első deriváltak}"] & \supset \Sigma = 0 \text{ szelés} \\ M \times R \arrow[d] & \\ M^n \arrow[uuu, bend left, "j^2 f"] & \end{tikzcd}$$

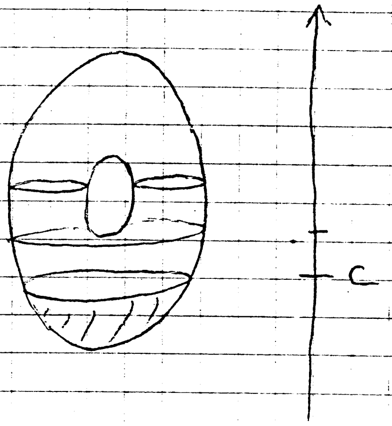
$\{\det = 0\} = \Sigma^1$ (Σ $\forall$ pontja fölött a $\det = 0$ részhalmaz)

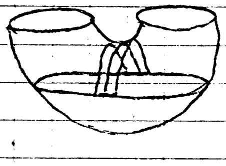
jet tr. t. $\Rightarrow$ m.m. f-re $j^2 f \pitchfork \Sigma^1 \overset{\text{dim miatt}}{\Leftrightarrow} (j^2 f)(M) \cap \Sigma^1 = \emptyset$

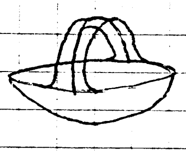
$\Leftrightarrow$ f Morse $\square$

Megj. (Reeb t.) M^n-en $\exists$ Morse fv. 2 krit. ponttal $\Rightarrow$ M^n homeom. S^n (nem felt. diffeomorf).

$M^c = \{f \leq c\}$







Def p krit. pont indexe

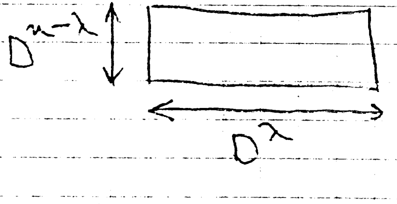
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right) \quad \text{Hesse mtx}$$

negatív sajátértékek száma

λ indexű krit. értéken átlépve homotopikusan

$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ (c = krit. érték)

diffeomorf $M^{c+\varepsilon} = M^{c-\varepsilon} \cup_{\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}} D^\lambda \times D^{n-\lambda}$



L. $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^1$ $\quad 0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, C^∞

$f(\underline{0}) = 0$

$\Rightarrow \exists\, g_i \in C^\infty$ 0-körül, hogy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

$f(\underline{x}) = \int_0 \frac{d}{dt}(t\underline{x})\,dt \qquad t\in[0,1]$

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\cdot x_i\,dt = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt}_{g_i(x)} \qquad \square$$

Köv. $f(\underline{0}) = 0 \quad df(\underline{0}) = 0 \quad \Rightarrow$

$$f(x) = \sum x_i x_j H_{ij}(\underline{x}) \qquad H_{ij}(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{0})$$

(előzőt a parc. deriváltakra is)

Áll. $\underline{0}$ nem elfajuló krit. pont, $f(\underline{0}) = 0$

$\Rightarrow f(x) = \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2 \quad \exists$ ilyen koord. rsz

Biz. Tfh $\exists$ $u_1, \ldots, u_n$ koord.-k, amiben

$$f = \pm u_1^2 \pm \ldots \pm (u_{r-1})^2 + \sum_{i,j\geq r} u_i u_j H_{ij}(\underline{u})$$

Feltehető $H_{rr}(\underline{0}) \neq 0$

$\exists H_{ij}(\underline{0}) \neq 0 \qquad v_i = u_i + u_j$, $\quad v_j = u_i - u_j$

$2H_{ij} u_i u_j = \frac{1}{2} H_{ij}(v_i^2 - v_j^2)$.

$g(u_1, \ldots, u_n) = \sqrt{|H_{rr}(\underline{u})|}$

Új koordináták, $v_1, \ldots, v_n$

$v_i = u_i \quad i \neq r$

$$v_r = g(\underline{u})\cdot\left\{u_r + \sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir}(\underline{u})}{H_{rr}(\underline{u})}\right\}$$

$\frac{\partial v_i}{\partial u_j} = \delta_{ij} \quad i < r,\ j \nleq v$

$\frac{\partial v_r}{\partial u_r} = g(u) + u_i\{\quad\}$

$\underline{u} = 0 \quad g(\underline{u}) \neq 0 \quad \frac{\partial v_r}{\partial u_r} \neq 0$

A transzf. nem elfajuló.

$$f = \pm v_1^2 \pm \ldots \pm v_r^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j \overline{H_{ij}}(\underline{v}) \qquad \square$$

Tétel. Ha $[a,b]$-ben $\nexists$ krit. érték, akkor M^a deformációs retraktuma M^b-nek, és diffeomorfak. $f^{-1}([a,b])$ kompakt

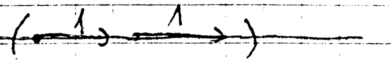
Def Egyparaméteres diffeomorfizmuscsoport.

$\varphi: R \times M \longrightarrow M \qquad \varphi(t,x) = \varphi_t(x)$

$\forall\, \varphi_t$ diffeom. $\qquad \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ homom.

Vmező: $\dfrac{d\varphi(t,x)}{dt}$ a vmező az x pontban



$\forall$ pontban jobbra egy. vektor: nem tartozik hozzá egyparam diff csoport

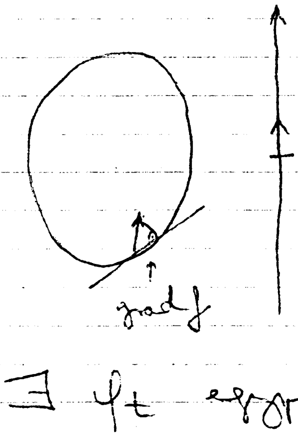
Ha a vmező eltűnik egy K kompakton kívül, akkor ő előáll egy egyparaméteres diffeom csoportból.

Diff egy. $\Rightarrow$ $\forall$ pontnak $\exists$ környezet $\overset{U}{}$ és $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy $(-\varepsilon, \varepsilon)$-on $\varphi_t(x)$ def.-ható $x \in U$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

K komp. $\Rightarrow$ $\exists$ közös ε. $\forall\, \varphi_t = \varphi_{\tau_1} \circ \varphi_{\tau_2} \circ \dots \circ \varphi_{\tau_i}$, $|\tau_i| < \varepsilon$

Biz. $\exists$ M-en $\langle\, ,\rangle$ Riemann-metrika

$\langle \mathrm{grad}\, f, X \rangle = X(f) \qquad$ a grad f def-ja



M-en tek. vmezőt $\xi \cdot \mathrm{grad}\, f$

$$\xi = \begin{cases} -\dfrac{1}{\langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f \rangle} & f^{-1}([a,b])\text{-n} \\ 0 & \text{egy kompakton kívül} \end{cases}$$

$\exists\, \varphi_t$ egyparam. diffeom csoport, melyből a $\xi \cdot \mathrm{grad}\, f$ származik.

$$\frac{df(\varphi_t(x))}{dt} \qquad \frac{df(\varphi(t,x))}{dt}$$

$$\Big\langle \operatorname{grad} f, \underbrace{\frac{d\varphi_t(x)}{dt}}_{\xi \operatorname{grad} f} \Big\rangle = -1 \quad \text{ha } x \in f^{-1}([a,b])$$

$$\varphi_{b-a}: M^b \to M^a$$

$$r_t(x) = \begin{cases} x & x \in M^a \\ \varphi_{(f(x)-a)t}(x) & x \in M^b \setminus M^a \end{cases}$$

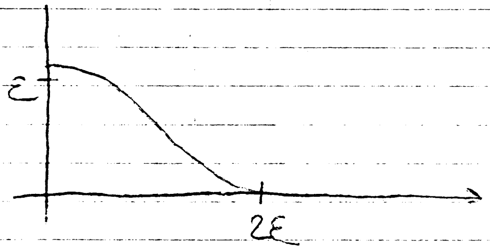
□

Kritikus érték átlépése

$$f(u_1,\dots,u_n) = c - u_1^2 - \dots - u_\lambda^2 + u_{\lambda+1}^2 + \dots + u_n^2$$

$$\mathbb{R}^n \supset U \supset D(0, \sqrt{2\varepsilon})$$

$\exists\, \mu: [0,\infty) \to [0,\infty)$ sima fv.



$$\mu(0) > \varepsilon$$

$$\mu|_{[2\varepsilon,\infty)} = 0$$

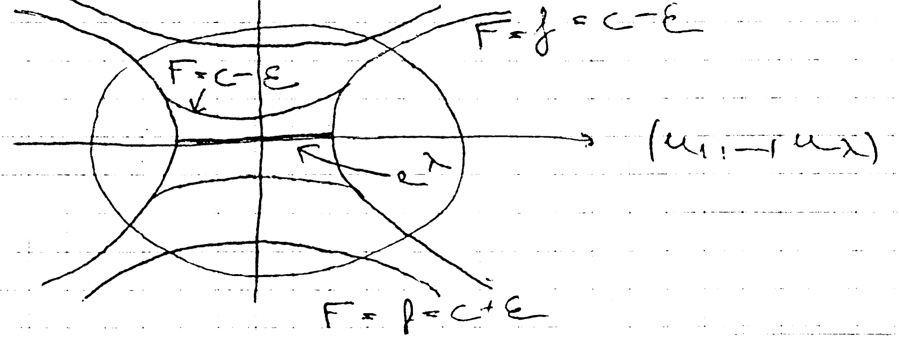
$$-1 < \mu' \leq 0$$

$$F = f - \mu(\xi + 2\eta) \qquad \begin{aligned} \xi &= u_1^2 + \dots + u_\lambda^2 \\ \eta &= u_{\lambda+1}^2 + \dots + u_n^2 \end{aligned}$$

Áll 1.) $F^{-1}(-\infty, c+\varepsilon] = f^{-1}(-\infty, c+\varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$

2\) F-nek $\nexists$ krit. értékei $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$-ban

3.) $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$ def retrahálható $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$-ra, ahol $e^\lambda = \{\eta = 0$, $\xi \leq \varepsilon\}$



F egy lok. koord. környezetben hozza a dolgozat.

Biz. 1) $f|_{\{\xi+2\eta>2\varepsilon\}} \equiv F|_{\{\xi+2\eta>2\varepsilon\}}$

$F \leq f = c-\xi+\eta \leq c+\eta \leq c+\varepsilon$ ha $\xi+2\eta \leq 2\varepsilon$

2) $f = c-\xi+\eta$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta}d\eta = 0 \quad \text{csak ott lehet,}$$

akkor $u_1 = \ldots = u_n = 0$, mert

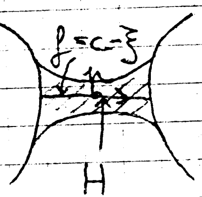
$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1-\mu' < 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \eta} = 1-2\mu' \geq 1$

$d\xi = 2u_1du_1 + \ldots + 2u_\lambda du_\lambda$

$d\eta = 2u_{\lambda+1}du_{\lambda+1} + \ldots + 2u_n du_n$

$F(\underline{0}) < c-\varepsilon$, mert $F(\underline{0}) = c-\mu(0) < c-\varepsilon$.

3) $H = \overline{F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon) \setminus M^{c-\varepsilon}} \supset e^\lambda$,



$F(0) = F(p) < c-\varepsilon$

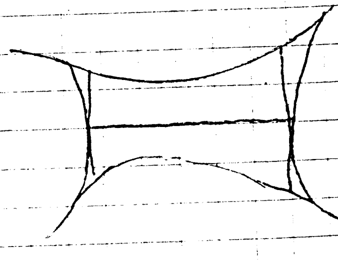
$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1-\mu' < 0$

↳ p-ből jobbra mozogva ξ nő $\Rightarrow$ F csökken

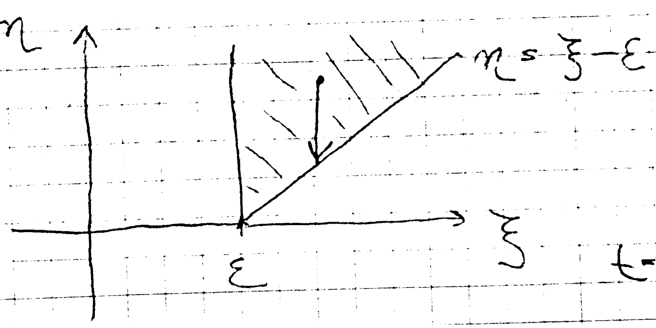
$M^{c-\varepsilon} \cup H \searrow M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$

$$r_t(u_1,\ldots,u_n) = \begin{cases} (u_1,\ldots,u_\lambda, tu_{\lambda+1},\ldots,tu_n) & \text{ha } \xi \leq \varepsilon \\ (u_1,\ldots,u_\lambda, s_tu_{\lambda+1},\ldots,s_tu_n) & \text{ha } \varepsilon \leq \xi \leq \eta+\varepsilon \end{cases}$$

$s_t = t + (1-t)\sqrt{\frac{\xi-\varepsilon}{\eta}}$



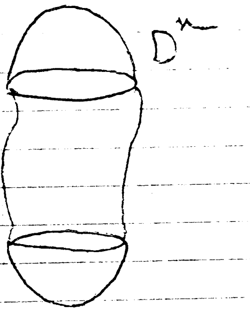
$r_1 = id$



$(\xi, \eta) \longrightarrow (\xi, s_t^2\eta)$

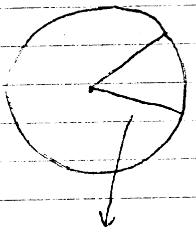
$t=0 \quad (\xi,\eta) \longrightarrow \left(\xi, \frac{\xi-\varepsilon}{\eta}\cdot\eta\right)$ □

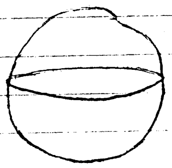
Biz. (Reeb t.)



$M^n = D^n \cup_{\varphi} D^n$

$\varphi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ diffeom.





sugárirányban kiterjesztjük homeomorfizmussá. □

12. előadás (alg. top)

Ált. Freudenthal t.

X k-öf ⇒ $\pi_i(X) \to \pi_{i+1}(SX)$ izom $i \le 2k$

epi $i = 2k+1$

⇑

Köv. A' m-öf, (X, A') n-öf } ⇒ a) $2 \le r \le m+n$

$\pi_r(X, A') \to \pi_r(X/A')$ izom

b) $r = n+m+1$ epi

(rel. szferoid → absz. szferoid)

(**Biz.** Köv ⇒ Ált. Fr. t.:

$$\begin{tikzcd} \pi_{i+1}(C(X), X) \arrow[r, "\overset{\approx}{f}"] \arrow[d, "\approx"] & \pi_{i+1}(SX) \\ \pi_i(X) \arrow[ur, bend right, "S"'] & \end{tikzcd}$$

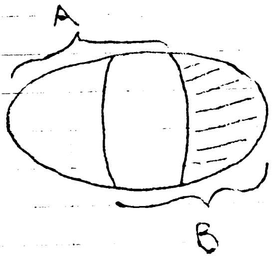
$i \le 2k$
epi $i = 2k+1$)

Tétel (Homot. kivágás) HKT

$Y = A \cup B$ CW
$(A, A \cap B)$ n-öf
$(B, A \cap B)$ m-öf } ⇒ $(A, A \cap B) \xhookrightarrow{i} (Y, B)$

i_{*r} izom $r < n+m$

epi $r = n+m$



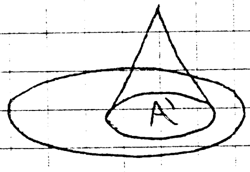
Biz. (T(Homot. kiv.) ⇒ Köv.)

$Y = X \cup CA'$ $X = A$ $CA' = B$

pontrahúzható

$$\pi_r(\underbrace{X, A'}_{n\text{-öf}}) \longrightarrow \pi_r(X \cup CA', CA') \approx \pi_r(X \cup CA') \approx \pi_r(X/A)$$

izom: $r < n + (m+1)$



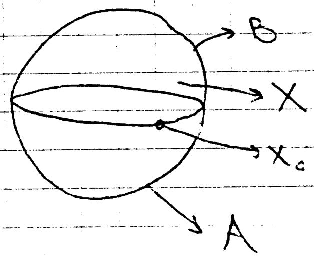
$\pi_i(CA', A') \xrightarrow{\approx} \pi_{i-1}(A')$ egz. sorozatból

epi $r = n + (m+1)$

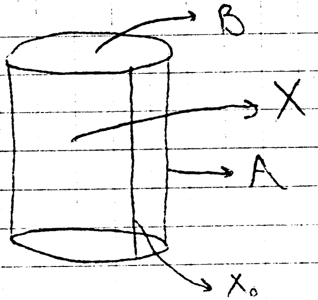
HKT biz.

L $x_0 \in C \sim T_2$
$A = C \cup e^n$
$B = C \cup e^m$
$X = A \cup B$
$\Rightarrow$ $2 \leq r \leq n + m - 2 \Rightarrow$ $\pi_r(X; A, B, x_0) = 0$

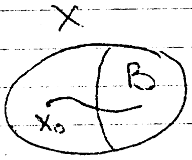
Def D^r



$D^{r-1} \times [0,1]$



$$\pi_r(X; A, B, x_0) = \pi_{r-1}(P(X; x_0, B), P(A; x_0, A \cap B), \omega_0)$$

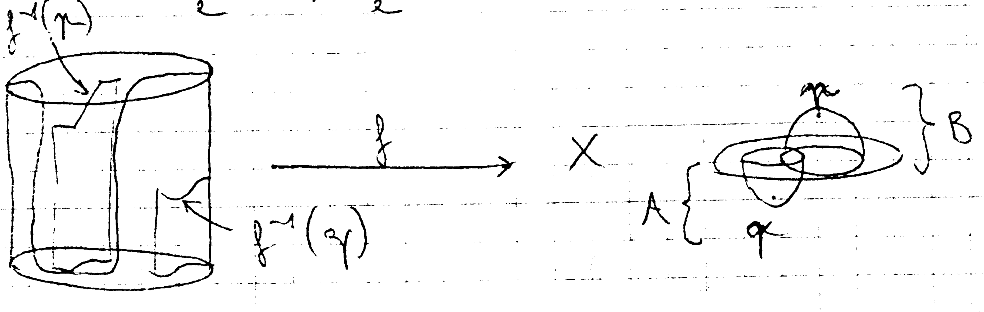


$$\pi_{r+1}(X; A, B, x_0) \rightarrow \pi_r(A, A \cap B, x_0) \rightarrow \pi_r(X, B, x_0) \rightarrow$$
$$\rightarrow \pi_r(X; A, B, x_0)$$

$\Downarrow$

a HKT a K-beli spec esetre

Biz L $p \in \underset{e^n}{A}$, $q \in \underset{e^m}{B}$



$$\chi|_{\pi(f^{-1}(p))} \equiv 1 \qquad \chi|_{\pi(f^{-1}(q)) \cup S^{r-2} \times 0} \equiv 0$$

$H(x,s,t) = (x, s(1-t\cdot\chi(x)))$

$\overset{\shortparallel}{H_t}(x,s)$

$H_0 = id$, H_1 : $\mathrm{im}\, H_1 \cap f^{-1}(p) = \emptyset$

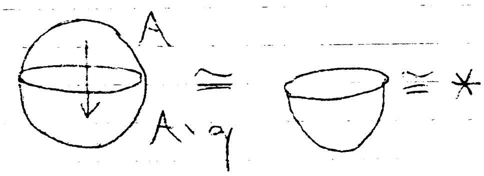
$f \circ H_t$ homotópia f és 0 között

$$\pi_r(X; A, B, x_0) \approx \pi_r(X; A, X \setminus q, x_0) \leftarrow$$

$$\overset{\in}{[f]} \xleftrightarrow{1-1} [f']$$

$$\leftarrow \pi_r(X \setminus p; A, X \setminus \{p,q\}, x_0) \approx \pi_r(A; A, A \setminus q, x_0) = 0$$

$[f'']$
$\shortparallel$
$f \circ H_1$



□

<u>Def</u> $i: (A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$ $n+m$ ekv., ha

$$\left.\begin{array}{ll} i_{*r} \text{ izom} & r < n+m \\ \text{epi} & r = n+m \end{array}\right\} (*)$$

<u>Biz</u>

(1) HKT $A = C \cup e^{n'}$, $B = C \cup e^{m'}$ $n' > n, m' > m$

$\Rightarrow i = n+m$-ekv. $\Leftarrow (\alpha)$

(2) $A = C \cup e^{n_1} \cup \_ \cup e^{n_k}$ $B = C \cup e^{m'}$ $n_i > n$
$m' > m$

$A_0 = C$ $A_i = C \overset{i}{\underset{j=1}{\cup}} e^{n_j}$ $X_i = B \cup A_i$

<u>Áll</u> $(A_i, A_0) \hookrightarrow (X_i, X_0)$ $n+m$-ekv.

$(A_i, A_{i-1}, A_0) \hookrightarrow (X_i, X_{i-1}, X_0)$

$$(\pi_{r+1}(A_i, A_{i-1}) \to \pi_r(A_{i-1}, A_0) \to \pi_r(A_i, A_0) \to .)$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_{r+1}(A_i, A_{i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\approx", "①"'] & \pi_r(A_{i-1}, A_0) \arrow[r] \arrow[d, "②"'] & \pi_r(A_i, A_0) \arrow[r] \arrow[d, "③"'] & \pi_r(A_i, A_{i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "④"'] & \pi_{r-1}(A_{i-1}, A_0) \arrow[d, "⑤"'] \\
\pi_{r+1}(X_i, X_{i-1}) \arrow[r] & \pi_r(X_{i-1}, X_0) \arrow[r] & \pi_r(X_i, X_0) \arrow[r] & \pi_r(X_i, X_{i-1}) \arrow[r] & \pi_{r-1}(X_{i-1}, X_0)
\end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} ① \\ ④ \end{array}\right\} \text{izom} \Leftarrow \alpha \\ \\ \left.\begin{array}{l} ② \\ ⑤ \end{array}\right\} \text{izom ind} \end{array}\right\} \Rightarrow ③ \text{ izom} \quad (\text{öt lemma})$$

(3) $A = C \cup e^{n_1} \cup \_ \cup e^{n_k}$ $B = C \cup e^{m_1} \cup \_ \cup e^{m_l}$
$n_i > n$ $m_j > m$

$\Rightarrow i : (A,C) \to (X,B)$ n+m-ekv.

Biz $B_i = C \dot{\bigcup}_{j=1}^{i} e^{m_j}$ $X_i = A \cup B_i$

$$(A,C) = (X_0,B_0) \subset (X_1,B_1) \subset \dots \subset (X_k,B_k) = (X,B)$$

(n+m)-ekv. (2) miatt □

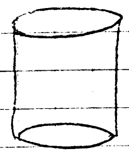
(4) $sk_n(A,C) = C$, azaz $A \setminus C$-ben csak n-nél nagyobb dim cellák lehetnek

$sk_m(B,C) = C$, azaz $B \setminus C$ ... m-nél nagyobb

Kell $(A,C) \subset (X,B)$ n+m-ekv. Ez ekv. azzal, hogy $\pi_r(X;A,B,x_0) = 0$ $2 \le r \le n+m$

$\ni$

$[f]$



$\text{im} f \subset \overbrace{A' \cup B'}^{X'}$, ahol $A' = C \cup$ véges sok cella

$\quad\; \cap \quad\; \cap$

$\quad\; A \quad\; B$ $\qquad B' = C \cup$ —''—

$(A',C) \subset (X',B')$ n+m-ekv.

$\Updownarrow$

$\pi_r(X';A',B',x_0) = 0$ ha r = ..

$\Rightarrow [f] = 0.$

Új jel

L: (X,A) n-öf pár, rel. CW kompl $\Rightarrow$

$\exists (X',A')$ $X \subset X'$, $A \subset A'$ def retraktumok, hogy

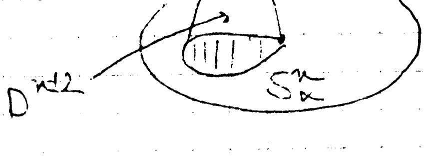
$X' \setminus A'$-ben csak n-nél nagyobb dim cellák vannak

Spec eset: $A = *$

X n-öf, akkor $X \cong X'$, melyre $sk_n X' = *$

Biz (Spec eset)

Ind.-val feltehető, hogy $sk_{n-1} X = *$



$\partial D^{n+2} = S^{n+1} = S^{n+1}_- \cup S^{n+1}_+$

$S^{n+1}_- \downarrow$ S^n-et pontrahúzó homotópia

$S^{n+1}_+ \downarrow D^{n+1}$

$\forall$ n-cellá

$X' = X \cup_\alpha D_\alpha^{n+2} \ (\cong X)$

$A' = \cup D_\alpha^{n+1}$

$X' \cong X'/A'$
$\uparrow$
pontrahúzható

☐

<u>HF-k</u>

1) X, Y véges CW-kompl

$$[S^N X, S^N Y] \longrightarrow [S^{N+1} X, S^{N+1} Y] \longrightarrow \dots$$

<u>Áll</u> Elég nagy N-re kölcs. egyért. $\{X,Y\}$: $X \to Y$ stabil homot. osztályok

(K) $X = S^i$ $\pi_i^s(Y)$-t kapjuk

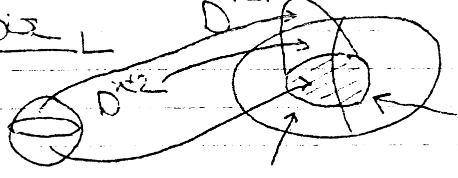
2) $\pi_n^s(X, A) = \pi_n^s(X/A)$

$X \longrightarrow (X, \emptyset)$ $X/\emptyset = X \cup *$

Extraordinális homológia elmélet (teljesül a 4 ax-ból 3)

$\pi_n^s(*) = \pi^s(n)$

<u>Biz</u>



$X \setminus A$ csak $\geq n$-dim lehetnek

e^n-t átdeformáljuk d^n-be

$\partial D_+^{n+1} \longrightarrow e^n$ $\partial D_-^{n+1} \longrightarrow d^n$

$$\begin{tikzcd} A' = A \cup D^{n+1} \arrow[d, "\text{retr.}"] & X' = X \cup D^{n+2} \arrow[d, "\text{retr.}"] \\ A & X \end{tikzcd}$$

☐

<u>Biz</u> (HKT)

(5) $sk_n(B, C) = C$ $(C = A \cap B)$

$(A, C) \subset (A', C')$ $sk_n(A', C') = C'$

$B' = B \cup C'$, $X' = B \cup A'$

$(X; A, B, x_0) \hookrightarrow (X'; A', B', x_0)$ izom $\forall \pi_r$-ben

$\pi_r(X'; A', B', x_0) = 0$ $2 \leq r \leq n+m$

Ez is 0.

$$(A, C) \cong (A', C') \underset{\substack{n+m \\ 2k\ddot{o}.}}{\hookrightarrow} (X', B') \cong (X, B)$$

(6) Állt. ext. $\left.\begin{matrix}(B,C)\ m\text{-öf} \\ (A,C)\ n\text{-öf}\end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} (A,C) \subset (X,B)$ n+m-ekv

$(B,C) \subset (B',C')$ $B' \setminus C'$ csak m-nél nagyobb dim cellák

$A' = A \cup C'$, $X' = A \cup B'$

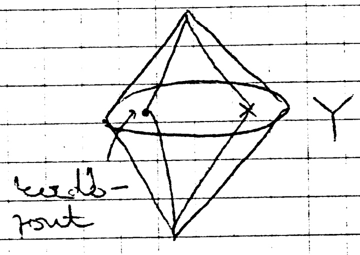
$(A,C) \underset{\cong}{\subseteq} (A',C') \underset{\substack{n+m \\ \text{ekv.}}}{\subset} (X',B') \cong (X,B)$. □

1) HF limt:

$[X,Y] \xrightarrow{S} [SX,SY] \to [S^2X,S^2Y] \to \dots \to \{X,Y\}$

$Y \overset{j}{\subset} \Omega SY$

↖ huroktér



$$\begin{tikzcd}
\pi_i(Y) \arrow[r, "j_*"] \arrow[dr, "S"'] & \pi_i(\Omega SY) \arrow[d, "\cong"] \\
 & \pi_{i+1}(SY)
\end{tikzcd}$$

2) $\forall\ (X,A) \rightsquigarrow$ hosszú egzakt sorozat

áll:

$$\begin{tikzcd}
(X,A) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "f \simeq g"] & \text{hosszú egzakt sorozat} \arrow[d, "f_* = g_*"] \\
(Y,B) \arrow[r, squiggly] & \text{hosszú egz}
\end{tikzcd}$$

13. előadás (diff top)

HF-k:

1.) Banchoff t.: $f: M^2_{\text{zárt}} \looparrowright \mathbb{R}^3$ önt.metsz. ⇒

$t(f) \equiv \chi(M^2) \bmod 2$ ($t(f)$ a 3-szoros pontok száma)

Útm: - Nem csavarodik a kettősvonal mentén.
- $\exists\ RP^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ hogy 1 db 3-szoros pont van

2) $\mathrm{Imm}^{SO}(1,1) = ?$ (SO: a sokaságok és köztük a kobordizmusok is irányítottak)

3.) $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$ $\deg \nu = ?$

Útm: n ps., n ptlan

4.) $f: F^2 \looparrowright \mathbb{R}^2$ $\partial F^2 = S^1$

Persze ált. helyzetű, ∄ ~~(ált)~~ 3-szoros pont,

X transzv. 2-pontok

$\Rightarrow$ $g = f|_{\partial F^2}$ ptlan

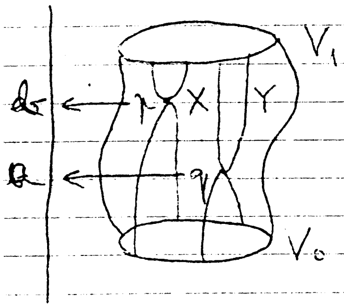
deg $\nu_g : S^1 \longrightarrow S^1$

Def $f : M^n \longrightarrow R$ Morse-fv. jó, ha nagyobb indexű krit. pontban nagyobb értéket vesz fel.

Tétel. Van jó Morse-fv.

Biz. Elég $f : M^n \longrightarrow [0,1]$ M^n peremes, kompakt

$V_0 = f^{-1}(0)$, $V_1 = f^{-1}(1)$, $\exists$ p, q krit. pont



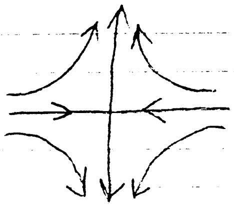
$f(p) > f(q)$, de p indexe $<$ q indexe.

Akkor $\exists$ $g : M \longrightarrow [0,1]$, melyre

$g|_{\partial M \text{ környezete}} = f|_{\partial M \text{ körny.}}$, g krit. pontjai p, q ugyanolyan indexszel, de $g(p) < g(q)$.

Def Szeparatrix diagramja a p kritikus pontnak

$X = X(p) \quad Y = Y(q)$



azok a pályák, amik p-be futnak, vagy p-ből indulnak

A múlt órai bizonyításhoz grad f helyett használhatunk gradiens-szerű vektormezőt:

$\xi(f) > 0$ $\forall$ nem krit. p-ben Krit. pont környezetében $\equiv$ grad f.

$$\left(\xi' = -\frac{1}{\xi(f)} \xi \qquad \xi'(f) \equiv -1 \right)$$

a) $X \cap Y = \emptyset$. Konstr. g ...

$\alpha : V_0 \longrightarrow [0,1]$ C^∞ fv., melyre

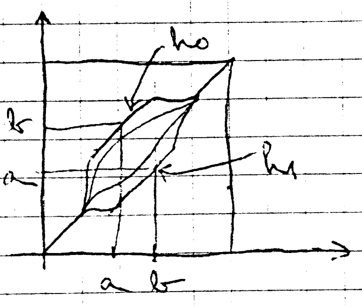
$\alpha|_{V_0 \cap X} \equiv 1$, $\qquad \alpha|_{U_Y(V_0 \cap Y)} \equiv 0$

egy $U_X(V_0 \cap X)$ környezete V_0-beli

Kiterjed M^n-re, pályákon konstans. (X egy környezetén 1, Y egy környezetén 0, a többi pálya V_0 és V_1 között fut).

$h: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ sima

$(s,t) \longmapsto h(s,t) = h_t(s)$



$f(q) = a, \ f(p) = b$

$h(s,t) = s$ ha $0 \leq s < \varepsilon$

$h(s,t) = s$ ha $1 \geq s \geq 1-\varepsilon$

$h_1(b) = a$ $\quad \frac{\partial h_0}{\partial s} \equiv 1$ a körny.-ben

$\frac{\partial h}{\partial s} > 0$

$h_0(a) = b$ $\quad \frac{\partial h_1}{\partial s} \equiv 1$ b körny.-ben

$g(x) = h(f(x), \alpha(x))$ jó,

$g(p) = h(f(p), \alpha(p)) = h(b,1) = a$

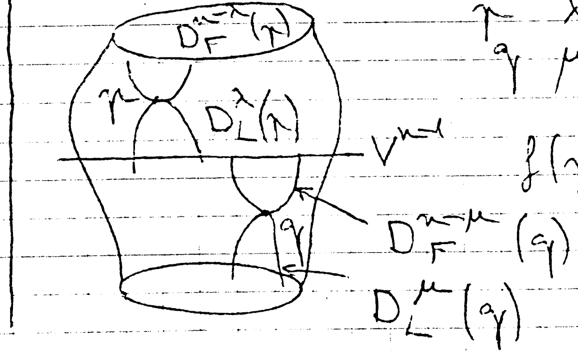
$g(q) = b$

$$dg = \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\frac{\partial h}{\partial s}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a pályák} \\ \text{mentén} > 0}}{df} + \frac{\partial h}{\partial t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a pályák} \\ \text{mentén } 0}}{d\alpha}$$

Pálya irányú vektort bírva csak p-ben és q-ban kaphatunk 0-t. Csak ők krit. pontok

$h_1(s) = s + c$ a krit. pontok körül $\Rightarrow$ g nem elfajuló, és p-ben ill. q-ban az index nem változik

b) ált. eset $X \cap Y \neq \emptyset$,



p λ-indexű $\qquad \lambda < \mu$

q μ-indexű

$f(p) = c - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots$

$V^{n-1} \cap D_L^{\lambda}(p) = S_L^{\lambda-1}(p)$

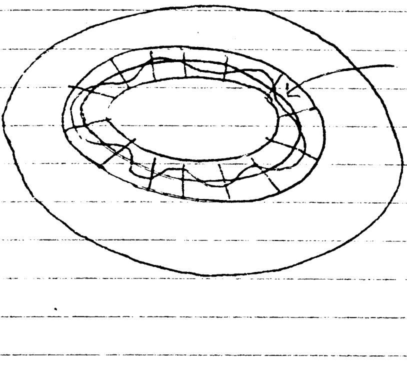
$V^{n-1} \cap D_F^{n-\mu}(q) = S_F^{n-\mu-1}(q)$

$X \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow S_L^{\lambda-1}(p) \cap S_F^{n-\mu-1}(q) = \emptyset$

$(\lambda-1)+(n-\mu-1) < n-1 \Leftrightarrow \lambda-1 < \mu$ (ez $\lambda \leq \mu$ esetén teljesül).

$\exists\ \varphi_t$ izotópiája az $i : S_L^{\lambda-1} \hookrightarrow V^{n-1}$ beágyazásnak, melyre $\varphi_0 = i$, $\varphi_1(S_L^{\lambda-1}(p)) \cap S_F^{n-\mu-1}(q) = \emptyset$.

<u>Def.</u> Izotópia: C^1 topológiában út a leképezések terében, mely $\forall$ pillanatban beágyazás.



→ transzverzalitás tétellel approximáljuk i-t, és lineárisan csinálunk köztük izotópiát

$$\varphi_t = \underbrace{t \cdot i + (1-t) \cdot i'}_{\text{csőszerű környezet fibrumaiban értelmes}} \leftarrow \text{approx lek.}$$

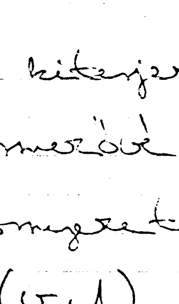
<u>Thom izotópia lemma</u>

$i : M^a \hookrightarrow V^b \quad a < b$, V kompakt

φ_t egy izotópiája az i-nek, $\varphi_0 = i$.

$\Rightarrow \exists$ diffeotópiája id_V-nek, Ψ_t, melyre $\Psi_t|_M = \varphi_t$.

<u>Biz</u>



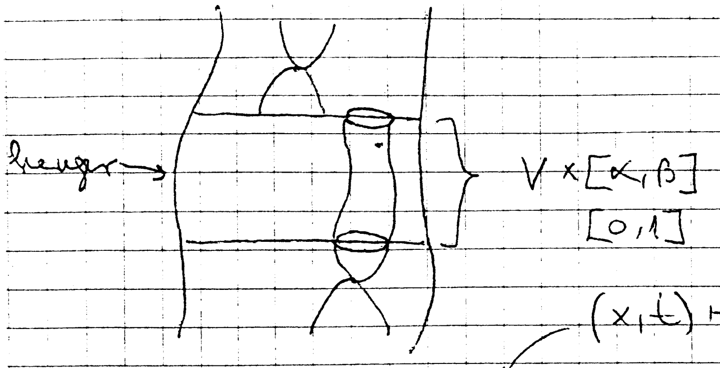
$$\frac{d}{dt}(\varphi_t(s), t) \qquad s \in M$$
$$\parallel$$
$$(v, 1)$$
$$\uparrow$$
„vízszintes" komp.

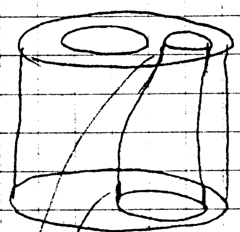
Feltehető, $t < \varepsilon$ és $t > 1-\varepsilon$-ra $v \equiv 0$.

v-t kiterjesztjük egy sima (~~[illegible]~~) ~~vektor~~ vízszintes v vektormezővé az egész hengeren úgy, hogy a perem egy környezetében $\equiv 0$.

$w = (v, 1)$

Ψ_t a w által definiált egyparaméteres diffeom csoport. Mivel a w függőleges komponense 1, ezért Ψ_t a szinteket szintekbe viszi, V-vel diffomorfizmusainak beírhatók. □





$(x, t) \longmapsto (\Psi_t(x), t)$

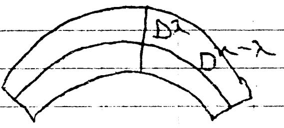
ezzel megcsavarjuk a vektormezőt, grad.-szerű marad. Most már $X \cap Y = \emptyset$.

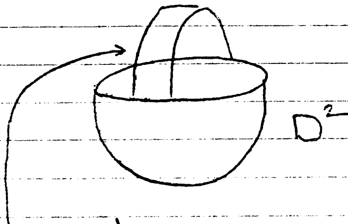
itt függőleges, így össze lehet ragasztani a korábbiakkal.

Nem változtatjuk meg se a fv.-t, se a vektormezőt, csak a gradiens-szerű vektormezőt, ami a pályákat def.-ja. □

HF: 5) Morse-elm. segítségével ~~fel~~ osztályozzuk a felületeket.

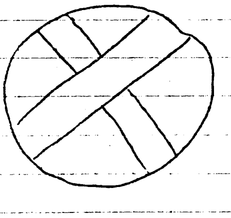
a) irányíthatók: $f : M^2 \to R$ jó Morse-fv., tfh 1 lok. min és 1 lok. max van.





csavarva nem ragadhat, mert irányítható az M^2.

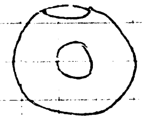
2 szalag: felülről



lyukas tórusz

másképp nem lehet a 2 szalag, mert végül 1 db D^2-t ragasztunk, csak 1 db peremkomponens lehet.

Ha több szalagpár is ilyen



14. előadás (alg. top)

Homológia

Def Algebrai láncomplexus: $\forall\, n \geq 0\ C_n$

$$\to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \dots \to C_0 \to 0 \qquad \partial \circ \partial = 0$$

$$\operatorname{Ker} \partial_n \supset \operatorname{Im} \partial_{n+1} \qquad \frac{\operatorname{Ker} \partial}{\operatorname{Im} \partial} = H_n(\mathcal{C}, \partial)$$ n-edik homológiacsoport.

Def Láncomplexus leképezései

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \\ D_{n+1} \arrow[r] & D_n \arrow[r] & D_{n-1} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

kommutatív

n-edik homológiacsoportja $f_{*n} : H_n(C) \to H_n(D)$

Mert $z_n + C_n : \partial z_n = 0$

$[z_n] \to [f_n(z_n)] \qquad \partial f_n(z_n) \overset{?}{=} 0$

(f) $\qquad f_{n+1}(\partial z_n) = f_n(0) = 0$

$z_n' = z_n + \partial c_{n+1} \qquad f_n(z_n') = f_n(z_n) + \underbrace{f_n(\partial c_{n+1})}_{\partial f_{n+1}(c_{n+1})}$

Def homotópia:

$$\begin{tikzcd} & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[dl, "H_n"'] \arrow[d, "f_n, g_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "H_{n-1}"'] \arrow[d] \\ & D_{n+1} \arrow[r] & D_n \arrow[r] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

$f_n - g_n = H_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1} H_n$

f, g homotópok, ha $\exists H$

Áll Ha $f \cong g \Rightarrow f_* = g_*$.

Biz Kell: z_n ciklus: $f_n(z_n) - g_n(z_n) = H\underset{0}{\partial(z_n)} + \partial H(z_n)$

így határban különböznek.

Koláncompl. $C^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} \qquad \delta \circ \delta = 0$

$\operatorname{Ker} \delta / \operatorname{Im} \delta = H^n(\mathcal{C}^*, \delta)$ n-edik kohomológiacsop.

A homológiák és kohomológiák között a hom funktor a kapcsolat:

$C^n \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(C_n, G) \qquad G$ - Abel - csop

$\delta^{n-1} = \operatorname{Hom} \partial_n \qquad \partial \circ \partial = 0 \Rightarrow \delta \circ \delta = 0$

Tenzorszorzás G-vel: ekkor is $\partial \circ \partial = 0$.

I. $0\to A\to B\to C\to 0$ láncкompl.-ek rövid egz. sorozata

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$H_n(A)\xrightarrow{i_*}H_n(B)\xrightarrow{j_*}H_n(C)\xrightarrow{\partial}$

$\to H_{n-1}(A)\to H_{n-1}(B)\to \dots$

$$H_n(C)=\frac{\overset{\swarrow \text{cikl}}{\operatorname{Ker}\partial_n}}{\underset{\nwarrow \text{határ}}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}}}$$

Biz. $c_n\in C_n$ $\quad \partial c_n=0$

$\exists\, b_n\in B_n \quad jb_n=c_n$

$j(\partial b_n)=0 \Rightarrow \exists\, a_{n-1}: i(a_{n-1})=\partial b_n$

Áll. a_{n-1} cikl (azaz $\partial a_{n-1}=0$) $\quad \partial[c_n]\overset{def}{=}[a_{n-1}]$

$jb_n'=c_n$

$j(\partial b_n')=0$

$\exists\, a_{n-1}': i a_{n-1}'=\partial b_{n-1}'$

$j(b_n-b_n')=0$

$\exists\, a_n: i(a_n)=b_n-b_n'$

$a_{n-1}-a_{n-1}'\overset{?}{=}\partial a_n$

$i(a_{n-1})-i(a_{n-1}')=i\partial a_n$

$\overset{\|}{\partial b_{n-1}}-\partial b_{n-1}'=$

$i(a_{n-1}-a_{n-1}')=\partial(b_n-b_n')=\partial i a_n=i\partial a_n$

$a_n-a_{n-1}'=\partial a_n$

stb. □

Koлánc: $\quad C^{n-1}\xrightarrow{\delta^{n-1}}C^n\xrightarrow{\delta^n}C^{n+1} \quad \delta\circ\delta=0.$

Topológiai homol. elméletek

1) Szimpliciális homológia — szimpl. kompl.-on

2) Szinguláris homol — ∀ top. téren

3.) CW homol — CW komplexusokon

(Δ-homol

Poliéder-homol)

	Előny	Hátrány
1)	fogalmilag egysz.	nehézkes, nehéz, hogy top., sőt homot. inv.
3.)		egyszerű számolás

<u>CW homológia</u>: X CW-kompl

$C_n = \{$n-dim cellák által generált szabad Abel-csoport$\}$

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r] & X \\ \partial D^n \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f_\alpha"'] & sk_{n-1}X \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r] & sk_{n-1}X \,/\, \cup\,\forall(n-1)\text{-cella kivéve az } \alpha\text{-t} \cup sk_{n-2}X \end{tikzcd}$$

karakterisztikus leképezés

$\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$

$$\sigma^n \qquad \partial(\sigma^n) = \sum_\alpha k_\alpha \sigma_\alpha^{n-1}$$

$$k_\alpha = \deg\Big(\underset{\partial\sigma^n}{\overset{\parallel}{S^{n-1}}} \xrightarrow{f_\alpha} S^{n-1}\Big)$$

HF. 1.) S^0 szinguláris homol.

2.) Test feletti együtthatókkal homol $\approx$ kohomol.

Szabad A-cs. $\longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1}$ / $\otimes G$

$C_{n+1} \otimes G \longrightarrow C_n \otimes G \longrightarrow C_{n-1} \otimes G$ $\quad H_n(C;G)$

↗ G együtthatós homol

$H_n(X;G)$

↖ top tér

$C^n = \mathrm{Hom}(C_n, \mathbb{Z})$

$H^n(C^*) =$ $\mathbb{Z}$-együtthatós kohomol.

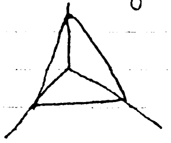
$C^n_G = \mathrm{Hom}(C_n; G) \qquad H^n(C^*_G) = H^n(X;G)$

3.) hosszú egzakt sorozat bizonyítása.

<u>Szinguláris homol.</u>

<u>Def</u> X top tér. n-dim szinguláris szimplex:

$\sigma : \Delta^n \to X$ folyt.

Δ^n  R^{n+1}, conv$(e_1, \ldots, e_{n+1})$

$C_n = \{\sigma \mid \sigma$ sing szimpl$\}$ ↖ generált szabad Ab.-csop

Szimplex határa:

$$\partial[v_0, \dots, v_n] = \sum (-1)^i [\underbrace{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n}_{\Delta_i^{n-1}}]$$

$$\partial\sigma = \sum (-1)^i \sigma\big|_{\Delta_i^{n-1}}$$

$$C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1}$$ 4.) HF: $\partial\circ\partial = 0$

$f: X \to Y \Rightarrow f_\cdot : C(X) \to C(Y)$

$C(X)$ = X szing. lánckomplexusa

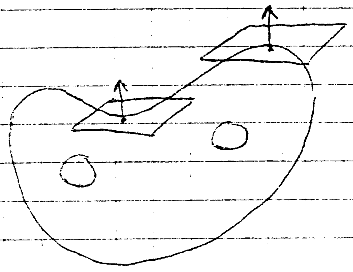
$$\begin{tikzcd} C_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_{\cdot n+1}"] & C_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_{\cdot n}"] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "f_{\cdot n-1}"] \\ C_{n+1}(Y) \arrow[r] & C_n(Y) \arrow[r] & C_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$ $H_n(X; \mathbb{Z})$

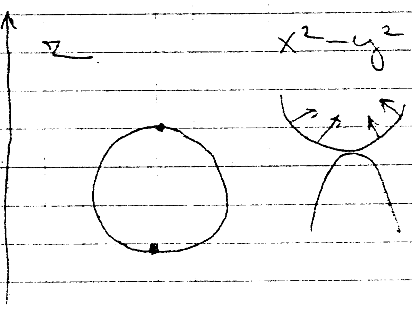
$(f\circ g)_\cdot = f_\cdot \circ g_\cdot \qquad 1_\cdot = 1$

$f_{*n} : H_n(X) \to H_n(Y) \qquad (f\circ g)_* = f_* \circ g_*, 1_* = 1.$

Köv. topologikus invariáns.

15. előadás (diff top)

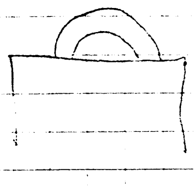


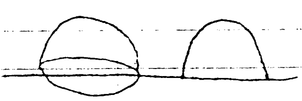


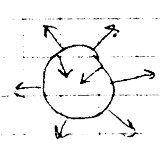
$\mathrm{ind}_p f = -1$

Köv. f Morse fv., $c_\lambda(f)$ a λ-indexű krit. pontok száma, akkor $\sum (-1)^\lambda c_\lambda(f) = \chi(M^n)$.

$\chi(A\cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A\cap B)$

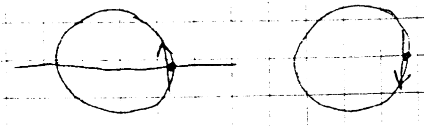






$(x_1, x_2) \to (x_1, x_2) \to (-x_1, x_2) \to (-x_1, -x_2)$

$(x_1, x_2) \to (-x_1, -x_2)$



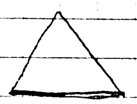
HF-k:

$X_{n,d}$={n láncszemből álló csukló: kör (gráf) konfigurációs ~~konf~~ tere "$\mathbb{R}^d$-ben} egy él rögzített

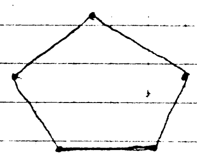
$H_i^{CW}(X_{n,d}) = 2$.

$d = 2$

$n=3$



$n=5$



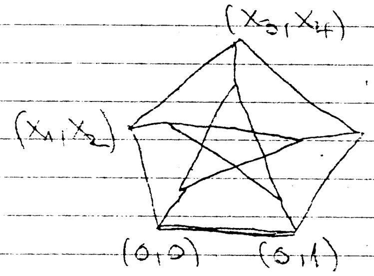
ez a legnehezebb

felület lesz

· önmagát metszheti

$n \overset{?}{>} 5$

$d \geq 3$ egyszerűbb.



$R^{16} \xrightarrow[\text{élhossz}]{} R^{14}$

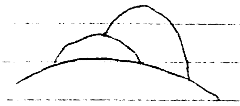
Petersen gráf

Probléma: mi lehet egy pont őse (milyen felület?)

alg. geo.: $g \leq 2^{14}$

$f: M^n \to \mathbb{R}$ jó Morse-fv.

CW-homol



$C^{CW}_{\lambda+1} \longrightarrow C^{CW}_{\lambda} \longrightarrow C^{CW}_{\lambda-1}$

Def rang $H_i(X) = b_i(X)$ = i-edik Betti szám.

Köv. $\underset{\substack{\downarrow \\ \lambda \text{ ind krit.} \\ \text{pontok száma}}}{c_\lambda(f)} \geq b_\lambda(M)$ f Morse-fv.

(Gyenge) Morse egyenlőtlenség.

Pl. $M = A_p$ $b_1(A_p) = 2p$ (láttuk) $\Rightarrow c_1(f) \geq 2p$

Poincaré dualitás

Tétel. M^n zárt, irányítható sokaság. Akkor

$$H^i(M^n, \mathbb{Z}) \approx H_{n-i}(M^n, \mathbb{Z})$$

Eml.

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \frac{\operatorname{Ker}\partial_\lambda}{\operatorname{Im}\partial_{\lambda+1}}}}{H_\lambda} \Longleftarrow C_{\lambda+1} \xrightarrow{\partial_{\lambda+1}} C_\lambda \xrightarrow{\partial_\lambda} C_{\lambda-1}$$

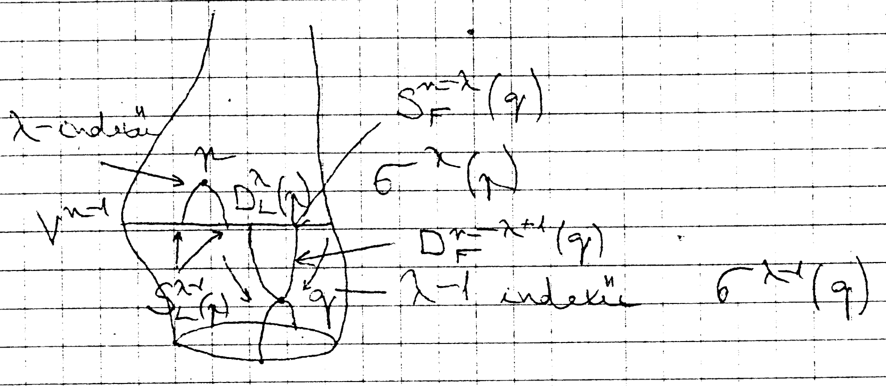
Kohom.: $C^\lambda = \operatorname{Hom}(C_\lambda, \mathbb{Z})$

$$C^{\lambda+1} \xleftarrow{\delta^{\lambda}} C^{\lambda} \xleftarrow{\delta^{\lambda-1}} C^{\lambda-1} \qquad H^{\lambda} = \frac{\operatorname{Ker}\delta^{\lambda}}{\operatorname{Im}\delta^{\lambda-1}}$$

$$\partial(\sigma^{\lambda}) = \sum k_{\alpha}\, \sigma_{\alpha}^{\lambda-1} \qquad (\sigma^{\lambda} \in C_{\lambda})$$

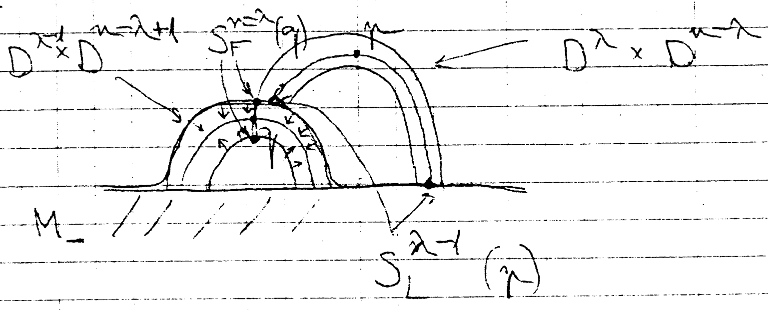
$k_{\alpha} = [\sigma^{\lambda} : \sigma_{\alpha}^{\lambda-1}]$ — incidencia együttható

$$\begin{tikzcd} S^{\lambda-1} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\deg = k_{\alpha}"'] & sk_{\lambda-1}X \arrow[r] & S^{\lambda-1} = sk_{\lambda-1}X \big/ sk_{\lambda-2}X \cup \text{többi } \lambda-1 \text{ cella} \end{tikzcd}$$



Áll $[\sigma^{\lambda}(p) : \sigma^{\lambda-1}(q)] = \underbrace{S_L^{\lambda-1}(p) \cap S_F^{n-\lambda}(q)}_{\text{metszési index } V^{n-1}\text{-ben}}$

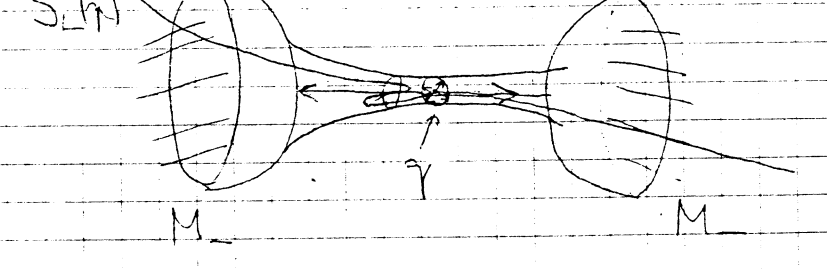
Biz

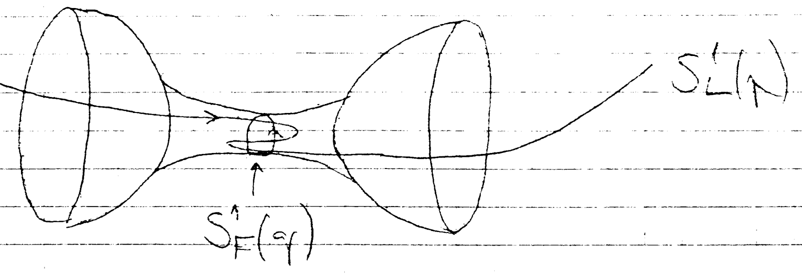


$n=3$, $\lambda=2$

$\lambda-1=1$
$\lambda=2$

q körül kis $(f) = -x^2+y^2+z^2 = -\varepsilon$
paraboloid





Az összetett görbét retraktálva a középpontra a metszésszám éppen egy reg. érték őseinek algebrai száma □

Kohom. klasszikus definíciója:

kohatár$(\Delta^\lambda) = \sum \pm \Delta^{\lambda+1}$

$\partial\Delta^{\lambda+1}$-ben szerepel Δ^λ
előjel u.az

$\downarrow$

kolánckompl. Ennek kohomológiái $= H^\lambda$.

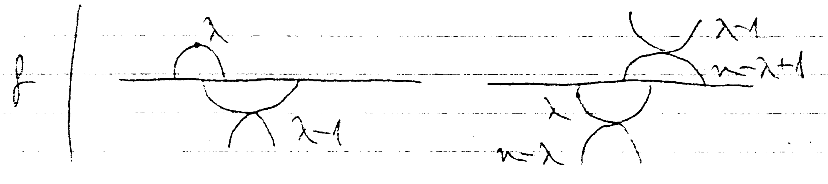
Ez u.az, mint a Morse-os def

<u>Poincaré dualitás biz-a</u>

$$\begin{tikzcd}
\text{f jó Morse fv.-t} \arrow[r, squiggly] & \cdots \arrow[r] & C_\lambda(f) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & C_{\lambda-1}(f) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & \cdots \\
(-f) \quad \text{—||—} \arrow[r, squiggly] & \text{kolánc komplex} \arrow[r] & C^\mu(-f) \arrow[r] & C^{\mu+1}(-f) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

lánc

$\mu = n-\lambda$-ra ugyanaz



f és −f krit. pontja ugyanaz

A két lánckomplexus izomorf. □

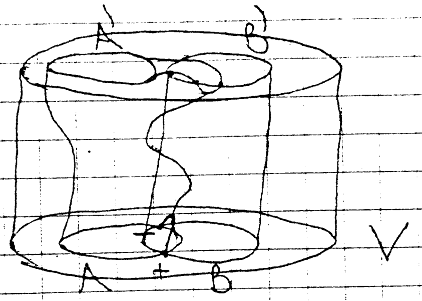
<u>Variációk</u>

- M^n peremes, $\partial M = \partial_1 M \amalg \partial_2 M$ (lehetnek üresek)
  M ir.-ható
  $\Rightarrow H^i(M, \partial_1 M) \approx H_{n-i}(M, \partial_2 M)$.
- ha M tetsz: $H^i(M, \partial_1 M; \mathbb{Z}_2) \approx H_{n-i}(M, \partial_2 M; \mathbb{Z}_2)$.

<u>Áll</u> A metszési index homotopikus inv.

(köv.: eukl. térben az egyiket messze elvíve 0 lesz a metsz. index)

<u>Biz</u>



$$\partial(\mathrm{im}(A\times I)\cap(B\times I))=$$
$$\subset\partial(V\times[0,1])=(A'\cap B')-(A\cap B)=$$
$$=0.$$

□

$$CP^2\not\simeq S^2\vee S^4$$

$$CP^2=CP^1\cup_{\eta}D^4\qquad \eta: S^3\longrightarrow S^2$$

$$\pi_4(CP^2)=0 \quad \text{mert} \quad S^5\xrightarrow{S^1}CP^2$$

$$\pi_4(S^2\vee S^4)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$$

$$S^r\vee S^q\subset S^r\times S^q$$

$$D^{r+q}\underset{S^{r+q-1}}{\cup}S^r\vee S^q=S^r\times S^q$$

D^{r+q} nem változtatja $i<r+q-1$ esetén π_i-t.

$$\pi_n(X\times Y)\approx\pi_n(X)\oplus\pi_n(Y)$$

$$\pi_4(S^2\vee S^4)\approx\pi_4(S^2\times S^4)\approx\underbrace{\pi_4(S^2)}_{\mathbb{Z}_2}\oplus\underbrace{\pi_4(S^4)}_{\mathbb{Z}}$$

□

$$S\eta\not\equiv 0$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,S \arrow[r] & \pi_3(S^2) \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "\approx"] & \overbrace{\pi_4(S^3)}^{\Rightarrow\mathbb{Z}_2} \\
& & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$$H([1_{S^2},1_{S^2}])=2$$

vagy: $SCP^2\not\simeq S^3\vee S^5$

$$\pi_4(S^3)\neq 0$$

<u>16. előadás</u> (alg. top)

HF.

1\) a) $H_i(S^n)$ szing homol

b) $H_i(X^n/X^{n-1})$ —"— , ahol X^n egy CW-kompl. n-váza

2\) $f: X\to Y$ w.h.e. (gyenge homot. ekv.) $\Rightarrow f_*^H$ izom a szing homol.-ban

3\) Hurewicz t.

X k-öf tér $\Rightarrow \pi_{k+1}(X)\approx H_{k+1}(X)$

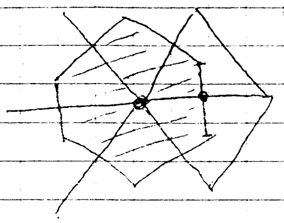
a) X CW kompl és $H=H^{CW}$

b) X tetsz. tér, $H=$ szing. homol.

4.) Poincaré duál. a köv. módon:

Triangulált sokaság

Duális felbontás: poliéderek, a baric felbontásban a baricentrumok csillagai.



Ebből számítjuk ki a kohomológiát (klasszikus módszerrel).

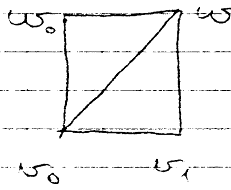
Biz. be: szimplex határának duálisa =

= duális poliéder kohatára.

T. (Homot. invariancia)

$$\left.\begin{array}{l} f, g: X \longrightarrow Y \\ f \cong g \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f_* = g_* \text{ homol-ban, sőt } f_\cdot \cong g_\cdot \text{ homotópok}$$

Biz. $\Delta^n \times I$



$\Delta^n = [v_0, \dots, v_n] = \Delta^n \times 0$

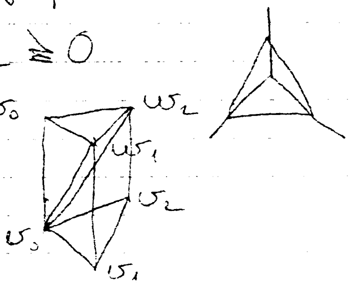
$\Delta^n \times 1 = [w_0, \dots, w_n]$

$\Delta^{n+1}_{(i)} = [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ felbontás

↑ φ_i és φ_{i+1} között

Tk. $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$ — graf φ_i

$\varphi_i : \Delta^n \longrightarrow I$ $\quad \sum t_i = 1, \ t_i \geq 0$

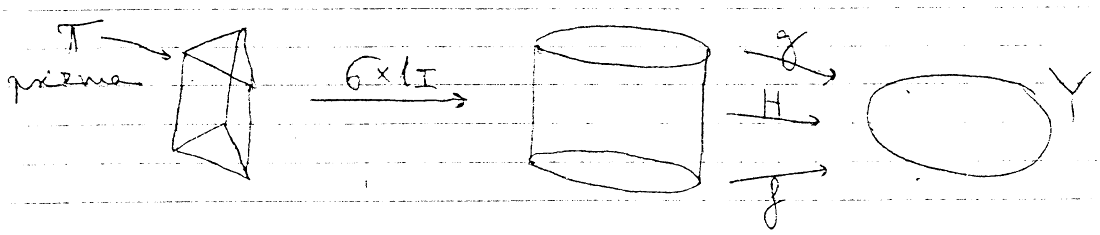


$\varphi_i(t_0, \dots, t_n) = t_{i+1} + \dots + t_n$

$0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n-1} \leq \dots \leq \varphi_0 \leq \varphi_{-1} = 1$

$$P(\underset{\uparrow}{\sigma}) = \sum (-1)^i H \circ (\sigma \times 1_I) \Big|_{\Delta^{n+1}_{(i)}} = [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$$

sing. szimpl.



Áll. $g_\cdot \cong_P f_\cdot$, azaz $\partial P + P \partial = g_\cdot - f_\cdot$

$\partial \Pi \qquad \Pi = \sum (-1)^i \Delta^{n+1}_{(i)}$

$$\partial \Pi = \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] +$$

$[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_j, \ldots, w_n]$

$i = j$-re kiesnek, kivéve

$$[w_0, \ldots, w_n] - [v_0, \ldots, v_n]$$

$i \neq j$-re épp a perem fölé emelt prizmát adják (-1) előjellel.

$$P(\partial \Delta^n) = \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^j [v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_n] +$$

$$+ \sum_{i>j} (-1)^{i-1} (-1)^j [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n]$$

$$\partial \Delta^n = \sum (-1)^j \Delta^n_j = \sum (-1)^j [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n]$$

$$\Delta^n = [v_0, \ldots, v_n].$$

Kijött $\partial \Pi + P\partial =$ teteje $-$ alja.

$$\xrightarrow{H_0(\sigma \times 1_I)} \partial P + P\partial = g_\cdot - f_\cdot \qquad \square$$

interneten: Hatcher, www.math.cornell.edu/~hatcher

Def (X, A) Relatív homológiák

$$C_n(X, A) = C_n(X) / C_n(A)$$

$$\begin{tikzcd} \partial: C_n(X) \arrow[r] & C_{n-1}(X) \\ C_n(A) \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\cup"] & C_{n-1}(A) \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

∂ az indukált.

$$H(C_n(X, A), \partial) = H_n(X, A).$$

Lemma a fedésről

$\mathcal{U}$ nyílt fedése az X top. térnek

$$C_n^{\mathcal{U}}(X) = \{\sigma \text{ sing. szimpl} \mid \operatorname{im} \sigma \subset U_i \in \mathcal{U}\}$$

gen. szabad Abel-csop.

$i: C_n^{\mathcal{U}}(X) \subset C_n(X)$

$i: C_*^{\mathcal{U}} \rightarrow C_*$

1) i izomorfizmust indukál a homológiában

$\Uparrow$ 2) i homot. ekv., azaz $\exists\, \rho: C_*(X) \rightarrow C_*^{\mathcal{U}}(X)$

Biz S baricentrikus finomítás operátor

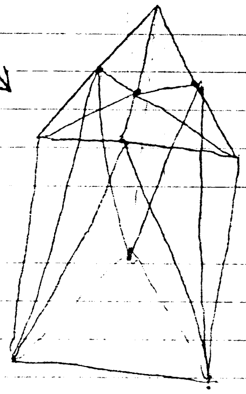
1.) $\forall$ $\overset{n\text{-dim}}{\text{ciklus}}$ egy Δ-komplex leképezésével reprezentálható. (Δ-komplexus: a szimplexek nem csak az oldaluknál csatlakozhatnak)

$$\sum n_j \sigma_j^n \longrightarrow K \xrightarrow{\hphantom{xxxxxx}} X$$
Δ-kompl

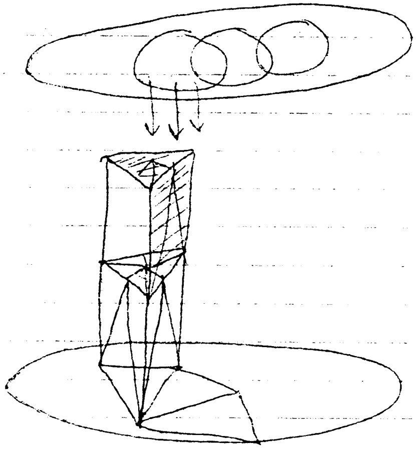
σ_j i-edik lapja $= \sigma_{j'}$ i'-edik lapja

$C^u \hookrightarrow C$ i_* szürj., mert K-t elég sokszor baric felosztva C^u-ba jutunk, és a homol osztály nem változik

i_* inj.: Tfh $\exists$ $(n+1)$-dim lánc, melynek határa C^u-beli ciklus. Finomítunk, C^u-ba jutunk



2)



▤: piros

$S(\Delta)$ = a piros része a Δ fölötti felhőkarcolónak

$C^u \subset C$ $S|_{C^u} = id_{C^u} \Leftrightarrow S \circ i = id$

$C \xrightarrow{S} C^u \overset{i}{\hookrightarrow} C$ $i \circ S \overset{?}{\cong} id$

$D(\Delta)$ = a felhőkarcolók

↖ homot. operátor

$$i\circ j(\underset{\uparrow}{\Delta}) - \Delta = (\partial D + D\partial)(\Delta) = \partial D(\Delta) + D(\partial(\Delta))$$

Δ tetsz. sing. szimplex ☐

T. (Mayer – Vietoris)

$Y = U_1 \cup U_2$ nyíltak

$$H_n(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H_n(U_1) \oplus H_n(U_2) \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{n-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \dots$$

Biz. $C_n(Y)$ $\quad C_n^{\mathcal{U}}(Y)$ $\quad \mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$

$$0 \to C_n(U_1 \cap U_2) \to C_n(U_1) \oplus C_n(U_2) \to C_n^{\mathcal{U}}(Y) \to 0$$

$$\alpha \qquad\qquad j_{1*}(\alpha) \quad j_{2*}(\alpha)$$

$j_{1,2}: U_1 \cap U_2 \hookrightarrow \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \end{matrix}$

Homol. egz. sorozat erre ☐

17. előadás (diff. top.)

HF. 1.) $\exists$-e olyan vektornyaláb, melyből visszahúzható $\forall$ $TM^n \to M^n$ $\quad M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^q$.

2) Adott egy keretezett 1-dim sokaság $\mathbb{R}^3$-ban.
Olvassuk le a neki megfelelő leképezés Hopf-invariánsát.

3) Írjuk le a Whitehead-szorzást a keretezett sokaságok nyelvén.

Def.
H
Pontrjagin konstr.
} hasonlóan

T. Hopf inv. jóldef. és homot. inv.

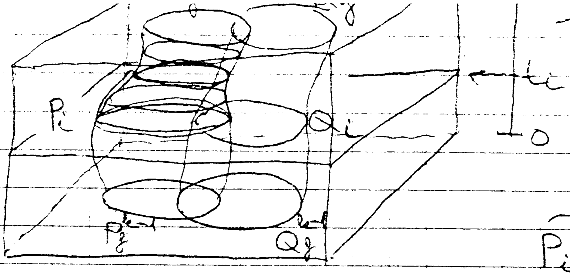
Biz. $f: S^{2k-1} \longrightarrow S^k$

p, q reg. értékek

$$H(f)_{p,q} = \mathrm{lk}(f^{-1}(p), f^{-1}(q))$$

a) $f \simeq_H g$ $\quad p, q$ reg. értéke mindkettőnek

Áll. $\mathrm{lk}(\underset{P_f}{f^{-1}(p)}, \underset{Q_f}{f^{-1}(q)}) = \mathrm{lk}(\underset{P_g}{g^{-1}(p)}, \underset{Q_g}{g^{-1}(q)})$



$0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$

reg. értékek

$\widetilde{P_{i-1}P_{i+1}} \xrightarrow{pr_i} t_i$-szintre,

koordinátás vetítés

diszjunkt Q_i-től

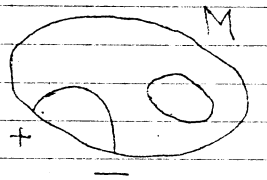
$\widetilde{Q_{i-1}Q_{i+1}} \longrightarrow t_i$-szintre diszj. P_i-től

$(x,y) \longrightarrow \frac{x-y}{\|x-y\|}$

$P_i^{k-1} \times Q_i^{k-1} \longrightarrow S^{2k-2}$

$\underline{\mathcal{L}}$ $\exists M^{n+1} = V^n$ $\quad M^{n+1} \xrightarrow{F} S^n \quad \deg(F|_{V^n}) = 0$

<u>Biz.</u>



□

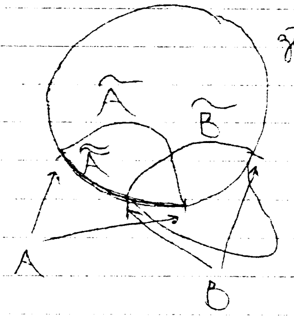
Alk. a $\mathcal{L}$-t: $M^{n+1} = \widetilde{P_{i-1}P_{i+1}} \times Q_i$,

$f(x,y) = \frac{pr_i(x) - pr_i(y)}{\|pr_i(x) - pr_i(y)\|}$

$lk(P_i, Q_i)$ nem függ i-től

<u>Biz₂</u> hurkolódás másik def.-jával

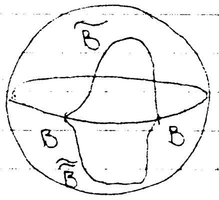
<u>Áll.</u>



gömb A, B hurkolódik $a+b = n-1$

$lk(A,B) = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ alg.

<u>Biz.</u>



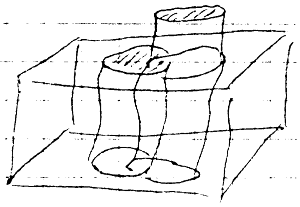
$(\tilde{A} \cup -\tilde{\tilde{A}}) \cap (\tilde{B} \cup \tilde{\tilde{B}}) = 0$

$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{\tilde{A}} \cap \tilde{B}$

$\overset{\text{def.}}{\parallel}$

$lk(A,B)$

□



lezárjuk mindkettőt egy hártyával, és alk. az állítást.

b) p-ben, q-ban lok. konst. : $p \longrightarrow p'$ diffeotópia

c) f, g homotóp, $p \neq q$ közös reg. értéke $f \overset{\sim}{=}_H g$

Sard l. miatt van p-hez közel reg. értéke f, g, H-nak

d) f p, q p', q' $\exists \Psi_t$ diffeotópia $\Psi_t : S^k \to S^k$, $\Psi_0 = id$

□

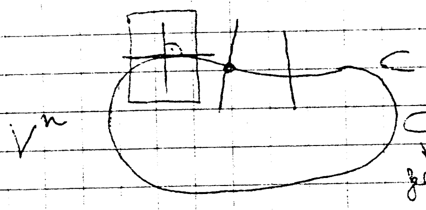
Tétel (Pontrjagin)

$$Emb^{fr}(n,k) \underset{\alpha}{\overset{\Theta}{\rightleftarrows}} \approx \Pi_{n+k}(S^k)$$

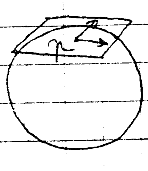
Θ def: $f : S^{n+k} \to S^k$

p reg. érték

$V^n = f^{-1}(p)$



$\subset S^{n+k}$
$\cup$
$\subset R^{n+k}$
↓
feltehető



V érintőtere 1 pontba megy $\Rightarrow$ az ortog. kiegészítő izomorfan képeződik le. Ha visszahúzzuk a p-ben adott bázist $\rightsquigarrow$ trivializáló keretezés V-nek

$E(V)$-normálnyaláb $\xrightarrow{R^k} V \subset R^{n+k}$ fibrálás

$D_\varepsilon(V) \xrightarrow{D^k} V$

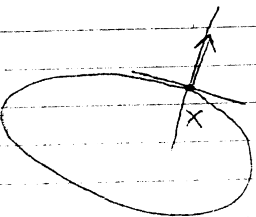
$E(V)$: a normálnyaláb totális tere

$E \xrightarrow{F} B$

≀ diffeomorf

V csöves környezete

$E(V) \longrightarrow R^{n+k}$

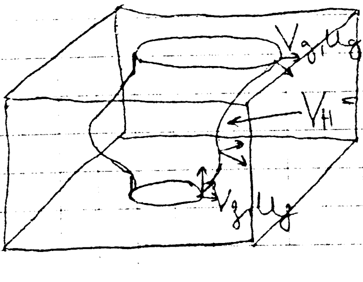


HF: ezt belátni

Biz a) $f, g : S^{n+k} \to S^k$ homot. $f \overset{\sim}{=}_H g$

p reg. értéke mindhármunak

$\underbrace{u_1, \ldots, u_k}_{u}$ a keretezés



$V_H = H^{-1}(p), U_H$ $(V_g, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{keretezés}}}{U_g}) \longleftarrow f, p$

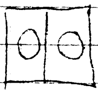
b) p-ben lok. konst. Diffeotópia $p \to p'$

c) f, g közös reg. értéke H-nak

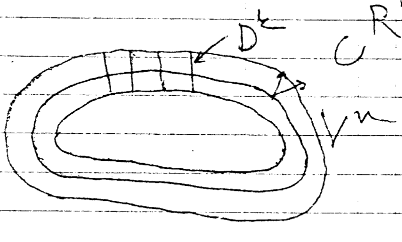
d) f-nek két reg. értéke p és p'.

$\Psi_t : S^k \to S^k$ $\Psi_0 = id$, $\Psi_1(p) = p'$.

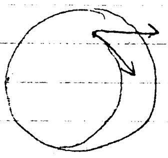
f, $g = \Psi_1 \circ f$ alk. c)-t. □

Θ homomorfizmus 

α def



$\subset \mathbb{R}^{n+k} \subset S^{n+k} \longrightarrow S^k \ni p$

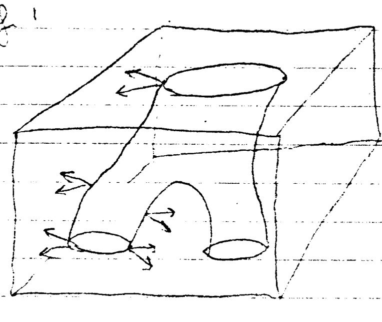


V^n-t p-be képezzük, úgy, hogy a vektorok a p-beli bázisra képződnek
a csőszerű környezet D^k szálait a bázisnak megfelelően leképezzük S^k-ra

$$\begin{tikzcd} V^k \times D^k \arrow[r] \arrow[dr] & D^k \arrow[d] \\ & D^k/\partial D^k = S^k \end{tikzcd}$$

Az összes többi pont a p-vel átellenesbe megy

jóldef.:



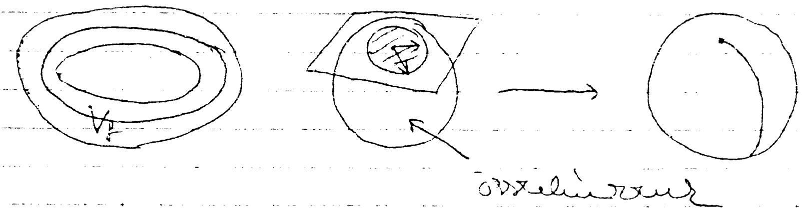
$S^{n+k} \times I \longrightarrow S^k$, erre az előző konstr.

koordinálása a leképezések homotópok

$\Theta \circ \alpha = id$ triv

$\alpha \circ \Theta = id$?

$f : S^{n+k} \longrightarrow S^k \xrightarrow{\Theta} (V_f, U_f) \longrightarrow \tilde{f}$ lekép



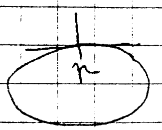
összehúzzuk egy pontba, ez nem változtatja a homotópia osztályt. □

$\pi_3(S^2) = \mathrm{Emb}^{fr}(1,2)$ Hopf inv.?

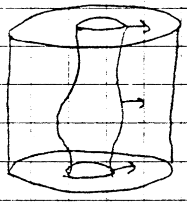
Áll $\mathrm{Emb}^{\circ}(n, M\ \ ) \longleftrightarrow [M^{-}, O^{-}]$

M zárt $(n+k)$-dim sokaság

$V^n \hookrightarrow M^{n+k}$



T_pM

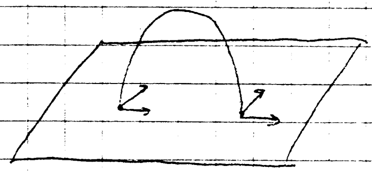


$M \times [0,1]$

kobordizmus osztályok

Nincs művelet, mert nincs annak értelme, hogy messzire elvisszük két keretezett sokaságot.

$\pi_n(S^n) = \mathrm{Emb}^{fr}(0, n)$



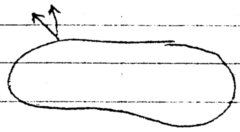
véges sok pont mikor 0 kobordáns?

∀ pontban előjel a bázis irányításának megfelelően. Ez izomorfizmus $\mathbb{Z}$-vel.

$$\mathrm{Emb}^{fr}(0, n) \xrightarrow[(+)-(-)]{} \mathbb{Z}$$

~~Áll~~ $\pi_{n+1}(S^n)$ $n \geq 3$

Áll ∀ osztály $\mathrm{Emb}^{fr}(n, 2)$-ban reprezentálható öf. sokasággal (HF)

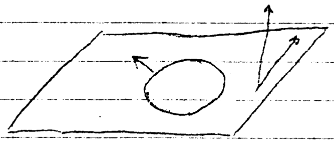


$\subset R^{n+1}$

keretezett görbe

$n+1 \geq 4$ miatt bármely két görbe-beágyazás izotóp

Feltehető, hogy a görbe egy R^2-beli körrel reprezentált.



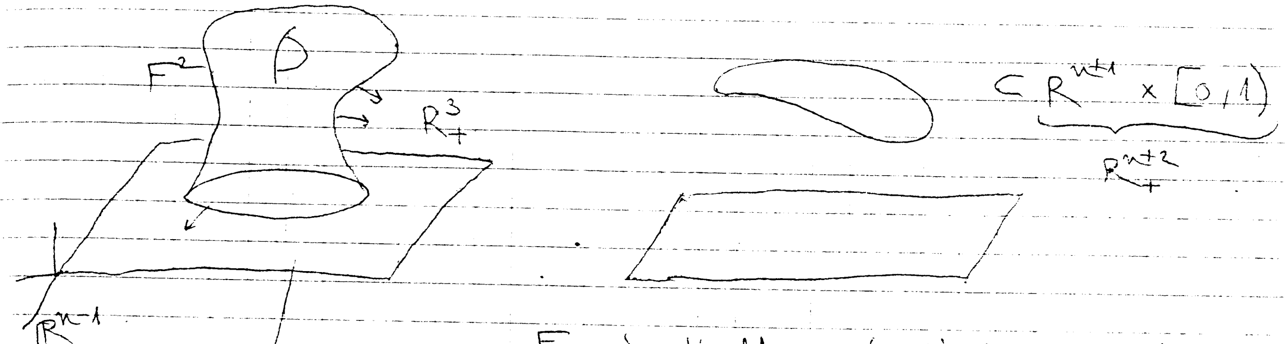
$\longrightarrow \pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$, mert $n \geq 3$ miatt

$SO(3) = RP^3$ $\quad$ $SO(4) \xrightarrow{SO(3)} S^3 \Rightarrow \pi_1(SO(3)) = \pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$

$SO(5) \xrightarrow{SO(4)} S^4$ …

Az $S^1 \subset R^2$ körnek van egy standard keretezése, ill. egy, az izotópia által indukált keretezése. Ez a kettő $SO(n)$ egy elemével egymásba vihető.

Ha 0-kobordáns az elem, akkor a hozzárendelt elem $\pi_1(SO(n))$-ben 0.



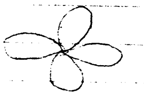
F_2 irányított a tükrözés miatt.

mivel elég nagy dimenzióban vagyunk, ezért a kobordizmust adó felületet bedeformálható R^3_+-ba standard módon

Az F^2-n is ∃ két tükrözés:
1) standard
2) amit határol, a gömb tükrözése

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & SO(n) \\ F^2 \arrow[u, phantom, "\cap" description] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

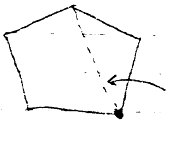
F^2 pereme kommutátorok szorzata



$\Rightarrow$ S^1 képének homot. osztálya = kommutátorok szorzata $\Rightarrow$ $= 0$.

HF befejezni

Útmutatás

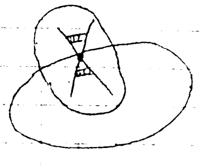


ez a távolság Morse-fv.

Banchoff t.: $f: M^2 \looparrowright R^3$ $t(f) \equiv \chi(M^2)$ mod 2

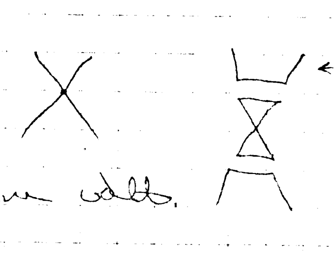
Biz Boy felület: $RP^2 \looparrowright R^3$ 1 db 3-szoros pont.

1) $t(f) = 0 \Rightarrow \chi(M^2) =$ ps.



nem tud 90°-ot fordulni

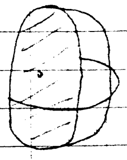
műtét:



az Euler-karakterisztikája nem vált.

2) Ált. eset:

$RP^2 \propto R^3 \subset S^3$



D^3-at kidobunk

a maradékot összeragasztjuk

~~RP~~ $M^2 \subset S^3$

Mindig 1-et vált. az Euler karakt. paritása

18. előadás (alg. top)

HF.

1) a) C véges lánckompl. szabad Abel-csop-ból

c_i = rank C_i, b_i = rank H_i

Áll $\sum (-1)^i c_i = \sum (-1)^i b_i$

b) X véges CW-komplexus $\Rightarrow \chi(X)$ top., sőt homot. inv.

2) $f: C \to C$ lánckompl. lekép.

$\sum (-1)^i \mathrm{tr}\, f_{\circ i} = \sum (-1)^i \mathrm{tr}\, f_{* i} = L(f)$ f Lefschetz száma

egy bázisban felírva a diag. elemek összege

3) a) $f: X \to X$ véges szimpl. kompl.

$L(f) \neq 0 \Rightarrow f$-nek $\exists$ fixpontja

b) $X \cong S^{2k}$ $f: X \to X$, $f \cong id \Rightarrow f$-nek $\exists$ fixpontja

Lemma a fedésről

$\mathcal{U}$ nyílt fedése X-nek. $C_n^{\mathcal{U}} = \{\sigma \in C_n(X) \mid \forall$ szimplexe a σ-nak benne van valamelyik $\mathcal{U}$-beli nyíltban$\}$

$H_n^{\mathcal{U}}(X) = H(C_n^{\mathcal{U}}, \partial)$

Áll 1) $H_n^{\mathcal{U}}(X) \approx H_n(X)$

2) $\exists\ \rho: C_n(X) \overset{i}{\rightleftarrows} C_n^{\mathcal{U}}(X)$ def. retr. $\rho \circ i = id$
$i \circ \rho \cong id$

Biz Y konvex $\subset R^q$

Def ~~L(Y)~~ $LC_n(Y)$ lineáris n-láncok $= L(\Delta^n \to Y)$
$\uparrow$ lin. leképezések

$S: LC_n(Y) \longrightarrow LC_n(Y)$ baric. finomítás

$b \in Y$ $\quad b: LC_n(Y) \longrightarrow LC_{n+1}(Y)$

$b([w_0, \dots, w_n]) = [b, w_0, \dots, w_n]$

Megj. $\partial b([w_0, \dots, w_n]) = [w_0, \dots, w_n] - b(\partial[w_0, \dots, w_n])$

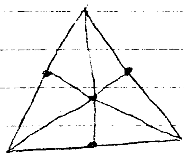
$\partial b(\underset{\overset{\uparrow}{\text{lánc}}}{\kappa}) = \kappa - b(\partial\kappa)$

$\partial b + b\partial = 1 - 0$ (homot. a 0 és az id között)
konvex test pontrahúzható

$n = 0 \quad S([w_0]) = [w_0]$

$\lambda: \Delta^n \to Y \in LC_n(Y)$

b_λ = súlypont képe



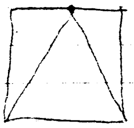
$S(\lambda) = b_\lambda(S(\partial\lambda))$

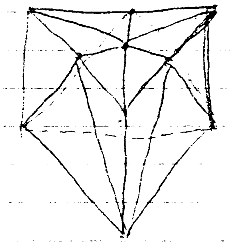
Áll. $S\partial = \partial S$

Bz $\partial S(\lambda) = \partial b_\lambda(S\partial\lambda) = S\partial\lambda - \underbrace{b_\lambda(\overset{\leftrightarrow}{\partial S}\partial\lambda)}_{\substack{\text{indukció} \\ = 0 \text{ mert } \partial\partial = 0}}$ □

$LC_{-1}(Y) = \{[\emptyset]\} \qquad \partial[w_0] = [\emptyset]$

$T: LC_n(Y) \longrightarrow LC_{n+1}(Y)$ homot. S és id között





$T\lambda \overset{\text{def}}{=} b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)$

$T([w_0]) = [b_\lambda, w_0]$

Áll. $\partial T\lambda = \lambda - T\partial\lambda - S\lambda$

Biz $\partial T\lambda = \partial(b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)) = \lambda - T\partial\lambda -$

$- b_\lambda(\partial(\lambda - T\partial\lambda)) \underset{\uparrow}{=} \lambda - T\partial\lambda - \underbrace{b_\lambda(S\partial\lambda}_{S\lambda \text{ def szerint}} + \cancel{T\partial\partial\lambda}) =$

$\partial T\partial\lambda = \partial\lambda - T\partial\partial\lambda - S\partial\lambda$ indukció miatt

$= \lambda - T\partial\lambda - S\lambda$ □

Tetszőleges láncokon S és T

$S: C_nX \longrightarrow C_nX$

$S(\sigma) \overset{def}{=} \sigma_\cdot S(\Delta^n)$

$\nearrow$ a láncon indukált leképezés

$\partial S\sigma = \partial\sigma_\cdot S(\Delta^n) = \sigma_\cdot \partial S(\Delta^n) = \sigma_\cdot S\left(\sum(-1)^i \Delta_i^{n-1}\right) =$

$= \sum(-1)^i \sigma_\cdot S\Delta_i^{n-1} = \sum_i(-1)^i S\left(\sigma|_{\Delta_i^{n-1}}\right) = S\left(\sum(-1)^i \sigma|_{\Delta_i^{n-1}}\right) =$

$= S\partial\sigma.$

<u>Áll</u> $\partial T\sigma = \sigma - T\partial\sigma - S\sigma \qquad \sigma \in C_n(X)$

<u>Áll</u> Az iterált baric. felb. homot. az identitással.

<u>Biz</u> $D_m = \sum_{i=0}^{m-1} TS^i$ homot. 1 és S^m között.

$\partial D_m + D_m\partial = \sum \partial TS^i + TS^i\partial =$

$= \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{(\partial T + T\partial)}_{1-S} S^i = 1 - S^m.$ □

$\exists$ σ egy szing. szimplex

$\exists\, m \quad S^m\sigma \in C_*^{\mathcal{U}}$

$m(\sigma) = \min\{m \mid S^m\sigma \in C_*^{\mathcal{U}}\}$

$D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma$

$\partial D(\sigma) + D\partial(\sigma) = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma - D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) + D\partial\sigma$

$\Uparrow$

$\partial D\sigma = \partial D_{m(\sigma)}\sigma = -D_{m(\sigma)}\partial\sigma + \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma$

$\partial D(\sigma) + D\partial(\sigma) = \sigma - \underbrace{\left(S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D\partial\sigma\right)}_{\rho(\sigma)}$ (a piros rész)

Kell: $\rho(\sigma) \in C_*^{\mathcal{U}} \qquad C_*^{\mathcal{U}}$

$(D_{m(\sigma)} - D)(\partial\sigma) = \cancel{\left(\sum_j \sum_{i>m(\sigma)} TS^i\left(\sigma_j^{n-1}\right)\right)}$

$= \sum_j \underbrace{\left(D_{m(\sigma)} - D_{m(\sigma_j)}\right)}_{\sum TS^i(\sigma_j)} \left(\underset{\text{lap}}{\sigma_j}\right) = \sum_j \sum_{i=m(\sigma_j)}^{m(\sigma)-1} TS^i(\sigma_j).$ □

Kohom. Mayer - Vietoris

$$H^n(U_1\cap U_2) \leftarrow H^n(U_1)\oplus H^n(U_2) \leftarrow H^n(X) \leftarrow$$

$$\leftarrow H^{n-1}(U_1\cap U_2)$$

<u>Kivágási tétel</u>

1) $Z\subset A\subset X$, $\overline{Z}\subset \operatorname{int} A$

$\Rightarrow H_n(X\setminus Z, A\setminus Z) \to H_n(X,A)$ izom $\forall n$-re

$C_n(X,A) = C_n(X)/C_n(A)$

2) $A,B\subset X$, $\operatorname{int}A\cup \operatorname{int}B = X$

$H_n(B, A\cap B) \longrightarrow H_n(X,A)$ izom $\forall n$-re

<u>Ekv.</u> $Z = X\setminus B$ $\quad B = X\setminus Z$

$\overline{Z}\subset \operatorname{int}A \Leftrightarrow X = \operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B$ $\quad (X\setminus \operatorname{int}B = \overline{Z})$

<u>Biz.</u> 2 vált

nyílt

$\mathcal{U} = \{A,B\}$

$C_n^{\mathcal{U}}(X) = C_n(A+B) =$ A-beli láncok + B-beli láncok

$$\left.\begin{array}{c}\rho : C_n(X) \overset{i}{\leftrightarrows} C_n^{\mathcal{U}}(X)\\ \cup \qquad\qquad \cup\\ C_n(A) \overset{i}{\leftrightarrows} C_n^{\mathcal{U}}(A)\end{array}\right\} \bar{\rho} : C_n(X)/C_n(A) \overset{\bar{i}}{\leftrightarrows} C_n^{\mathcal{U}}(X)/C_n^{\mathcal{U}}(A) =$$

$= C_n(B)/C_n(A\cap B)$ homot. ekv.

$(\bar{i})^* =$ izom

<u>Köv.</u> $H_n(X,A)\approx \widetilde{H}_n(X/A)$ ha (X,A) Borsuk pár

(pl. (X,A) CW-kompl)

$\widetilde{H}_n(Y)$ redukált homol.

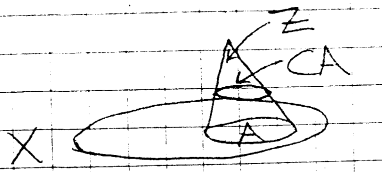
$$\widetilde{H}_n(Y) = \begin{cases} H_n(Y) & \text{ha } n>0\\ \mathbb{Z}^{\#\text{ívöf. komp. száma}-1} \end{cases}$$

$Y \xrightarrow{f} *$ $\qquad \operatorname{Ker} f_{*n} = \widetilde{H}_n(Y)$.

$\exists \Downarrow$

ráképezés az f_{*n} $\quad$ kivágás $Z = \frac{1}{2}CA$-val

<u>Biz.</u> $H_n(X,A) \approx H_n(X\cup CA, CA)$



$$H_n(CA) \to H_n(X \cup CA) \xrightarrow{\cong} H_n(X \cup CA, CA) \to H_{n-1}(CA) \to$$

$$\overset{\shortparallel}{0} \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{0}$$

$$H_n(X \cup CA, CA) \approx \widetilde{H}_n(X \cup CA) = \widetilde{H}_n(X / A)$$

Borsuk pár: pontrahúzható alteret pontra húzhatunk

☐

Köv. $\widetilde{H}_{n+1}(SX) \approx \widetilde{H}_n(X)$

Biz. $H_i(CX, X) \underset{\approx}{\xrightarrow{\partial}} \widetilde{H}_{i-1}(X)$

$$\widetilde{H}_i(CX / X) = \widetilde{H}_i(SX)$$

☐

Köv. $\widetilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$

Biz. $\widetilde{H}_i(S^n) \approx \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \approx \ldots \approx \widetilde{H}_{i-n}(S_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$

☐

Köv. X CW kompl

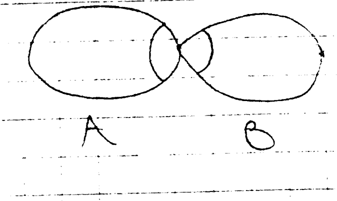
$$\widetilde{H}_i(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\#\, n\text{-cellák}} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

$\Delta_n X$

Biz. $\widetilde{H}_i(X^n, X^{n-1}) \approx \widetilde{H}_i(X^n / X^{n-1}) = \widetilde{H}_i(\bigvee_\alpha S^n_\alpha)$

Áll. $\widetilde{H}_i(A \vee B) \approx \widetilde{H}_i(A) \oplus \widetilde{H}_i(B)$

M-V-ből



A' nyílt $\supset A$

B' nyílt $\supset B$

def retr.

$$H_n(\underbrace{A' \cap B'}_{\simeq *}) \to H_n(A') \oplus H_n(B') \to H_n(A' \cup B') \to$$

$$\to H_{n-1}(\underbrace{A' \cap B'}_{\simeq *})$$

19. előadás (diff top)

HF.

1) Banchoff tétel ált. generikus leképezésekre

a) megsejteni
b) bizonyítani

($M^n \to R^{2n}$ körül az immerziók)

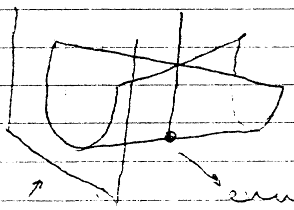
$M^2 \to R^3$: generikus leképezés: véges sok ponton kívül immerzió, a szinguláris pontokban Whitney esernyő.

(x,y) (u,v,w)

$(x,y,0)$ alakra hozható immerziónál

$\xrightarrow{W \text{ esernyő}}$ $u = x^2$, $v = xy$, $w = y$

$(x,y) \longmapsto (x^2, xy, y)$



ennek az élében nem immerzió

parabola

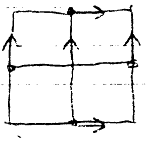
2) $\mathrm{Emb}^{fr}(2,k)$ k nagy

S^2-vel realizálható kobordizmusosztályok?
csak a nulla

3) a) $\mathrm{Imm}^{SO}(n,1) \approx \pi^S(n)$ $(= \pi_{n+N}(S^N))$

b) $\mathrm{Imm}^{fr}(n,k) \approx \pi^S(n)$ $\forall k$-ra

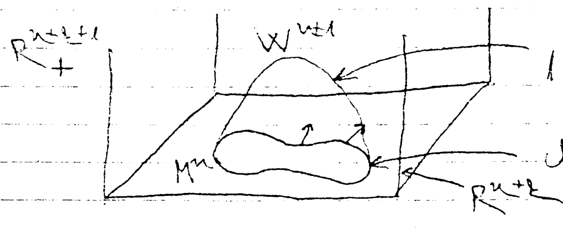
Kérdés 1)



$D^k \times D^k$

$\partial(D^k \times D^k) \supset$ kereszt pereme $= S^{k-1} \amalg S^{k-1}$ (term. bázisozással). Mit reprezentál ez?

2)



1 db kettőspontja van

Mit repr.?

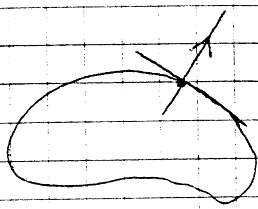
Csőszerű környezet

$i: M^n \hookrightarrow R^q$ zárt

$\nu = \nu_i$ normálnyalábok:

$$E(\nu) = \{(u,v) : \exists p \in M \quad u = i(p) \text{ és } v \perp T_{i(p)}M\} \xrightarrow{\mathbb{R}^k} M$$

↑ totális tér sokaság



$$\phi' : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$$

$$(x,y) \mapsto x+y$$

$$\phi'|_{E(\nu)} = \phi : E(\nu) \to \mathbb{R}^q$$

$$\phi|_{v=0} = i$$

ϕ max. rangú $\forall$ $v = 0$ pontban:

$$d\left(\phi|_{0\text{-szelés}}\right) = di$$

$\phi|_{\substack{\text{fibrum}\\ u=\text{const}}}$ = lineáris a $T_{i(p)}M^\perp$-re

$\Rightarrow d\phi$ max. rangú a $v = 0$ pontokban

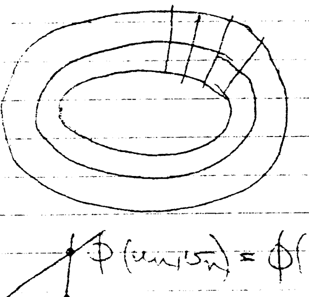
Köv.: lok. diffeom. a ϕ a 0-szelés pontjainak környezetében

All. $\exists \varepsilon > 0$ $\phi|_{\{v < \varepsilon\} = D_\varepsilon(\nu)}$ ~~$E(\xi)$~~ diffeom.

Biz. Tfh $\forall$ n-re $\exists$ (u_n, v_n) és (u_n', v_n')

$\phi(u_n, v_n) = \phi(u_n', v_n')$ $\varepsilon = \frac{1}{n}$-re ellenpélda!

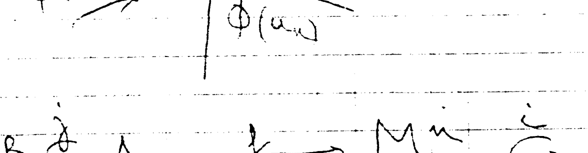
$\|v_n\| \le \frac{1}{n}$, $\|v_n'\| \le \frac{1}{n}$



$\exists$ $(u_{n_k}, \overset{\text{'' ''} \to 0}{v_{n_k}})$ $(u'_{n_k}, \overset{\text{'' ''} \to 0}{v'_{n_k}})$

$\downarrow$ $\downarrow$

$x_0 \in M \ni x_0'$

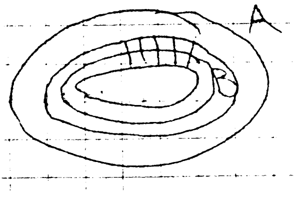


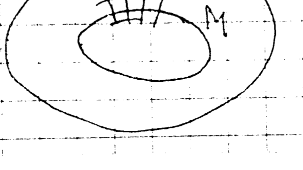
$\Rightarrow x_0 = x_0'$.

□

$$B \dot{\subset} A \xrightarrow{f} M^n \overset{i}{\subset} N^q$$

$\overset{\shortparallel}{f}{}^{-1}(M)$





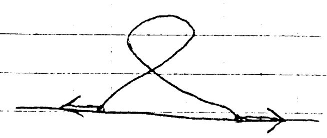
$\nu_j = (f|_B)^* \nu_i$

$$\underset{\begin{array}{c}\| \\ T(B\subset A)\end{array}}{\underline{D(\nu_j)}} = (f|_B)^* \underset{\begin{array}{c}\| \\ T(M\subset N)\end{array}}{D(\nu_i)}$$

Válaszok a kérdésekre:

1) $[id_{S^{k-1}}, id_{S^{k-1}}]$

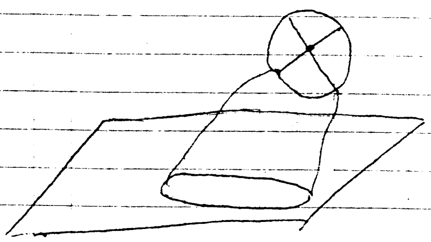
2)



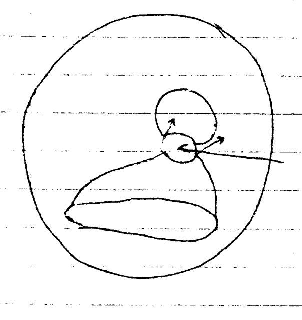
Kettőspontok dimenziója: $n+1-k=0$

$\Rightarrow n=k-1$

$M^{k-1} \looparrowright R^{2k-1}$



R^{n+k} helyett S^{n+k}, R_+^{n+k+1} helyett D^{n+k+1}



a kettőspont egy kis környezetét kidobva $S^{n+k}\times[0,1]$

~~tehát~~ ez egy kobordizmus M és  között.

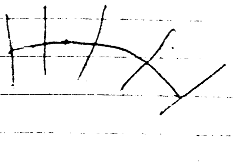
Áll. M^{k-1} keretezett $\subset R^{2k-1}$

$\exists$ ker. kobord. R_+^{2k}-ban 1 db kettősponttal (transzv.)

$\Rightarrow [(M^{k-1}, u)] = \pm[id_{S^{k-1}}, id_{S^{k-1}}]$ Biz: ábra

a keretezés megfelelő:

Megj. D^n-en homotópia erejéig egyetlen keretezés van



D^n-fölött adott egy (triviális) nyaláb.

$\forall$ két keretezés egy B bázis fölött

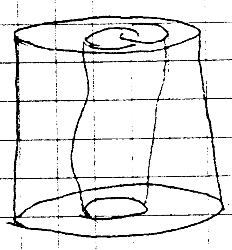
(ha adott $\xi \xrightarrow{R^n} B$) $B \to SO(n)$ leképezésben tér el.

$(GL(n,\mathbb{R}))$

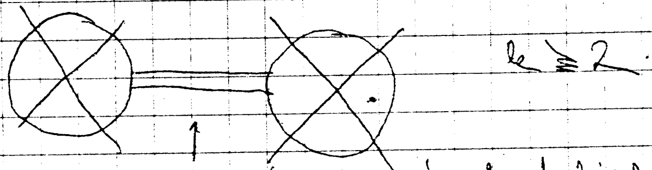
D^n-et homot erejéig egyértelműen lehet $SO(n)$-be képezni.

$\Rightarrow D^n$ fölött homot. erejéig egyetlen triviál van

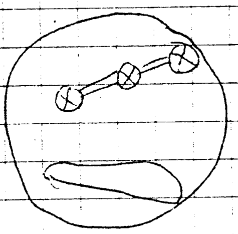
$S^{n+k} \times [0,1]$



Ha több kettőspont van.



összekötjük és kidobjuk

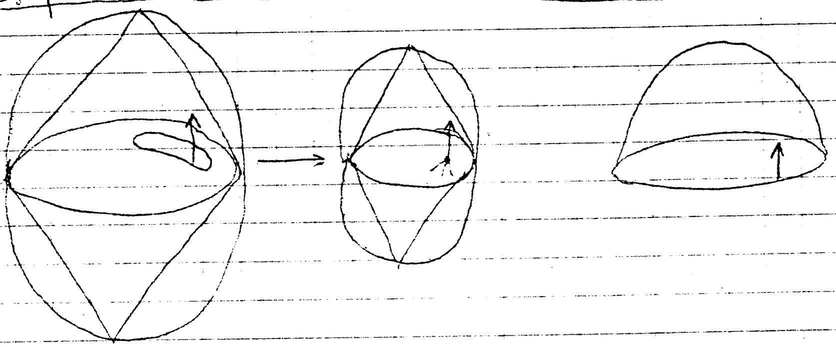


összeadódnak az osztályok

véges sok kettőspont: $[(M^{k-1}, u)] = \sum \pm [id_{S^{k-1}}, id_{S^{k-1}}]$

kettőspontokra

Szuszpenzió leírása a tükrözött osztályokkal.



$M^n \hookrightarrow R^{n+k}$

$u_1, \dots, u_k$

$\cap$

R^{n+k+1}

$u_1, \dots, u_k, e_{n+k+1}$

$$\mathrm{Emb}^{fr}(n,k) \longrightarrow \mathrm{Emb}^{fr}(n,k+1)$$

$$(M, u_1, \dots, u_k) \longmapsto (M, u_1, \dots, u_k, e_{n+k+1})$$

$$\{[id_{S^{k-1}}, id_{S^{k-1}}]\} \to \pi_{2k+1}(S^{k+1}) \xrightarrow[epi]{} \pi_{2k+2}(S^{k+2}) \xrightarrow{\approx}$$

$$\shortparallel$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathrm{Emb}^{fr}(k,k+1)} \xrightarrow{S} \mathrm{Emb}^{fr}(k,k+2) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Emb}^{fr}(k,k+3)$$

ilyen nagy dimenzióban izotóp (tükrözés nélkül) | ∀ 2 keretezés

csak ilyen keretezéseket kapunk, ahol az egyik tüske függőleges

Összenyomási tétel

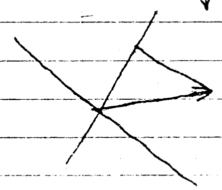
$M^n \overset{i}{\hookrightarrow} Q^q \times R^1 \xrightarrow{T} R^1 \quad q > n$

zárt

α normálmező

függőleges

nem felt. ⊥



∃ Ψ_t izotópia, melyre $\Psi_0 = i$ és

$\Psi_1(M), \Psi_1(\alpha) = (M, \uparrow)$

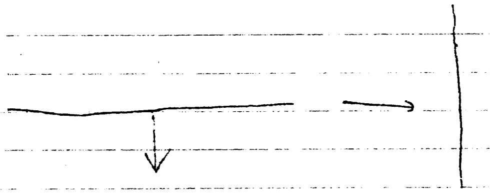
függőleges

Biz. 1) Feltehető $\alpha \perp TM$

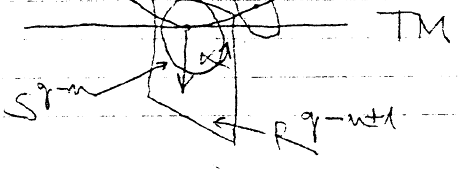
2) $T \circ i$ Morse

3) Felt, hogy $\alpha \neq \downarrow$ mindenhol.

$\alpha = \downarrow$ csak f kritikus pontjaiban lehet



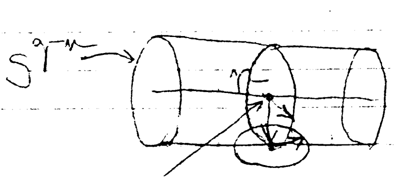
Egy ilyen kritikus pont körül perturbáljuk az α-t, hogy ez ne álljon elő.



p = krit. pont U_p kis környezet = golyó

$U_p \times S^{q-n}$

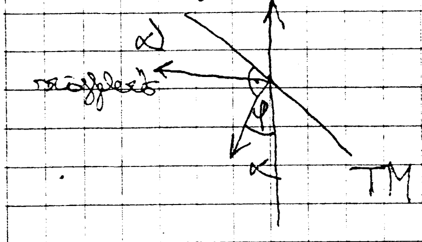
gömbnyaláb



U_p elforgatjuk az α-t

$\alpha(p)$ környezetében vektormező, ami S^{q-n}-et érinti, $\alpha(p)$-ben nem nulla, kis környezeten körül nulla. ($TS(F_i)$-t érintő vektormező)

4.) Felforgatás



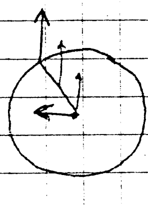
$\varphi = \sphericalangle(\alpha, \downarrow) > \delta > 0$

Elforg. α-t az (α, ↑) síkjában legf. $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$-vel, ↑ felé. $\rightsquigarrow \alpha'$

(TM-be nem megyünk bele)

α' vetülete ↑-re pozitív $> \delta_0$ (kompaktság)

α'-t terjesszük ki $Q \times R^1$-re úgy, hogy ε-környezetén kívül az M-nek ↑. Legyen ez v.



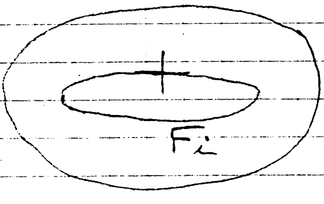
$\exists \Psi_t$ a v-hez tartozó diffeom. csoport.

Megj. véges időn belül M elhagyja az ε-környezetét az eredeti beágy.-nak.

$t = \frac{\varepsilon}{\delta_0}$ jó (ennyi idő alatt kijut) □

20. előadás (alg. top.)

HF. $f: M^n \to R$ Bott–Morse fv., ha a krit. pontok F_i zárt sokaság $\subset M^n$. i-indexű krit. sokaság F_i



F_i-re transzv. irányban $\sum \pm x_i^2$

Ind = −ok száma.

$f: M^n \to R$ Morse:

$\chi(M) = \sum (-1)^i c_i$ c_i = i-indexű krit. pontok

Áll: $\chi(M) = \sum (-1)^i \chi(F_i)$.

(M^n egy mech. rendszer konfig. tere, f energiafv., nem lehet kicsit perturbálni úgy, hogy Morse-fv. legyen)

1.) Relatív Mayer–Vietoris

(K_1, L_1) (K_2, L_2)

$$H_q(K_1 \cap K_2, L_1 \cap L_2) \longrightarrow H_q(K_1, L_1) \oplus H_q(K_2, L_2) \longrightarrow$$

$$\to H_q(K_1 \cup K_2, L_1 \cup L_2) \to H_{q-1}(K_1 \cap K_2, L_1 \cap L_2) \longrightarrow$$

(**Kör**: itt is M-V. igaz redukált homol.:

$\widetilde{H}_n(X) \approx H_n(X,*)$)

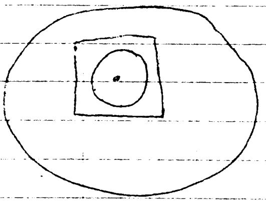
3.) M^n zárt (ir.) sok.

$f: M^n \to M^n$ véges sok fixpont

$$L(f) = \sum_{P_i \in \mathrm{Fix}(f)} \mathrm{ind}_{P_i} f$$

$\downarrow$

$\deg \frac{x-f(x)}{\| \quad \|} : S^{n-1} \to S^{n-1}$



4.) ~~$M^n \hookrightarrow R^q$) ∃ vektornyaláb n-dis fibrummal~~

$k>0$ Fix ∀ véges CW-kompl, dim $\leq k$, $\overbrace{}^{}$ mi beágy R^{2k+1}-be

∀ n-dim vektornyaláb fölöttük

∃ vektornyaláb n-dim fibrummal, melyből ezek mind indukálhatók

$M^n \hookrightarrow R^q$ $\quad G_n(R^q)$ Grassmann sokaság

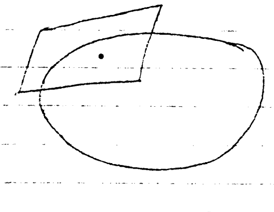
$\qquad\qquad \| $

$\qquad$ n-dim alterek R^q-ban

γ_n^q kanonikus taut. nyaláb

$\downarrow R^n$

$G_n(R^q)$



$M \to G_n(R^q)$

Cél $H^{CW} = H^{szing}$

K. a fedésről

Kivágási t. ($Z \subset \mathrm{int}\, A$, $H_n(X,A) \approx H_n(X \setminus Z, A \setminus Z)$)

Faktorizáció: $H_*(X,A) \approx \widetilde{H}_*(X \cup CA) \approx \widetilde{H}_*(X/A)$

$\uparrow$ (X,A) Borsuk-pár

Spec: $\widetilde{H}_{*+1}(SA) \approx \widetilde{H}_*(A)$, mert

$$\begin{tikzcd} H_*(CA,A) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\approx"] & \widetilde{H}_{*-1}(A) \arrow[dl] \\ H_*(SA) & \end{tikzcd}$$

Spec: $\tilde{H}_*(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0 \\ 0 & * \neq 0 \end{cases}$

$$\tilde{H}_i(S^0) \approx \tilde{H}_{i+n}(S^n) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

Csokor: $H_*(\bigvee_\alpha X_\alpha) = \bigoplus H_*(X_\alpha)$ ha T_0 (pont zárt)

és $\forall$ x_α bázispontnak $\exists$ U_α körny, melynek def. retr.

Biz $\tilde{H}_*(\bigvee_\alpha X_\alpha) \approx H_*(\vee X_\alpha, *) = H_*(\vee X_\alpha, \overset{\cup}{\vee} U_\alpha) =$

$= \bigoplus H_*(X_\alpha \setminus x_\alpha, U_\alpha \setminus x_\alpha) =$ $\qquad H_*(\vee X_\alpha \setminus *, \vee U_\alpha \setminus *)$

$= \bigoplus H_*(X_\alpha, x_\alpha) = \bigoplus \tilde{H}_*(X_\alpha)$ □

] X CW-kompl, $X^n = sk_n X$

$$\tilde{H}_i(X^n / X^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\# n\text{-dim cella}} & i=n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

A cella kompl konstr.-ja a szing homológiával:

$$\longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \dots$$

$$C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$$

Def Térhármas egz homol sorozata:

(X, A, B) $\qquad X \supset A \supset B$

$$H_n(A,B) \longrightarrow H_n(X,B) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A,B) \to \dots$$

Biz $0 \to C(A)/C(B) \to C(X)/C(B) \to C(X,A) \to 0$

$$C(\overset{''}{X})/C(A) = (C(X)/C(B)) / {C(A)/C(B)}$$

Erre a homol egzakt sorozat. □

Funktoriális: $(X, A, B) \xrightarrow{f} (X', A', B')$

$$\begin{tikzcd} H_n(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X,B) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ H_n(A',B') \arrow[r] & H_n(X',B') \arrow[r] & H_n(X',A') \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Spec $(X', A', B') = (X, A, *) \xrightarrow{f} (X, A, B)$

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\approx"] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "j"] & (X, A, *) \\ H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_B"] & H_{n-1}(A,B) & (X, A, B) \end{tikzcd}$$

$\partial_B = j \circ \partial$

Spec $H_n(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow[\approx]{} \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$.

∂_n leírása szing. homológiákkal:

X^n, X^{n-1}, X^{n-2} egy hármas sorozatában ∂

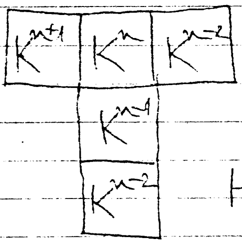
$$\begin{tikzcd}
H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
C_n(X) \arrow[r] & C_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

Áll A CW lánckomplexus homológikus invitációjának homológiái = a tér homológiáival

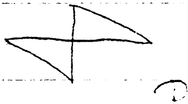
Biz

$$\begin{tikzcd}
H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r] \arrow[dr] & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[r] \arrow[dr] & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) \\
 & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[u] \arrow[r, bend left, "=0"'] & H_{n-2}(X^{n-2}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

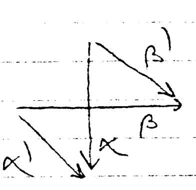
Ezért $\partial_B \circ \partial_B = 0$.



$$\begin{tikzcd}
 & H_n(K^{n-1}, K^{n-2}) = 0 \arrow[d] \arrow[dr, "\text{izom.}"] & & \\
H_{n+1}(K^{n+1}, K^{n-2}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] \arrow[dr, "\partial_{n+1}"] & H_n(K^n, K^{n-2}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(K^{n+1}, K^{n-2}) \arrow[r] & 0 \arrow[d] \\
C_{n+1}(K) & H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K) \arrow[d, "\partial_n"] & & (H_n(K^{n+1}, K^n) = 0) \\
 & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) = C_{n-1}(K) & &
\end{tikzcd}$$



Pillangó lemma:



$$\frac{\operatorname{Im}\alpha}{\operatorname{Im}\alpha'} = \frac{\operatorname{Im}\beta}{\operatorname{Im}\beta'}$$

(HF)

$$\frac{\operatorname{Ker}\partial_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}} = \overset{\parallel}{H_n}(K^{n+1}, K^{n-2})$$

$$\overset{\parallel}{H}{}_n^{CW}(K)$$

Á $H_n(K) \approx H_n(K^{n+1}, K^{n-2})$

Biz $H_n(K^{n+1}, K^{n-2}) \approx H_n(K^{n+2}, K^{n-2}) \approx H_n(K^{n+3}, K^{n-2}) \approx$

$\uparrow$ $(K^{n+2}, K^{n+1}, K^{n-2})$ egz. sorozatából

$\Downarrow$

$H_n(K^{n+i}, K^{n-j}) \quad i \geq 1,\ j \geq 2$

$\approx H_n(K)$ □

$$H_n(K) = \lim_{s \to \infty} H_n(K^s)$$

A határhom leírása

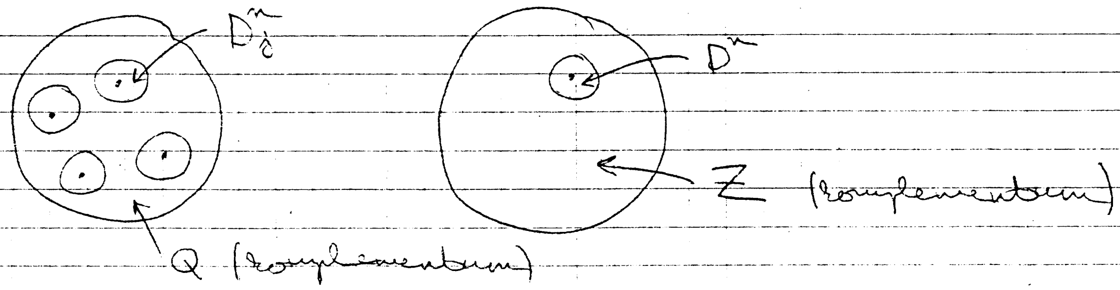
Előbb: A fokszám homol. leírása

Def $f: S^n \to S^n$ "Homol. fokszám":

$$\begin{tikzcd} f_*: \widetilde{H}_n(S^n) \arrow[r] & \widetilde{H}_n(S^n) \\ \mathbb{Z} \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] \\ 1 \arrow[r, mapsto] & k \end{tikzcd}$$

Áll f sima $\Rightarrow \deg f = H\text{-}\deg f$

Biz



$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \text{Képe} & \overset{1}{\widetilde{H}_n(S^n)} \arrow[r, phantom, "\approx"] & H_n(S^n, Z) \arrow[r, phantom, "\approx"] & \overset{1}{H_n(D^n, \partial D^n)} = \mathbb{Z} \\ \text{Ős:} & \underset{1}{\widetilde{H}_n(S^n)} \arrow[u, "f_*", "H-\deg f \text{ szeres szorzás}"'] \arrow[r] \arrow[rrd, "\approx"'] & H_n(S^n, Q) \approx & \underset{(1,1,\dots,1)}{\bigoplus_j H_n(D^n_j, \partial D^n_j)} \arrow[u, "\sum_j \deg f|_{D_j} = \deg f"'] \arrow[d] \\ & & & \underset{1}{H_n(D^n_{j_0}, \partial D^n_{j_0})} \end{tikzcd}$$

$\uparrow$ Z kontrahálható

$$\begin{tikzcd} H_n(S^n) \arrow[r] \arrow[dr] & H_n(S^n, S^n - \mathring{D}^n_j) \approx H_n(D^n_j, \partial D^n_j) \\ & H_n(S^n, Q) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

□

ⒽⒻ $f: M^n \to N^n \qquad H_n(M^n) = \mathbb{Z} \xrightarrow{H-\deg f} H_n(N^n) = \mathbb{Z}$

H-deg f

$H_n(M^n) = \mathbb{Z}$: szimpliciális homológiából
az irányított generátor: minden szimplex 1-szer
(az erősen összefüggőség miatt)
$(n+1)$-es szimplexek nincsenek $\Rightarrow B_n = 0$.
1 db n-es szimplexet véve egy ciklusba az összes szomszédja is benne van, hogy a határa kiessen

$$\begin{tikzcd} H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) = \bigoplus_{\beta \in (n-1)\text{ cellák}} H_{n-1}(D_\beta^{n-1}, \partial D_\beta^{n-1}) \\ \bigoplus_\alpha H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha) \arrow[r, "\partial"] & \bigoplus_\alpha H_{n-1}(\partial D^n_\alpha) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$1 \longrightarrow (k_\beta)$$

$$H_n(D^n_{\alpha_0}, \partial D^n_{\alpha_0}) \xrightarrow{\approx} H_{n-1}(\overbrace{\partial D^n_{\alpha_0}}^{S^{n-1}_{\alpha_0}})$$

$$\begin{matrix} \Psi & & \Psi \\ 1 & & 1 \end{matrix}$$

$$k_\beta = \text{H-deg}\, \varphi(\alpha_0, \beta_0)$$
$$\| \alpha$$
$$\deg \varphi(\alpha_0, \beta_0)$$

$$\varphi(\alpha_0, \beta_0) : S^{n-1}_{\alpha_0} \xrightarrow{\text{rag}} X^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}/X^{n-2} = \bigvee_\beta S^{n-1}_\beta \longrightarrow S^{n-1}_{\beta_0}$$

☐

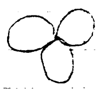
Hurewicz t.

X k-öf. tér $\Rightarrow \pi_{k+1}(X) \approx H_{k+1}(X)$
$k > 0$

($k = 0$-ra : X útöf $\Rightarrow \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] = H_1(X)$)

Biz 1) X-nek $\exists$ CW-approx.
$f : X' \to X$ w.h.e.
$f_* H$ izom.
Feltehető : X CW kompl

2) Felt. $sk_k X = *$ (k homot. levágás)

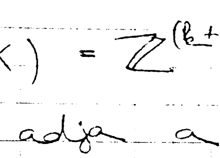


3.) Ragasztási lemma : $Y = X \cup_\varphi D^n \Rightarrow$

$$\pi_{n-1}(Y) = \pi_{n-1}(X) / \{[\varphi]\}_{\nwarrow \pi_1\text{-orbit}}$$

$$\pi_{k+1}(X) = \pi_{k+1}(sk_{k+2} X)$$

$\overset{\|}{\mathbb{Z}^{(k+1)\text{-cellák száma}}}$



$\vee S_i^{k+1}$

(itt $\pi_1 = 0$)

$\pi_{k+1}(X) = \mathbb{Z}^{(k+1)\text{-cellák száma}} / (k+2)$-cellák határai szerint
Ez adja a $H^{CW}_{k+1}(X)$-et. ☐

$\pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ Hurewicz homom.

$\forall$ szferoid egy ciklus (felbontjuk szimplexekre) Vagyis:

$f \in \pi_n(X)$ $f: S^n \to X$ $f_*: H_n(S^n) \to H_n(X)$

$[f] \longmapsto f_*(1)$ indukálja a Hurewicz leképezést

($\pi_{n+3}(S^n)$ geom. úton)

Igaz a relatív változat:

X és A 1-öf terek, $X \supset A$, $\pi_2(X,A) = 0$

$\pi_3(X,A) = \ldots = \pi_{n-1}(X,A) = 0$

$\Rightarrow H_3(X,A) = \ldots = H_{n-1}(X,A) = 0$ és $\pi_n(X,A) \cong H_n(X,A)$.

<u>Köv.</u> Whitehead t.

$f: X \to Y$, $f_{*H}: H_*(X) \to H_*(Y)$ izom.

$\pi_1(X) = \pi_1(Y) = 0$, $f_*: \pi_2(X) \to \pi_2(Y)$ epi.

X, Y CW-kompl.

$\Rightarrow f: X \cong Y$ homot. ekv.

<u>Biz</u> $X \subset Y$ feltehető.

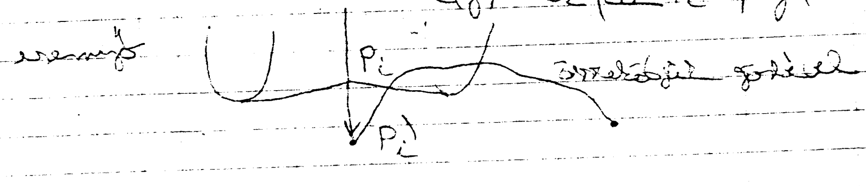
f_{*H} izom $\Rightarrow H_*(Y,X) = 0 \xrightarrow{\text{rel Hur.}} \pi_*(Y,X) = 0$

$\Rightarrow f_{*\pi}$ izom $\xrightarrow{\text{Whit.}}$ f homot. ekv. ☐

<u>21. előadás</u> (diff top)

<u>HF.</u> 1) Banchoff egyen.

$$L(f) = lk_2(\amalg P_i', f(M^2)) \in \mathbb{Z}_2$$



$$t(f) + \chi(M^2) + L(f) \equiv 0 \mod 2$$

$\uparrow$ hármas pontok száma

2)* $\left(\sum(-1)^i \chi(F_i) = \chi(M)\right.$ Bott-Morse$\left.\right)$

$\sum \operatorname{ind}_p v = \chi(M^n)$ Poincaré

$f: M^n \to M^n$ $f \cong id \Rightarrow L(f) = \chi(M)$ mert

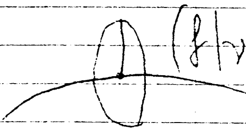
$\sum(-1)^i \operatorname{tr} f_{*i}$

(Bott) $L(f) = \sum$ fixp. alg. száma

Ez ált. a Poincaré-Hopfot, mert vektormezőhöz hozzárendelhető egy kis elmozdulás.

invariáns részek

f (fixpontjainak) halmaza $\amalg F_i$ ← sokaságok



$(f|\nu_{F_i})$

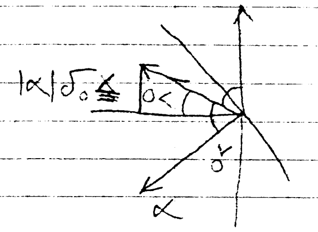
ν_{F_i} irányított nyaláb.

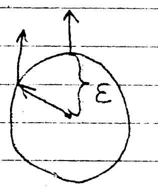
Adjuk a Lefschetz-~~számra~~ a Bott-Morse-hoz hasonló formulát.

3) EHP nélkül

a) Freud b) nehéz Freud. tételeket bebiz

$M^n, \alpha \subset Q \times R^1$ $q > n$





$t = \frac{\varepsilon}{|\alpha|\delta_0}$ ideig kell mozogni

Milyen messzire juthat egy pont az eredeti helyzetétől:

$t \cdot |\alpha| = \frac{\varepsilon}{\delta_0}$

Ha ε elég kicsi $\Rightarrow$ kevés kicsit mozdul el

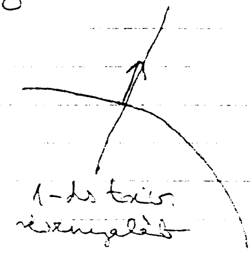
Ezért igaz az összenyomási tétel multiváltozata.

Összenyomási t. multivált.

$M, \alpha_1, \dots, \alpha_k \subset Q^q \times R^k$ $q > n$. Ezeket ki lehet egyenesíteni.

(α normálvektor marad, mert M-et diffeomorfizmussal mozgatjuk)

$T(M) =$ csöves körny. $= D(\xi^{q-n}) \times D^k$



$\nu_i = \varepsilon^k \oplus \xi^{q-n}$

$D(\nu_i) = D^k \times D(\xi^{q-n})$

$\underbrace{\left(D(\xi^{q-n}) \times D^{k-1}\right)}_{} \times D^1$

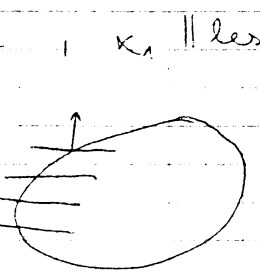
ez játssza a Q szerepét, $\alpha_1 \parallel$ lesz D^1-gyel

$M, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$

$\left(D(\xi^{q-n}) \times D^{k-2}\right) \times D^1$

↙

ezzel $\parallel$-vá tesszük α_2-t.



□

interneten: Geometry and Topology (Rourke, Sanderson)

Ö. t. relatív változat

Ha már $\alpha = \uparrow$ egy $V \subset M$-en $\Rightarrow$ lehet α-t nem változtatni V-n.

EHP sorozat

$n < 2k-1 \Rightarrow \pi_{n+k}(S^k) \xrightarrow{E} \pi_{n+k+1}(S^{k+1}) \xrightarrow{H} \pi_{n+k}(S^{2k}) \rightarrow$
$\xrightarrow{P} \pi_{n+k-1}(S^k) \rightarrow \dots$ egzakt.

(H: Hopf, E: szuszpenzió (német))

Köv. $n = k-1$

$$\underset{\overset{\Downarrow}{\text{epi}}}{\pi_{2k-1}(S^k) \xrightarrow{E} \pi_{2k}(S^{k+1})} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow E \text{ epi}$$

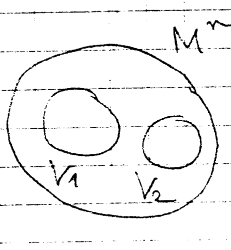
$n < k-1$ E izo.

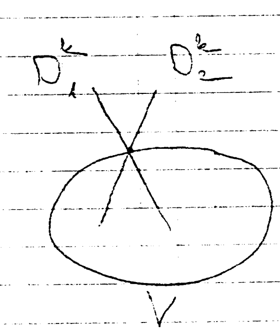
Def $\mathrm{Imm}_2^{fr}(n,k)$

∄ 3-szoros pont, dim, codim

számozott: a kettőspontoknál az ágak meg vannak számozva

kettőspontok: $(n-k)$-dim sok.





$V_1 \neq V_2$

Ezek a feltételek a kobordizmusra is vonatkoznak.

$\mathrm{Emb}^{fr}(n,k) \approx \pi_{n+k}(S^k)$

Pontrjagin konstr. kiterjesztése: $\Gamma(k)$ tér

$\mathrm{Imm}_2^{fr}(n,k) \overset{(*)}{\approx} \pi_{n+k}(\Gamma(k))$

$\Gamma(k) = S^k \underset{[id_{S^k}, id_{S^k}]}{\cup} D^k \times D^k \qquad ([id_{S^k}, id_{S^k}] : S^{2k-1} \rightarrow S^k)$

$(*) \Rightarrow$ EHP

$(\Gamma(k), S^k)$ homot. sorozata!

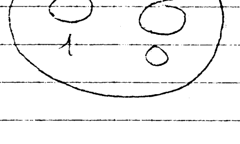
$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+k}(S^k) \arrow[r] & \pi_{n+k}(\Gamma(k)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_{n+k}(\Gamma(k), S^k) \arrow[r] & \pi_{n+k-1}(S^k) \\
 & \overline{Imm}_2^{fr}(n,k) & &
\end{tikzcd}$$

S^k $(k-1)$-öf. , $(\Gamma(k), S^k)$ $(2k-1)$-öf, mert D^{2k}-t ragasztottunk

$\pi_{n+k}(\Gamma(k), S^k) = \pi_{n+k}(S^{2k})$ a homot. kivágás miatt

$$n < 2k-1 \Rightarrow \underbrace{\overline{Imm}_2^{fr}(n,k) \approx Emb^{fr}(n,k+1)}_{\text{triv.}} \doteq \overset{\uparrow}{\pi_{n+k+1}(S^{k+1})}$$

Pontrj.



összemondás t.: vetítünk a függőleges irány mentén

nincs a kobord.-ban 3-szoros pont: $n+1-2-k < 0$

Nehéz Fr. t. $\quad Ker\, E: \pi_{2k-1}(S^k) \to \pi_{2k}(S^{k+1}) =$

$= \{[id_{S^k}, id_{S^k}]\}$

Addíciós t. $\quad Y = X \cup_\varphi D^n$

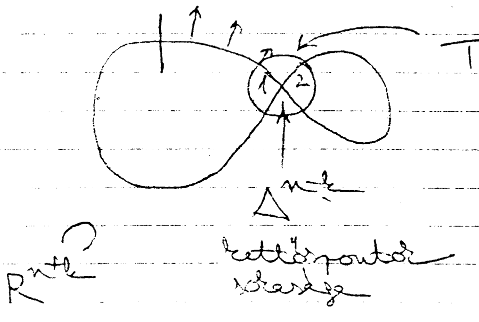
$\pi_{n-1}(Y) = \pi_{n-1}(X) / \{[\varphi]\}$

$i: X \hookrightarrow Y \quad Ker\, i = \{[\varphi]\}$

Biz $X = S^k$, $Y = \Gamma(k)$, $n = 2k$, $\varphi = [id_{S^k}, id_{S^k}]$ $\square$

$\Gamma(k) \qquad \Gamma_2(S^k)$

(*) biz $\quad \pi_{n+k}(\Gamma(k)) \approx \overline{Imm}_2^{fr}(n,k)$



$T(\Delta^{n-k}) \approx \Delta^{n-k} \times D^{2k}$ mert a két ágban a keretezést egymás után felsorolva Δ^{n-k} $2k$ vektorból álló keretezést kapjuk

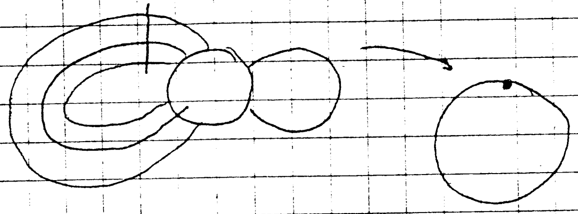
$$\begin{tikzcd}
T(\Delta^{n-k}) \approx \Delta^{n-k} \times D^{2k} \arrow[d, "proj."] \\
D^{2k}
\end{tikzcd}$$

$S^{n+k} \setminus T(\Delta^{n-k})$-ban adott egy. keretezett beágyazott részsokaság.

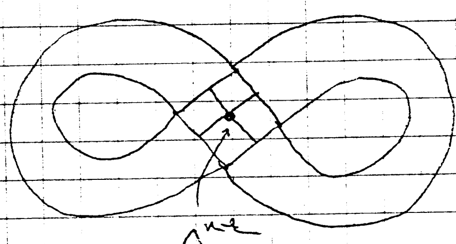
$S^{n+k} \setminus T(\Delta^{n-k}) \xrightarrow{\text{Pontrj.}} S^k$

$f: M^n \looparrowright S^{n+k}$ $\quad \cup$

$f(M^n) \setminus T(\Delta^{n-k})$



$$\begin{tikzcd}
T(\Delta^{n-k}) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] & D^{2k} \arrow[r] & \Gamma(k) \\
S^{n+k} \setminus T(\Delta^{n-k}) \arrow[r, mapsto] \arrow[rru, bend right, "\beta"'] & S^k \arrow[ru] &
\end{tikzcd}$$



$T(\Delta^{n-k}) = \Delta^{n-k} \times D^k \times D^k$

S^{2k-1} = pereme ∂ a $D^k \times D^k$ fibrumnak,

$\forall$ fibrumon a leképezés (a Pontrj-nál) a Whitehead-szorzattal megy át S^k-ba

$\forall$ fibrum peremére megszorítva α és β is

$S^k \subset \Gamma(k)$-ra megy épp az $[\mathrm{id}_{S^k}, \mathrm{id}_{S^k}]$-val.

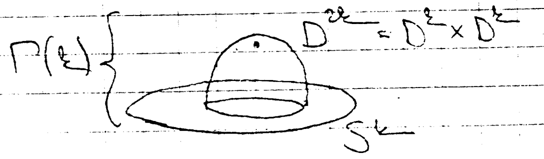
kaptunk: $\overline{\mathrm{Imm}_2^{fr}(n,k)} \longrightarrow \pi_{n+k}(\Gamma(k))$

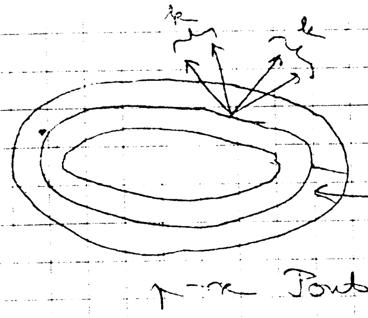
Jól definiált, mert a koordinátázás elk. nem t. a konstrukciót.

$\pi_{n+k}(\Gamma(k)) \rightarrow \overline{\mathrm{Imm}_2^{fr}(n,k)}$

$$S^{n+k} \xrightarrow{\varphi} \Gamma(k) \longrightarrow \underset{\overset{\cup}{p}}{S^{2k}} = \Gamma(k)/S^k$$

$\leftarrow D^{2k}$ középpontjának képe

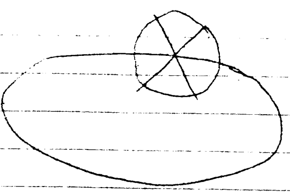




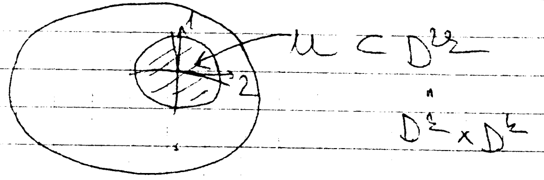
$T = \varphi^{-1}(\mu)$

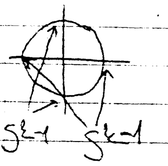
p-re Pontrj. konstr. $\rightsquigarrow$ keretezéssel.

[illegible] f-ai tükrözés megadja a két ágat a ν-val



Γ(k)-ban:

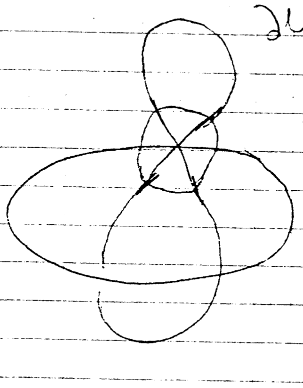




$T = \varphi^{-1}(U)$

$S^{n+k} \setminus T \xrightarrow{\varphi|_{S^{n+k}\setminus T}} \Gamma(k) \setminus U \xrightarrow[\text{kifújás}]{\rho} S^k$

∂U szerinti ⟶ 1 pont = D^k origója



$\Psi = \left(\rho \circ \varphi \,\middle|_{S^{n+k}\setminus T}\right)$-t transzverzálissá tesszük S^k-ban a D^k origójának képére. $\overset{\shortparallel}{D^k}/\partial D^k$

Ennek során nem kell változtatni az $S^{n+k} \setminus T$ peremén.

$0 \in S^k$. $\Psi^{-1}(0)$ beágy. részsok. $S^{n+k} \setminus T$-ben

Kapjuk egy immerzió képét.

22. előadás (alg. top)

Homológia elm. axiómái **Eilenberg – Steenrod**

H kovar. funktor top. térpárok ⟶ grad. Abel-csop.

$H(X,A) = \{H_q(X,A)\}$

∃ (−1)-fokú homom.:

$\partial(X,A): H_q(X,A) \longrightarrow H_{q-1}(A)$

1. ax. Homot. invariancia:

$f_0 \simeq f_1 : (X,A) \to (Y,B)$

$H(f_0) = H(f_1) : H(X,A) \to H(Y,B)$

2. ax. Egzaktsági ax.

$i: A \subset X$, $j: X \subset (X,A)$

$H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \to H_{q-1}(A) \to \ldots$

3. ax. Kivágási ax.

$U \subset A \subset X$, $\overline{U} \subset \operatorname{int} A$

$(X \setminus U, A \setminus U) \overset{j}{\hookrightarrow} (X,A)$ $H(j): H(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H(X,A)$

4. Dimenzió ax. $H_q(P) = \begin{cases} 0 & q \neq 0 \\ \mathbb{Z} & q = 0 \end{cases}$

Véges CW kompl-on ∃! ezeknek eleget tevő funktor.

5. ax (Kompakt tartó)

$\forall z \in H_q(X,A) \quad \exists\ (X',A')$ kompakt pár $\overset{i}{\subset} (X,A)$,

$z' \in H_q(X',A') \qquad H(i)(z') = z$.

Ha 5. is teljesül ⇒ egyértelmű a teljes CW-kompl-on is.

Extraordinárius homológia elm.: 1,2,3.

Pl Bordizmusok

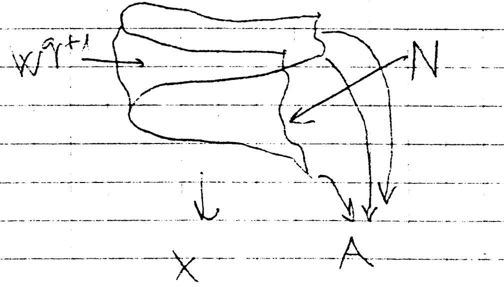
$$\mathcal{N}_q(A) \longrightarrow \mathcal{N}_q(X) \longrightarrow \mathcal{N}_q(X,A) \longrightarrow \dots$$

$\{f : \underset{\text{zárt sok.}}{V^q} \longrightarrow A\} \Big/$ $f_0 : V_0 \longrightarrow A$, $f_1 : V_1 \longrightarrow A$ $\quad \exists\, W^{q+1}$ kompakt $\partial W^{q+1} = V_0 \amalg V_1$

$\exists F : W \to X :\ F|_{V_0} = f_0,\ F|_{V_1} = f_1$

relatív: $V \to X$

$\partial V \to A$



$f_0 : (V_0, \partial V_0) \to (X,A)$

$f_1 : (V_1, \partial V_1) \to (X,A)$

$\exists\ g : N \to A$

$\partial N = \partial V_0 \amalg \partial V_1 \qquad g|_{\partial V_0} = f_0$

$g|_{\partial V_1} = f_1$

$\exists\ W^{q+1} \xrightarrow{F} X$

$F|_{\partial W}$ = ami már meg van adva

művelet: diszj. unió

$\mathcal{N}_q(*)$ a sokaságok kobordizmus csoportja, pl 2 dimenzióban $\neq 0$.

Stabil homot. csoportok

$$\pi^S_q(X,A) \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \left[S^{N+q}, S^N(X/A)\right]$$

$$\pi^S_q(X,\emptyset) \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \left[S^{N+q}, S^N \underbrace{(X/\emptyset)}_{X \amalg *}\right]$$

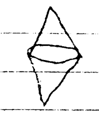
X = pont $\Rightarrow$ $\pi^s_q(X, \emptyset) = \pi^s(q)$

1. ax biz.

Megj. Szusp. növeli az összefüggőséget.

$\forall Z$-re SZ ívösz.

Z ívösz $\Rightarrow$ SZ 1-ösz Van Kampen



Z k-ösz $\Rightarrow$ SZ $(k+1)$-ösz ált. Fr. tételből

2. ax (Egz.)
3. ax (Kivágás) } egyszerre:

$\pi_i(X, A) \approx \pi_i(X/A)$ (homot. kivágás), ha

X, A 1-ösz, A p-ösz, (X, A) q-ösz, $i \leq p+q$.

$S^N(X/A) \cong S^N X / S^N A$ $X^+ = X \amalg *$

$\pi_{N+q}(S^N X^+, S^N A^+) \approx \pi_{N+q}(S^N(X/A)) = \pi^s_q(X/A)$

nagy N-re.

$(S^N X, S^N A)$ párra felírjuk a homot. egz. sorozatot

$\pi_{N+q}(S^N A^+) \to \pi_{N+q}(S^N X^+) \to \pi_{N+q}(S^N X^+, S^N A^+) \to$

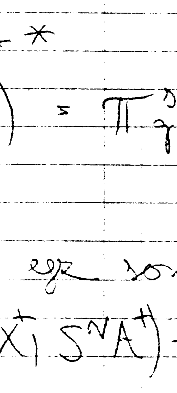
$\to \pi_{N+q-1}(S^N A^+) \to \ldots$

HF. volt: X, Y véges CW

$[S^k X, S^k Y] \to [S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$ kölcs. egyért.

Ném: S, $\pi_i(Y) \longrightarrow \pi_{i+1}(SY)$

$Y \overset{j}{\hookrightarrow} \Omega SY$



$j_* : \underbrace{\pi_i(Y) \xrightarrow{j_*} \pi_i(\Omega SY) \overset{\text{Serre-fibr.}}{\approx} \pi_{i+1}(SY)}_{S}$

Elég: Y k-ösz, $\dim X \overset{\text{kb.}}{<} 2k \Rightarrow [X, Y] \to [SX, SY]$ rá

$$\begin{tikzcd} & {[SX, SY]} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ {[X, Y]} \arrow[r] & {[X, \Omega SY]} \end{tikzcd}$$

$[SA, B] = [A, \Omega B]$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "j"] & \Omega SY \\ X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kb. $2k$-ig izo. j_*, eddig a rel homot. csop-ok 0-k $\Rightarrow$

az $X \to \Omega SY$ leköp. homotópiával Y-ba vihető.

Tehát viszont.

Hasonlóan érvelve a homotópiákra kapjuk, hogy 1-1 ért.

S-kategória (stabil kat.)

$X \cong_s Y$ ha $\exists N$ $S^N X \cong S^N Y$.

$X \xrightarrow{\;/\;} Y$ ha $\exists N$: $S^N X \to S^N Y$

$$\{X,Y\}_q = \lim_{N\to\infty} [S^{N+q}X, S^N Y]$$

Ha X-et rögz. $\{X,Y\}_q$ extraord. homol. elm.
Y-t rögz.: extraord. kohomológia elm.
(kohom.: ugyanazok az axiómák, csak az egyes összetevőkben fordítva állnak a nyilak)

Addíciós tétel

$Y = X \cup_\varphi D^n$, $\varphi : \partial D^n \to X \Rightarrow$ $j : X \hookrightarrow Y$

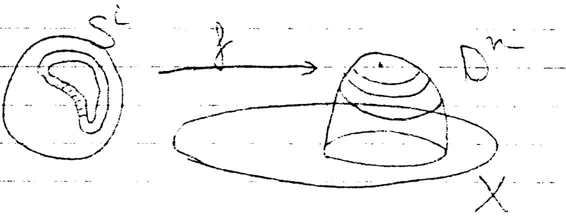
1) $\pi_i(X) \overset{j_*}{\approx} \pi_i(Y)$ $i < n-1$

2) $\pi_{n-1}(Y) \approx \pi_{n-1}(X) / \{[\varphi]\}$

Biz

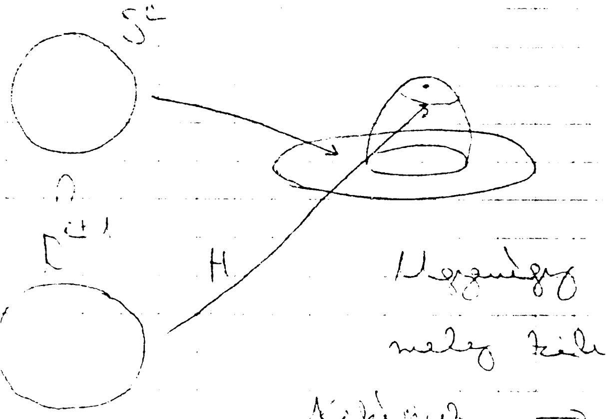
$$\begin{tikzcd} S^i \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & S^n \end{tikzcd}$$

$i < n-1$



f-et tudjuk úgy approximálni, hogy kihagyja D^n középpontját, $f \cong \tilde{f}$ = kihagyja D^n középpontját kitoljuk X-be $\Rightarrow$ j_* epi., ha $i < n$

j_* mono., ha $i < n-1$

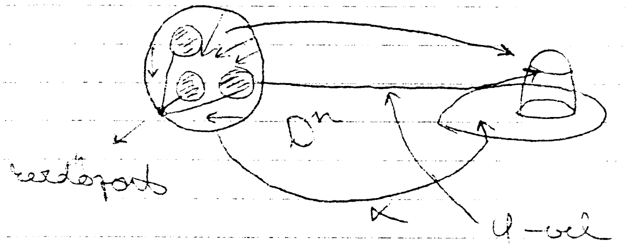


Megmutatjuk H-t approx. $\tilde{H}$-mal, mely kihagyja D^n középpontját. Kitoljuk $\Rightarrow$ X-ben is 0-homot.

<u>$i = n-1$</u> biz: $[\varphi] \in \operatorname{Ker} j_*$

$\alpha \in \operatorname{Ker} j_*$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & X \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ D^n \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$



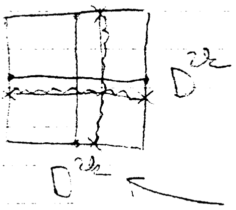
$\alpha \simeq \sum \pm [\varphi]$ szabad homot.

$\alpha = \sum \pm \gamma [\varphi]$ $\square$

Áll S^{2k} nem retr. top csop-nak

$H[\mathrm{id}_{S^{2k}}, \mathrm{id}_{S^{2k}}] = 2 \in \pi_{4k-1}(S^{2k})$

$\pi_p(X) \otimes \pi_q(X) \to \pi_{p+q-1}(X)$



• és × kiterjesztése egyértelműség-gel

$$\begin{tikzcd} D^{2k} & S^{2k-1} \times D^{2k} \arrow[l] \arrow[r] & D^{2k} \arrow[d] \\ & & S^{2k} \end{tikzcd}$$

$+$-ok egy. metszési indexe 2

$\Rightarrow [\mathrm{id}_{S^{2k}}, \mathrm{id}_{S^{2k}}] \neq 0$

De top. csop-ban: $h(x,y) = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \forall$ Whitehead szorzat 0. Tehát nem homot. ekv. top csoporttal, mert lenne $\forall$ Whitehead szorzat 0 lenne.

Nem retr: $A \underset{i}{\overset{r}{\rightleftarrows}} X$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & X \arrow[r, "r"] & A \end{tikzcd}$$

$S^{2k} \xrightarrow{i} G$ $\pi_*(S^{2k}) \to \pi_*(G)$ mono, nem 0

Wh szorzatot $\neq 0$-ba viszi őt $\pi_*(G)$-ben ↯. $\square$

Áll $f: F^2 \looparrowright R^2$, $\partial F^2 = S^1 \Rightarrow \deg(df|\partial F^2) =$ ptlan

<u>Megj.</u> deg + kettőspontok = ptlan $\forall\, S^1 \looparrowright R^2$-re (Whitney)

megj. $\Rightarrow$ áll

R^3_+

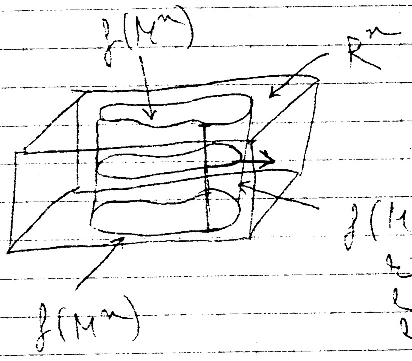
kettőspontok száma ps., mert f felemelhető R^3_+-ba immerzióvá, majd általánosvertikálisra bontjuk. A metszetnek két vége van

másképp: $f : M^n \looparrowright R^n$
kompakt peremes

$$\deg(f|\partial M^n) = \chi(M^n) \quad n \text{ ps.}$$

Mivel F^2 immerziója van R^2-be ⇒ irányítható.

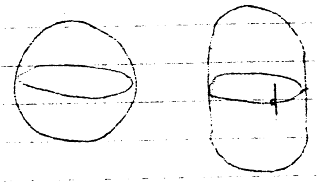
Zárt irányítható felület Euler kar. ps., egy lyukat vágva rajta χ ptlan.



$f(M^n)$ két példányával peremen kötött szakaszok. A sarkot lekerekítjük
kapjuk DM^n immerzióját R^{n+1}-be

$$\deg \nu = \frac{1}{2}\underbrace{\chi(DM^n)}_{2\chi(M^n)} = \chi(M^n)$$
volt

$$\deg(\nu_{f|\partial M^n}) = \deg \nu$$
$V^{n-1} \to S^{n-1}$



ZH: utolsó órán

23. előadás (alg. top.)

1.) EHP H = Hopf-inv. ha $n=2$

2.) Bott-Morse ⇒ $\chi(M) = \sum (-1)^i \chi(F_i)$

3.) $\mathrm{Imm}^{SO}(n,1) \approx \pi^s(n)$ $\mathrm{Imm}^{fr}(n,k) \approx \pi^s(n)$

4.) S^2-vel old. 0 repr. $\mathrm{Emb}^{fr}(2,k)$

5.) Felületek Morse elm. szerk.

6.) a) $M^n \looparrowright \begin{matrix} R^{n+1} \to \\ R^{n+2} \to \end{matrix}$ [illegible] Morse

b)

7.) (2)-t [illegible]

8.) a) $L(f) \neq 0$ ⇒ ∃ fixp. b) $L(f) = \sum \pm$ fixp.

9.) ∀ szerk. repr. S_g-vel

10.) Whitney a) 8-as R^2-ben b) n-es R^d-ben

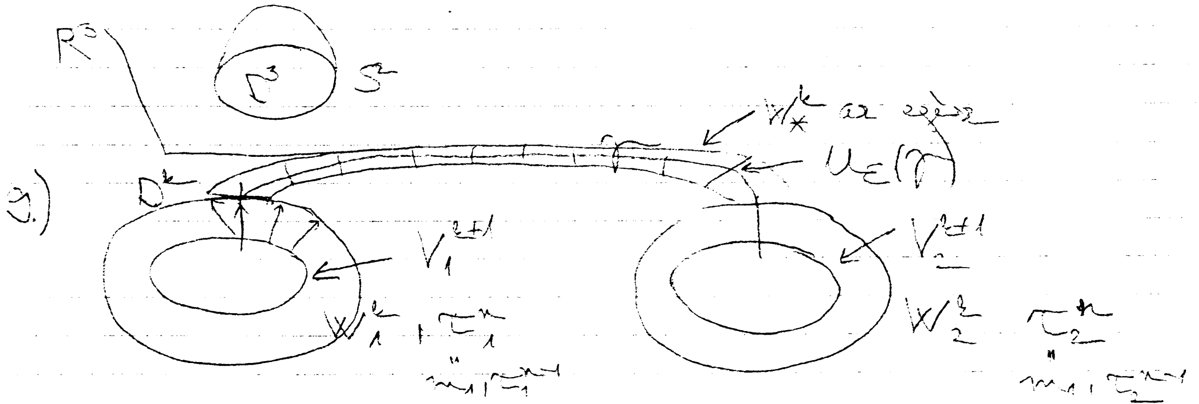
4.)
$$\begin{tikzcd} B \times R^2 \arrow[d, "R^2"] \\ B \end{tikzcd}$$
$[B, SO(2)]$

$[S^2, SO(2)]$

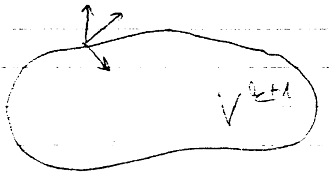
$\pi_2(SO(2)) = ?$ $\qquad SO(3) = RP^3 \qquad SO(4) = S^3 \times SO(3)$

$$\begin{tikzcd} SO(n) \arrow[r, shift left, "SO(n-1)"] & S^{n-1} \arrow[l, shift left] \end{tikzcd} \qquad n=4 \qquad \begin{tikzcd} SO(4) \arrow[r, shift left, "SO(3)"] & S^3 \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$\pi_2(SO(n)) = 0$



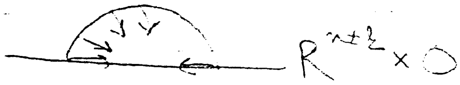
$V^{k+1} = V_1^{k+1} \cup U_{2\varepsilon}(\gamma) \cup V_2^{k+1}$



$\subset R^{n+k} \times 0$

$t : V \to [0,1]$ $\qquad t^{-1}(0) = \partial V \qquad t < 1$ t sima

$R^{n+k} \times [0,1]$ -be kiemeljük



$V \times I$ graf t-vel

1 vizsga, 1-1 kérdés, 2-3 oldalas, pusztán visszaadható, nem lesz feladat. ZH-t lehet később megírni.

8.) a) $\nexists$ fixp $\Rightarrow L(f) = 0$

$0 < r < d(x, f(x))$

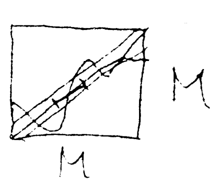
$\forall$ szimplex átm $< \frac{r}{2}$ $\qquad f : K \to K$ szimpl.

$\tilde{f} : K' \to K'$ folytonos (nem szimpl.)

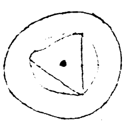
$\forall$ szimplex diszj. $\tilde{f}$-nél a képétől

$\operatorname{tr} \tilde{f}_\bullet = 0 \Rightarrow L(f) = 0$

b)

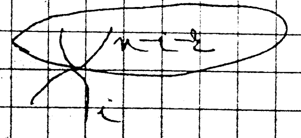


$f : M \to M$



homotópiával elérhető, hogy fixp. körül egy kis szimplex környékébe marad

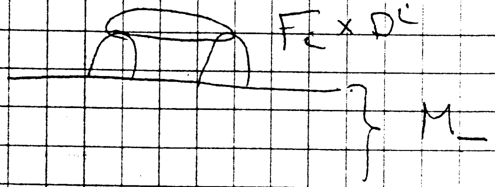
2)



$$\chi(M) = \sum (-1)^i c_i(f)$$

$$(-1)^i \sum (-1)^\alpha c_\alpha(g) = \chi(F_i)(-1)^i \quad / \sum_i$$

~~2)~~ vagy



$$\chi(M_+) = \chi(M_-) + \underbrace{\chi(F_i \times D^i)}_{\chi(F)} - \chi(F \times S^{i-1})$$

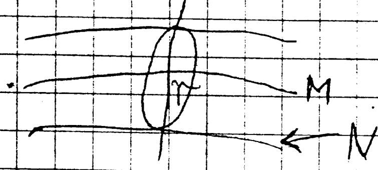
$$\chi(A \times B) = \chi(A) \cdot \chi(B).$$

6.) b) $\partial T^{n+k}_{q} = N^{n+k-1}$ $\quad M^n \xrightarrow{\alpha} R^q \ni l$ irány

↑ csöves körny. $\quad h^b_l : M^n \to R^1$

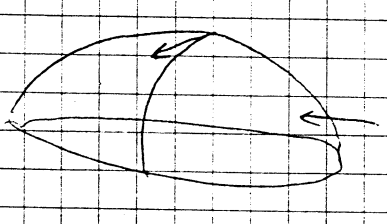
$h_l : N^{q-1} \to R^1$

p krit. pt. h_l-nek M-en



a)-ban p nem elf. krit. l-re vetítésnek ⟺ reguláris pontja ν normálleképezésének

$$M^2 \xrightarrow{\alpha} R^3$$



r(u,v) a felület param.

$\bar{n}_u = -\underset{\uparrow}{k_1} \cdot \bar{r}_u \qquad \bar{n}_v = -k_2 \cdot \bar{r}_v$

főgörb.

$-(ax^2+by^2)$ harmadfokú tagoktól eltekintve

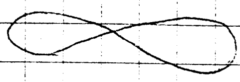
$$\underbrace{\int |\bar{n}_u \times \bar{n}_v| \, du\, dv}_{d\nu(\sigma)} = \int \underbrace{k_1 k_2}_{K} \underbrace{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v| \, du\, dv}_{d\sigma} \text{ területmérték}$$

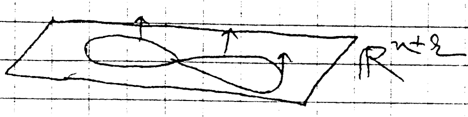
Gömbi kép „területe" $= \int_{M^2} K \, d\sigma$

$\chi(M^2)\frac{1}{2} \leftarrow \underline{\deg \nu} \cdot 4\pi$ $\quad$ ter. mérték

$$\boxed{\int_{M^2} \kappa\, d\sigma = 2\pi \cdot \chi(M^2)}$$ Gauss–Bonnet tétel.

3) $\text{Imm}^{fr}(n,k) \xrightarrow{S} \text{Imm}^{fr}(n,k+1)$ izo.

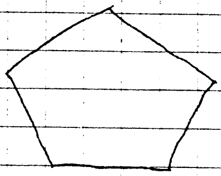


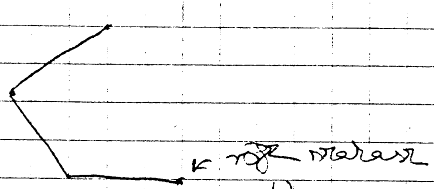


összenyomási t.

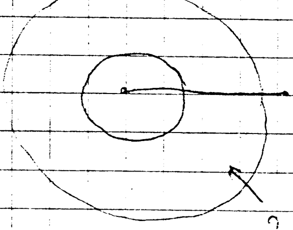
$\pi^s(n) = \text{Emb}^{fr}(n,k)$ ha $k \gg n$.

10.) a)

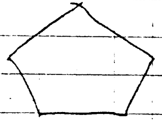


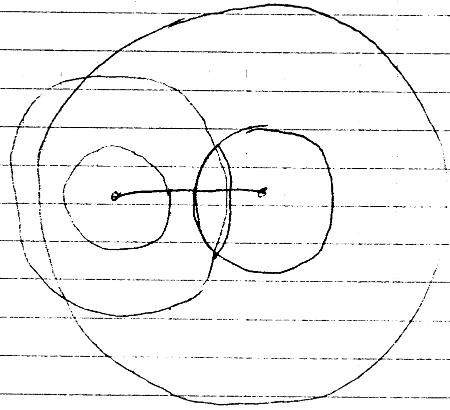


kész lesz tórusz, $S^1 \times S^1$, a
2 szabad szakasz 1-1 körön mozoghat.



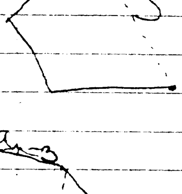
2 példányban, a perem mentén összerag.



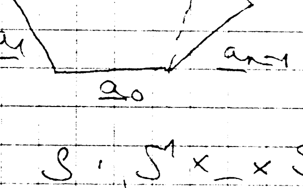


legf. 4 füles lehet
lehet 2 tórusz,
egyébként öf.

2.mo.



$S: S^1 \times S^1 \to R^1$



$$\frac{d}{dt}\|\underline{a_0}+\dots+\underline{a_{n-3}}\|^2$$

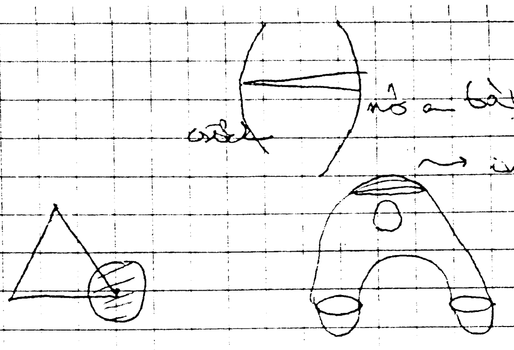
$$\frac{d}{dt_1}\sum(\underline{a_i},\underline{a_j}) = \sum(a_1',a_j) =$$

$$= \langle a_1', \underbrace{\sum_{i=0}^{n-3} a_i}_{V} \rangle = 0$$

$$S: \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n-3 \text{ db}} \to R^1$$

$a_1' \perp V \qquad a_1 \perp a_1'$

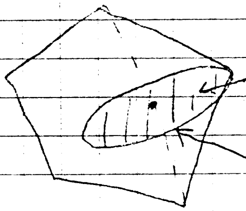
$v \parallel a_1$



$\rightsquigarrow$ index különbsége — $a_3 + a_4$ — $a_3 - a_4$

amikor $\xi = 0$, akkor nem Morse.

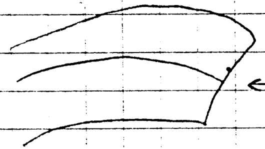
$d = 4$



$$\xi : \underbrace{S^{d-1} \times \dots \times S^{d-1}}_{n-3} \to \mathbb{R}^1$$

$\downarrow D^d$

$$\begin{tikzcd}
Y_n \arrow[dr] & \partial Y_d \arrow[l] & \xi \arrow[dr] & \\
& S^{d-1} & & TS^{d-1} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$



Vizsga: I. 11., 24., 29., II. 1. 10^h-tól,

Konzultáció: lehet e-mailben szucs@cs.elte.hu

ill. a fenti napokon du., kivéve I. 24.-én

ZH eredmények az ajtón vagy a titkárságnál