1. előadás

2.) $Vect_n(S^k) \longleftrightarrow \pi_{k-1}(SO(n))$

S^k feletti n-dis vekt. nyalábok izom osztályai

1.) a) $Vect_1(X) = Hom(\pi_1(X), \mathbb{Z}_2)$

b) $= H^1(X; \mathbb{Z}_2)$

3.) X véges CW kompl, n-dim

$s_k : Vect_k(X) \longrightarrow Vect_{k+1}(X)$ $\quad s_k$ szü $k \geq n+1$

$\xi \qquad\qquad \xi \oplus \varepsilon^1$ $\quad$ bij. $k \geq n+2$

4.)* $i: S^n \hookrightarrow R^{n+1}$ st. beágy.
$t: R^{n+1} \to R^{n+1}$ hipersíkra tükr.
i reg homot. $t \circ i$-vel
$\Rightarrow S^{n+1}$ paral.

Diff top probl $\longrightarrow$ Alg top $\longrightarrow$ Kohomológiák

Pl Immerziók oszt. Vektornyalábok Karakterisztikus oszt

Extraord. kohomol

K-elmélet

(kell: Bott periodicitás)

Cél $\exists$ univ. n-dim vektornyaláb

$$\gamma_n \longrightarrow G_n(R^\infty) = \lim_{k\to\infty} G_n(R^{n+k})$$

I. X (para)kompakt. $\xi \xrightarrow{R^n} X$

$\exists f: X \longrightarrow G_n \quad f^*\gamma_n = \xi$

f homot. egyértelmű

Tehát $Vect_n(X) = [X, G_n]$

II. Homotóp leképezések izomorf nyalábokat indukálnak

Biz

Lemma (Tetsz. t. vektornyalábokra)

X kompakt T_2 tér $\quad \xi \longrightarrow X \supset A$ zárt, $s_A: A \to \xi$

Akkor $\exists\ s : X \to \xi$ amelyre $s|_A = s_A$.

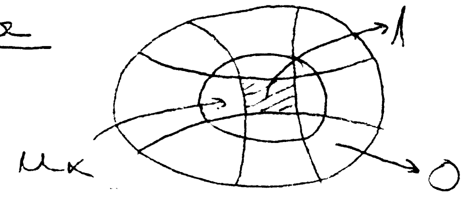
Def Egységosztás

komp. T_2 X tér, $\mathcal{U}$ nyílt fedés, lok. véges

$\exists$-nek fv.-ek $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ fv.-ek

$\operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha \qquad \sum f_\alpha = 1.$

Biz Minimális fedőrsz



$\varphi_\alpha : X \to [0,1]$

~~$(\varphi_\alpha|_{X - \overline{U}_\alpha} \equiv 0,\ \varphi_\alpha|_{\text{több } U \text{ kompl}} \equiv 1)$~~

$\exists\ V_\alpha$ nyílt, $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$, $\cup V_\alpha = X$

$\varphi_\alpha|_{\overline{V}_\alpha} \equiv 1, \quad \varphi_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} \equiv 0$

$\sum \varphi_\alpha \neq 0 \qquad f_\alpha = \dfrac{\varphi_\alpha}{\sum \varphi_\alpha}$ □

K (Tietze nyomán)

U_α triviál környezet $\xi \to X \qquad \xi|_{U_\alpha}$ = triviál

s_A megad t_α fv.-t $\overline{U}_\alpha \cap A \to \xi|_{\overline{U}_\alpha \cap A}$

$\tilde{t}_\alpha$ kiterjeszti t_α-t $\overline{U}_\alpha$-ra ($\overline{U}_\alpha$ normális)

$\exists\ f_\alpha$ egy $\{U_\alpha\}$ fedéshez tart. egységosztás

$f_\alpha \cdot \tilde{t}_\alpha$ értelmes egész X-en

$s \overset{\text{def}}{=} \sum f_\alpha \tilde{t}_\alpha$ kiterjeszti az s_A-t. □

Atiyah: K-theory

Milnor - Stasheff: Characteristic classes

Eml. Fontos funktor

Vektortér $\longrightarrow \ldots \qquad V \qquad V^*$

lin leképz $\qquad V \qquad V \oplus V$

n-vált.

n db vektortérhez $\qquad$ 1 vektortér

Pl: ~~Hom~~$(V, W) \qquad \operatorname{Hom}(V, W)$

$V \oplus W$

$\xi^n, \eta^k \longrightarrow X$

$$\begin{array}{c} HOM(\xi, \eta) \\ \big\downarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \\ X \end{array}$$

$Hom(\xi, \eta) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{szelések}}}{\Gamma}(HOM(\xi,\eta))$

$n=k$ $\quad ISO(\xi,\eta) \subset HOM(\xi,\eta)$, $\quad ISO(\xi,\eta) \to X$, $\quad HOM(\xi,\eta) \to X$

nyílt részh. (izomorfizmusok)

$A \subset X$

s_A szelése $HOM(\xi,\eta)\big|_A$ -nak, $s_A(A) \subset ISO(\xi,\eta)$

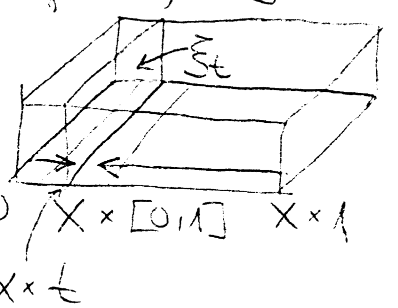
$\forall$ s kiterjesztés A egy környezetén $\subset ISO$.
($s^{-1}(ISO(\xi,\eta)) \supset A$ nyílt miatt)

Biz (T1)

$f \cong_H g \qquad f, g : X \longrightarrow \underset{\substack{\text{nyaláb} \\ \downarrow}}{B}$

$H : X \times I \longrightarrow B$

$H^*(\text{nyaláb}) = \xi$



$\pi_t : X \times [0,1] \longrightarrow X \times t$ proj.

$\xi_t = \xi\big|_{X \times t}$

$\zeta_t = \pi_t^*(\xi_t) \longrightarrow X \times I$ vekt. ny.

ξ_t és ξ izomorf $X \times t$ fölött

$HOM(\xi, \zeta_t)\big|_{X \times t}$ van egy szelése, mely ISO-ban van

$\Rightarrow$ $X \times (t-\delta, t+\delta)$ fölött a kiterjesztéssel kapott

$s : X \times [0,1] \longrightarrow HOM(\xi, \zeta_t)$ szelés izom

(ζ_t $\forall$ $X \times t'$ szint felett ua: ξ_t-t kaptuk, hogy
ξ a t körül $\forall t'$-re a t' szint felett izomorf
ζ_t-vel $\Rightarrow$ $\xi_0 \cong \xi_1$) $\quad [0,1]$ kompakt!

K2 X kompakt T_2, $\xi \xrightarrow{R^n} X$

$\exists N : \phi : X \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \xi$ epimorfizmus

$$\begin{tikzcd} R^N \arrow[rr] \arrow[dr] & & R^n \arrow[dl] \\ & x \in X & \end{tikzcd}$$

Biz (K2) $y \in X$ $\xi_y \approx R^n$, $v_1, \dots, v_n$ bázis

$$\begin{tikzcd} v_1, \dots, v_n \arrow[d, squiggly] \\ s_1, \dots, s_n \end{tikzcd}$$

$s_1, \dots, s_n$ szelések

$X \times R^n \longrightarrow \xi$

$(x, u_1, \dots, u_n) \longmapsto \sum u_i s_i(x)$ $\qquad s_i(y) = v_i$

$\Rightarrow$ y egy körny.-ben $s_1, \dots, s_n$ bázis.

$\exists$ véges sok $y_1, \dots, y_m$, hogy a választott szelések $\forall$ pontban generálják a fibrumot.

tehát $\exists$ $s_1, \dots, s_N$ db szelés, $\forall$ pontban generálnak

$\phi(x, (u_1, \dots, u_N)) \longrightarrow \sum u_i s_i(x)$. $\square$

$\mathrm{Ker}\,\phi \subset X \times \mathbb{R}^N$

$\xi \approx (\mathrm{Ker}\,\phi)^\perp$ n-dim vektornyaláb

$$\phi\big|_{(\mathrm{Ker}\,\phi)^\perp} : \begin{tikzcd} (\mathrm{Ker}\,\phi)^\perp \arrow[r, shift left, "\approx"] & \xi \arrow[l, shift left, bend left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

$\gamma_n^N \xrightarrow{R^n} G_n(R^N)$

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \gamma_n^N \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\hat{\psi}"'] & G_n(R^N) \end{tikzcd} \qquad \Rightarrow (\hat{\psi})^*(\gamma_n^N) = \xi$$

$x \longrightarrow (\mathrm{Ker}\,\phi)^\perp \subset R^N$

$$\begin{tikzcd} & \gamma_n^N \arrow[d] & \gamma_n \arrow[d] \\ \gamma_n^N \arrow[r, "R^n"] & G_n(R^N) \arrow[r, hook] & G_n(R^\infty) \end{tikzcd}$$

$\square$

K3. $f, g: X \to G_n$ $\xi = f^*\gamma_n \cong g^*\gamma_n \Rightarrow f \simeq g$.

Biz. X kompakt $\Rightarrow$ $f(X)$ kompakt $\Rightarrow \exists N: f(X) \subset G_n(R^N)$
$g(X)$ $\qquad \exists M: g(X) \subset G_n(R^M)$

$i \circ f_N \simeq j \circ g_M$ $\quad i: G_n(R^N) \hookrightarrow G_n(R^{N+M})$ (első N koord.)
$j: G_n(R^M) \hookrightarrow G_n(R^{N+M})$ (utolsó M koord.)

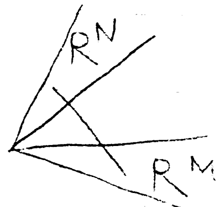
$F_N: E(\xi) \rightarrowtail R^N \hookrightarrow R^{N+M}$ ($\cancel{\xi \to \gamma_n^N}$) első N koord
$i \circ f_N$-ből származik

(ez ad egy leképezést $\xi \to G_n(R^n)$, amivel a visszahúzás épp a ξ-t adja)

$j \circ g_M$ ($\cancel{\ }$)-ből származó monomorfizmus
$G_M: E(\xi) \rightarrowtail R^M \hookrightarrow R^{N+M}$ utolsó M koord

$F_{N+M}: E(\xi) \rightarrowtail R^{N+M}$

$\tilde{G}_{N+M}: E(\xi) \rightarrowtail R^{N+M}$



$t \cdot F_{N+M} + (1-t)\tilde{G}_{N+M}: E(\xi) \rightarrowtail R^{N+M}$

Ez ad a bázison egy homotópiát f és g között. □

2. előadás

Proj. modulusok, K-elmélet, G-nyalábok, kobordizmusok

Kapcsolat a nyalábok és proj. modulusok között:

X kompakt, T_2 $\qquad C(X)$ foly. fv-ek gyűrűje

$C(X)$ meghatározza X-et. ($p \in X \leftrightarrow \{f \in C(X): f(p) = 0\}$ max. ideál)

$\xi \xrightarrow{R^n} X$ $\quad \Gamma(\xi) = \{\xi \text{ szelései}\}$ modulus $C(X)$ fölött végesen generált.

Ha ξ triv, akkor $\Gamma(\xi)$ = n-dim szabad modulus.

$\xi \oplus \xi^\perp = \varepsilon^N$ triv (múltkori epimorfizmusból)

$\Gamma(\varepsilon^N) = \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\xi^\perp) \Rightarrow \Gamma(\xi)$ proj. végesen generált mod-us $C(X)$ felett.

Megj. $\Gamma: \mathrm{Vect}(X) \longrightarrow \mathbb{C}(X)$ fölötti végesen gen. proj.

mod izomorfizmus.

Def A félcsoport, komm., egységelemes

Grothendieck csoport: $Gr(A) = K(A)$

$a-b$ formális kül. ekv. oszt.: $(a,b) \sim (a',b')$, ha

$\exists\, x \in A:\ a+x = a',\ b+x = b'$ $\qquad A \oplus A / (x,x)$

kategória-elméleti def:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\text{félcsop. homom.}"] \arrow[dr] & G \text{ Abel-csop.} \\
& K(A) \arrow[u, dashed, "\exists!"']
\end{tikzcd}$$

$K(A)$ ebben a kategóriában univ. iniciális elem

$X \qquad Vect(X) \qquad K(X) = K(Vect(X))$

topológiai K-funktor

Algebrai K-funktor:

R „gyűrű". Végesen gen. proj. R-modulusok

$Proj(R)$ — végesen gen. proj. mod

$K(R) = K(Proj(R))$ ← modulusok direkt összeg

$K(C(X)) = K(X)$

K-elmélet, mint kohomológia elmélet:

$\tilde{K}(X) = \ker\ \dim : K(X) \to \mathbb{Z}$

$\uparrow$ ← így definiáljuk $K(X)$-en a dim-et

$\dim : Vect(X) \to \mathbb{Z}$

$\tilde{K}^{-n}(X) = \tilde{K}(S^n X)$

$K^{-n}(X,Y) \overset{def}{=} \tilde{K}^{-n}(X/Y)$ $\qquad H^i(X) \approx H^{i+1}(SX)$ alapján definiáljuk (permanencia elv)

$K^{-n}(X) = K^{-n}(X,\emptyset) = \tilde{K}(S^n(X \amalg *))$

Poz. indexekre a Bott periodicitás adja a kiterjesztést.

Bott periodicitás valós nyalábokra

A múlt órán elmondottak analógja igaz

1) irányított vektornyalábokra
2.) komplex —||—
3.) kvaterniós —||—

$$\gamma_n(R^N) \xrightarrow{R^n} G_n(R^N)$$
$$\gamma_n \xrightarrow{R^n} G_n = \lim_{N\to\infty} G_n(R^N)$$
$$\tilde\gamma_n^{SO}(R^N) \xrightarrow{R^n} \hat G_n(R^N)$$ ← irányított alterek ($G_n(R^N)$-t kétszeresen fedi)
$$\tilde\gamma_n \longrightarrow \hat G_n$$

$\mathbb{R}$-et $\mathbb{C}$-re ill $\mathbb{H}$-ra cserélve adódik 2) ill 3.)

$G_n = BO(n)$ $\quad \lim_{N\to\infty} G_n(\mathbb{C}^N) = BU(n)$ $\quad \hat G_n = BSO(n)$

$BO = \lim_{n\to\infty} BO(n)$, hasonlóan BSO, BU

Bott periodicitás: $BSO \cong \Omega^8 BSO$, $BU \cong \Omega^2 BU$

($SO \cong \Omega^8 SO$ $\qquad U \cong \Omega^2 U$

$SO \cong \Omega BSO$ $\qquad U \cong \Omega BU$)

$\tilde K(X) =$ stabil vektornyalábok X fölött

$$\xi - \eta \sim \xi \oplus \eta^\perp - \underbrace{\eta \oplus \eta^\perp}_{\text{triv}} \to \xi \oplus \eta^\perp - \varepsilon^n$$

- $\tilde K(X) = [X, BO]$

Komplex K-funktor komplex nyalábok

2-periodikus kohom elmélet

$\tilde K_{\mathbb{C}}(X) = [X, BU]$ - komplex stabil nyalábok

$$\tilde K_{\mathbb{C}}^{-2}(X) = [S^2(\underset{X \amalg *}{X^+}), BU] = [X, \Omega^2 BU] = \tilde K_{\mathbb{C}}(X)$$

Bott csoportjai: $\pi_i(SO)$ (extraordinárius kohom elm)

<u>Kobordizmusok</u>

$$\mathfrak{N}_n \approx \pi_{n+N}(T\gamma_N) \quad \text{R. Thom} \quad (N \geq n+2)$$

<u>Def</u> ξ vektornyaláb

$T\xi$ - ξ Thom tere $\quad T\xi = \dfrac{D(\xi)}{S(\xi)}$ $D(\xi)$ = gömbnyaláb, $S(\xi)$ = gömb nyaláb

<u>Megj.</u> Parakompakt téren adott vektornyalábokon $\exists$ metrika

Biz $\exists$ $\{U_\alpha\}$ trivializáló környezetekkel fedés

$\forall$ $p^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ $\leftarrow$ van skalár szorzás

φ_α egységosztás, U_α alá rendelt.

$\sum \varphi_\alpha \langle \, , \, \rangle_\alpha$ $\square$

Pl $T(\mathbb{R}^n \longrightarrow *) = S^n$

$\mathfrak{N}_n$ unoriented kord. csop. (differenciálható sokaságok mint kobordizmusokkal)

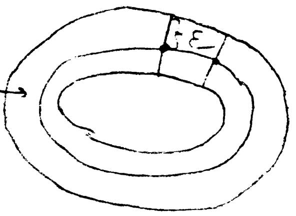
$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{irányított}}}{\Omega_n} \approx \pi_{n+N}(T\tilde{\gamma}_N)$

Biz $\mathrm{Emb}(n,k) = \{M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}\}$ beágyazások kobordizmusai

$\mathrm{Emb}^{fr}(n,k) \approx \pi_{n+k}(S^k)$ Pontrj. konstr. analógja

$\mathrm{Emb}(n,k) \approx \pi_{n+k}(T(\gamma_k(\mathbb{R}^{n+k})))$

T $\longrightarrow$



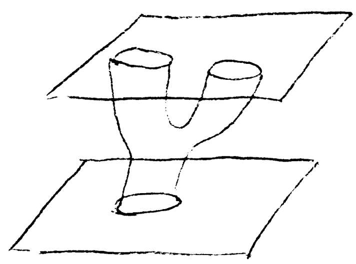
egy $\mathbb{R}^{n+k}$-ba beágyazott n-dim sokaság csőszerű környezete: T

$T \longrightarrow D_\varepsilon(\gamma_k(\mathbb{R}^{n+k})) \longrightarrow T\gamma_k(\mathbb{R}^{n+k})$

$\uparrow$ (betoljuk a gömböket az origóba) $\cup$

$S^{n+k} \setminus T \longrightarrow *$

Kobordizmusból ugyanúgy homotópia



Leképezésből beágyazás:

$S^{n+k} \longrightarrow T(\gamma_k(\mathbb{R}^{n+k})) \supset G_k(\mathbb{R}^{n+k})$

f-et transzverzálissá tesszük $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$-ra

$f^{-1}(G_k(\mathbb{R}^{n+k})) = M^n \hookrightarrow S^{n+k}$

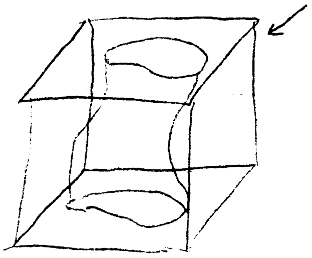
$f \cong_H g$ $\quad H \pitchfork G_k(\mathbb{R}^{n+k})$

$H^{-1}(G_k(\mathbb{R}^{n+k}))$ - kobord. $f^{-1}(G_k(\mathbb{R}^{n+k}))$ és $g^{-1}(G_k(\mathbb{R}^{n+k}))$ közt.

Ha $k \geq n+2$, akkor Thom ~~...~~ kiszámolta ezen $\pi_{n+k}(T(\gamma_k(\mathbb{R}^{n+k})))$ homot. csoportokat.

Áll. $\mathfrak{N}_n \approx \mathrm{Emb}(n,k)$, ha $k \geq n+2$.

Biz. $\forall$ n-dim sk. beágyazható $\mathbb{R}^{2n+2}$-be és $\forall$ két beágyazás izotóp. (Izotóp beágyazások kobordánsak)



$\square$

5. HF: $T(\xi \oplus \varepsilon^1) = ST\xi$

6.) $\xi \xrightarrow{\mathbb{R}^n} B$ ← tetsz. $\qquad T\xi$ $(n-1)$-öf.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Emb}(n,k) & \overset{\text{láttuk}}{\approx} & \pi_{n+k}(T\gamma_k(\mathbb{R}^{n+k})) \\
\downarrow & & \downarrow \leftarrow \text{ez a leképezés az alábbi, l. lent} \\
\mathrm{Emb}(n,k+1) & \approx & \pi_{n+k+1}(T\gamma_{k+1}(\mathbb{R}^{n+k+1}))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\gamma_k(\mathbb{R}^{n+k}) \oplus \varepsilon^1 & \xrightarrow{i} & \gamma_{k+1}(\mathbb{R}^{n+k+1}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
G_{_} & \longrightarrow & G_{_} \leftarrow \text{Grassmann sk-ok}
\end{array}$$

$Ti: T(\gamma_k(\mathbb{R}^{n+k}) \oplus \varepsilon^1) \to T(\gamma_{k+1}(\mathbb{R}^{n+k+1}))$

$$\pi_{n+k}(T\gamma_k(\mathbb{R}^{n+k})) \underset{\uparrow \text{ Áll. Fr. t.}}{\approx} \pi_{n+k+1}(\overset{\text{5. HF}}{S T\gamma_k(\mathbb{R}^{n+k})}) \longrightarrow \pi_{n+k+1}(T\gamma_{k+1}(\mathbb{R}^{n+k+1}))$$

$\square$

$\mathrm{Vect}_n(X) \to \mathrm{Vect}_{n+1}(X)$

7.) $T\gamma_1(\mathbb{R}^{n+1}) = ?$ $\quad \mathbb{RP}^{n+1}$

3. előadás

$\mathbb{CP}^2 \not\subset \mathbb{R}^6$

G-nyalábok

Def. Principális G-nyaláb, G top csoport.

$E \xrightarrow{G} B$ struktúra csoport $= G$.

$\exists$ univerzális G-nyaláb.

1\. Pl. $\pi: \xi \xrightarrow{R^n} X$ ir. v. nyaláb

$P(\xi) \xrightarrow{SO(n)} X$

fibrumban veszük az ir. tartó bázisokat

$\pi^{-1}(U) \to U \times R^n \to U$

$U \times SO(n) \to U \qquad U \cap V \to GL_n(\mathbb{R})$

$U \cap V$ fölött ragasztunk. $\quad U \cap V \to SO(n)$ ha ir.

$P(\xi) \underset{SO(n)}{\times} R^n \approx \xi \qquad$ ($P(\xi)$ meghatározza ξ-t)

r. a diag. hatással faktorizálunk

2\. Pl. $\mathbb{Z}_2$-nyaláb $\quad E \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} B \quad$ 2-rétű fedés

3\. Pl. G diszkrét csoport → reg. fedések, $|G|$ = rétegszám

Reg. fedés: $p: E \to B$, melyre $\operatorname{im} p_*(\pi_1(E, e_0)) \triangleleft \pi_1(B, b_0)$

G princ. nyaláb $\qquad G = \pi_1(B, b_0) / \operatorname{im} p_*$

4\. Pl. a) $S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} CP^n \qquad S^1$-princ. nyaláb

b) $S^{4n+3} \xrightarrow{S^3} \mathbb{H}P^n \qquad S(H^{n+1}) \quad S^{4n+3}$

Milnor konstrukció

$E_G \xrightarrow{G} B_G$ univ. G-nyaláb:

$\overbrace{G * G * G * \_\_ * G}^{n}$

$E_n = \{g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0, g_i \in G\}$

$\sum t_i g_i$ - b lineáris súlyoz., $g_1, \dots, g_n$ - re szimplex

$E_G = \lim\limits_{n \to \infty} E_n \qquad E_{n-1} \subset E_n : \; t_n = 0$

$B_n = E_n / G$

Hat. a G E_G-n (g-vel szorzás), $B_G = E_G / G$.

$E_G \xrightarrow{G} B_G$.

Példák 1.) $G = \mathbb{Z}_2 \qquad E_n = \underbrace{S^0 * S^0 * \_\_ * S^0}_{n} = S^{n-1}$

$\downarrow$

$B_n = RP^{n-1}$

$S^\infty \to RP^\infty$

2\) ~~E_n~~ $G = S^1 \qquad E_n = \overbrace{S^1 * \_\_ * S^1}^{n} = S^{2n-1}$

$\downarrow S^1$

$B_n = CP^{n-1}$

$S^\infty \xrightarrow{S^1} CP^\infty$

L. $\pi_i(E_G) = 0$

Biz $S^i \xrightarrow{f} E_G$ G CW-kompl $\Rightarrow E_G$ ...

S^i képe kompakt $\Rightarrow \exists n: f(S^i) \subset E_n$ E_{n+1}-ben már null-homotóp, mert $\underset{\text{kúp}}{\subset} E_n \subset E_{n+1}$. □

L $Y \to Y/G$ princip. G-nyaláb

$\pi_i(Y) = 0$ $i \le k$.

Ez univ. az olyan G-nyalábokra, melyek bázisának dimenziója (CW-kompl) $\le k$.

Biz $X \to X/G$ G-nyaláb

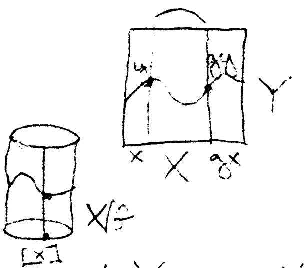
$\dim(X/G) \le k \Rightarrow$ Ez indukálható $Y \to Y/G$-ből, azaz

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \to & Y/G \end{array}$$

G-ekvivariáns.

$$\begin{array}{c} \xi = X \times_G Y \quad (x,y) \sim (gx, gy) \\ \downarrow \\ X/G \end{array}$$

$X \to Y$ ekvivariáns leképe $\Leftrightarrow$ szelései ξ-nek



$$g(x, f(x)) = gx, \underbrace{gf(x)}_{f(gx)}$$

graf f képe $/G$ adja ξ egy szelését.

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X \times_G Y \\ \downarrow Y & & \downarrow Y \\ X & & X/G \end{array}$$

És fordítva

1.) $\exists X \to Y$ G-ekvivar. leképe

Ehhez elég $\xi: X \times_G Y \xrightarrow{Y} X/G$ $\exists$ szelése

Cellák dim-ja szerinti indukcióval konstr. szelését ξ-nek.

Tfh i-dim celláig akarjuk kiterj.
← [illegible] ugyis i cella fölött triviális

$D^i \times Y$ $S^{i-1} \to Y$ a perem fölött megadott szelés.

$\pi_{i-1}(Y) = 0 \Rightarrow$ kiterjed D^i-re.

Ha $i-1 \le k$ $\quad \dim(X/G)-1 \le k \Rightarrow X \to X/G$ indukálható $Y \to Y/G$-ből

$Y \to Y/G$ $\quad \dim X/G \le k$ bázisválasztva univ.

2) Az indukáló lekép. homot. egyért. $X/G \to Y/G$.

Ugyanis $X \to Y$ G-ekvivar. lekép. G-ekviv. homotópia erejéig egyért.

$f_0, f_1 : X \to Y$ G-ekviv. $\quad \exists f_t : X \to Y$ G-ekviv.

$$X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

Adott $X \times 0$ és $X \times 1$-en G-ekv. lekép. f_0, f_1. Ezt akarjuk kiterj.

$$\begin{array}{ccc} (X\times[0,1])\times_G Y & = & (X\times_G Y)\times[0,1] \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \big\uparrow s \\ (X\times[0,1])/G & = & X/G \times [0,1] \end{array}$$

s_0 és s_1 f_0, f_1-ből
$X/G \times 0$ fölötti szelés
$X/G \times 1$ —"—

Innen mint fent. $\square$

Kérdés: Milyen konstr. tényleg az univ. G-nyalábot adja

2. Biz. Explicite megadjuk az indukáló leképezést.

ξ G-nyaláb $\{U_i\}$ triviál környezetek

$$\begin{array}{ccc} E(\xi|U_i) & \xrightarrow{h_i} & U_i \times G \\ \pi \big\downarrow & & \big\downarrow q_i \\ U_i & & G \end{array} \qquad h_i, q_i \text{ G-ekv.}$$

u_i egységosztás U_i alá Ezt

$x \in E(\xi)$

$$x \longmapsto \sum u_i(\pi(x)) \cdot \underbrace{q_i \circ h_i(x)}_{\in G} \quad \text{G-ekv.}$$

(Σ tagi alakú felírás)

Homotópia: $E_G \xrightarrow{h^e} E_G^{even}$ ← páros helyeken a t_i lehet $\neq 0$

$E_G \xrightarrow{h^o} E_G^{odd}$

$\exists$ izotópia $(g_1, g_2, \dots, g_n)(t_1, \dots, t_n)$

$\downarrow$

$\underbrace{(g_1, *, g_2, *, \dots, g_n)}_{2n}(t_1, 0, t_2, 0, \dots, 0, t_n)$

a két pont közötti szakaszon deformálom az egyiket a másikba ($\forall$ 2 pont között van szakasz)

f_0-lal E_G^{even}-be, f_1-gyel E_G^{odd}-ba képezünk, a kettő között az összekötő szakaszokon homotópia □

BG homot. egyértelmű: kategória elm., terminális obj.

Tfh $B'G$ BG univ.

$B'G \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} BG$ $\qquad f \circ g \cong id \qquad g \circ f \cong id$.

BG: univ. G-nyaláb bázisa $\qquad EG \xrightarrow{\xi} BG$

X feletti G-nyalábok $\longleftrightarrow [X, BG]$

1.) $Vect_1(X) \leftrightarrow H^1(X; \mathbb{Z}_2)$

$\qquad \|$

$[X, RP^\infty] = Hom(\pi_1(X), \mathbb{Z}_2)$

$f \qquad f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(RP^\infty) = \mathbb{Z}_2$

 homomorfizmusok f: 2-dim cellákra kiterjed, mert homomorfizmus, és $\forall$ 2-cella határa reláció

$\pi_2(RP^\infty) = 0 \Rightarrow$ kiterjed a 3 cellákra

$\pi_3(\quad) = 0 \Rightarrow$ 4

...

$Hom(\pi_1(X), \mathbb{Z}_2) = Hom(H_1(X), \mathbb{Z}_2) = H^1(X; \mathbb{Z}_2)$

↑ kommutatív csoportba ($\mathbb{Z}_2$-be) menő homom. ↔ kommutátor szerinti faktorból homom. □

$\xi = PO(n) \times_{O(n)} \mathbb{R}^n$

↑ ortonormált bázisok

$PO(1) \times_{O(1)} \mathbb{R}^1$ 

$\forall$ vonalnyaláb egy $\mathbb{Z}_2$ nyalábbal azonosítható: $RP^\infty = B\mathbb{Z}_2$.

$\mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(X) = [X, \mathbb{CP}^\infty]$

<u>Def</u> $K(\pi, n)$ Eilenberg - MacLane tér

$$\pi_i(K(\pi,n)) = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ \pi & i = n \end{cases}$$

$\mathbb{RP}^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1) \qquad \mathbb{CP}^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$

<u>8. HF</u>) $\exists\ K(\pi,n)$ CW kompl. — " — -val homot. egyért.

9.)* $[X, K(\pi,n)] = H^n(X,\pi)$
$\uparrow$ csoport írom

10.) $K(\pi,n)$ H-tér, mert a) $K(\pi,n) = \Omega K(\pi,n+1)$
$\uparrow$ itt van szorzás

b) H-térben π_i-ben a művelet H-térbeli szorzással def.-ható.

$\mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(X) = [X, \mathbb{CP}^\infty] = H^2(X,\mathbb{Z})$

11.) <u>Dold</u> $X \to Y$ ekvivar. $\mathbb{Z}_2$-leképez., CW-komplexusok
szabad: $\forall y \in Y\ \exists U_y\ \ T(U_y) \cap U_y = \emptyset$ (involúció $\in \mathbb{Z}_2$) $\Rightarrow$

X k-öf, $\dim Y \leq n$ $\Rightarrow$ $n \geq k+1$

<u>4. előadás</u>

BG

$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^\infty) = BSO(2) = BU(1) = \mathbb{CP}^\infty$ (=-ség homotopikusan)
irányított Grassmann; $SO(2) = U(1)$

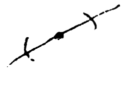
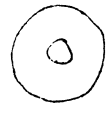
($\mathbb{CP}^\infty \subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^\infty)$, de $\mathbb{R}^\infty$ nem minden 2-dos altere komplex)

~~$(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^\infty))$~~

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \gamma_2^{SO} & \xleftarrow{\text{komplementtartó homot. ekv.}} & \downarrow \gamma_1(\mathbb{C}) \\ \tilde{G}_2(\mathbb{R}^\infty) & \cong & \mathbb{CP}^\infty \end{array}$$

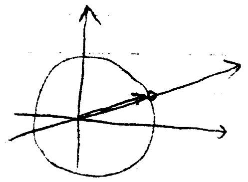
$\Rightarrow T\gamma_2^{SO} \cong T\gamma_1^{\mathbb{C}}$

$T\gamma_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{RP}^n$:

<u>1. Biz</u>  $D\gamma_1(\mathbb{R}^n) \setminus 0$-szelés $= D^n \setminus \{0\}$ 

$T\gamma_1(\mathbb{R}^n) \setminus 0$-szelés $= D^n \setminus \{0\} / S^{n-1} = S^n \setminus D^n = D^n$

θ



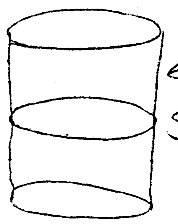
Biz

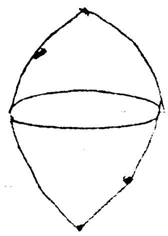
$$\begin{array}{ccc} \gamma_1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathbb{R}^1} & \mathbb{R}P^{n-1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^{n-1}\times\mathbb{R}^1 = \tilde{\gamma}_1(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & S^{n-1} \end{array}$$

$(s,t) \sim (-s,-t)$

$$E(\gamma_1(\mathbb{R}^n)) = S^{n-1}\times\mathbb{R}^1 / _{(s,t)\sim(-s,-t)}$$

Thom tere





$$\begin{array}{ccc} D(\tilde{\gamma}_1(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \\ D(\gamma_1(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow \\ T\gamma_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

S^{n-1} $\qquad$ S^{n-1}

$$\begin{array}{ccc} T\gamma_1 & = & \mathbb{R}P^\infty \\ \cup & & \cup \\ BO(1) & = & \mathbb{R}P^{\infty-1} \end{array}$$

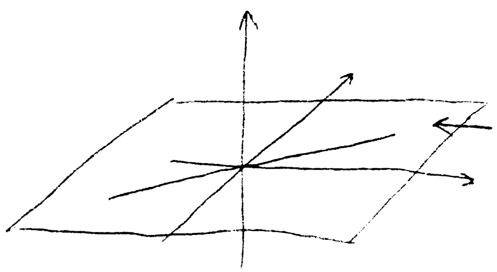
$\square$

Áll $\quad T\gamma_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}P^n$

kanonikus $\mathbb{C}$-nyaláb $\mathbb{C}P^{n-1}$ felett

Áll $\quad \nu(\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n) = \mathrm{HOM}_{\mathbb{C}}(\gamma^1_{n-1}, \varepsilon^1)$

fgvt. funktorból kapott v. nyaláb $\qquad = \gamma_1(\mathbb{C}^n)$



a függőleges egyenes

$$\begin{array}{ccc} E(\mathrm{HOM}(\gamma_1(\mathbb{C}^n), \varepsilon^1)) & = & \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^0 \\ \cup & & \cup \\ 0\text{-szelés} & = & \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$$

Megj. Ha $\xi \to B \leftarrow$ kompakt, akkor $T\xi = (E\xi)^*$ $\leftarrow$ 1-pontú komp.

$\Longrightarrow T(\mathrm{HOM}(\gamma_1(\mathbb{C}^n), \varepsilon^1)) = \mathbb{C}P^n$.

$$\begin{array}{ccc} \xi & & \xi^* \\ \downarrow R^n & & \downarrow (R^n)^* \\ B & & B \end{array}$$ ← duális v. nyaláb

$$\xi^* = \mathrm{HOM}_{\mathbb{R}}(\xi, \varepsilon^1)$$

$$\Rightarrow \xi \approx \xi^*.$$

$$R^n \approx (R^n)^*$$

V skalár szorzás ad egy izo.-t

$$\mathrm{HOM}(\gamma_1(R^n), \varepsilon^1) = \gamma_1(R^{n*})$$

$$\begin{array}{ccc} \xi & & \xi^* \\ \downarrow \mathbb{C}^n & & \downarrow (\mathbb{C}^n)^* \\ B & & B \end{array}$$

$$\xi^* \qquad \xi$$

Egy $\mathbb{C}^n$ v. nyaláb = R^{2n} nyaláb + $I: \xi \to \xi$ operátor

$I^2 = -1$ komplex struktúra

$$\xi^* = \overline{\xi}$$

ω $\mathbb{C}$-nyaláb, $\overline{\omega}$ konjugált nyaláb

De a Thom tér def.-ban nem szerepel az I

$$\Rightarrow T(\mathrm{HOM}(\gamma_1(\mathbb{C}^n), \varepsilon^1) = T\gamma_1(\mathbb{C}^n) \cancel{= \mathbb{C}P^n}$$

$$T(\gamma_1(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{C}P^n \qquad n \to \infty$$

$$T\gamma_1^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^\infty$$

jelölés (eredeti) $T\tilde{\gamma}_n = MSO(n)$

$T\gamma_n = MU(n)$

$$T(EG \times_G R^n) = MG. \qquad BSO(2)$$

$$\mathrm{Emb}^{SO}(n,2) \approx \pi_{n+2}(MSO(2)) \quad \text{(láttuk)}$$

$$\approx \pi_{n+2}(T\tilde{\gamma}_2(R^{n+2}))$$

$$MSO(2) = MU(1) = T\gamma_1^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^\infty$$

$$\pi_i(\mathbb{C}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 2 \\ 0 & i \neq 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{Emb}^{SO}(n,2) \approx \pi_{n+2}(\mathbb{C}P^\infty) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ \mathbb{Z} & n = 0 \end{cases}$$

$$M^n_{ir} \overset{n \neq 0}{\hookrightarrow} R^{n+2} \Rightarrow M^n \sim_{\Omega} 0$$ (irányított ért.-ben

0 - kobordáns)

Megj. ξ komplex v. nyaláb $\Rightarrow$ irányított

$\mathbb{C}^n$ fibrum, $v_1, \dots, v_n$ bázis, megad egy irányítást

$\downarrow$ valós ill. képz. rész

$u_1, w_1, \dots, u_n, w_n$, ezeket úgy permutál-

juk, hogy u_i és w_i együtt marad

$U(n) \subseteq SO(2n) \subset O(2n)$

$U(n) \xrightarrow{U(n-1)} S^{2n-1}$ $\Rightarrow$ $U(n)$ összefüggő, benne van

$O(n)$-ben az id öf-ségi komponensében

a fibrumok ragasztó leképezései tehát $SO(n)$-ben vannak $\Rightarrow$ irányított.

$\forall$ komplex sokaság (átm. fv.-ek komplex diffeók) irányított, mert az érintőtere komplex v. nyaláb, ami irányított.

$\mathbb{C}P^n$ komplex sokaság $\Rightarrow$ irányított

$\mathbb{C}P^2$ nem perem (még „unoriented" értelemben sem)

$\chi(\mathbb{C}P^2) = 3$, mert $\mathbb{C}P^1 = S^2$, $\mathbb{C}P^2 = D^4 \cup \mathbb{C}P^1$

(vagy: Morse fv., $\forall$ ps dimenzióban 1 krit. pont)

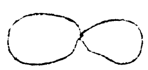
Beláttuk: $\mathbb{C}P^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^6$

12) HF. $\mathbb{C}P^3$ 0-kobordáns.

$H^n(X;\pi) = [X, K(\pi,n)]$ $\quad\pi$ Abel-csoport

Def Fundamentális osztály: $\iota_n \in H^n(K(\pi,n);\pi)$

Tek. a $K(\pi,n)$ konstrukciójából adódó CW-struktúrát



$sk_{n-1} = *$

$\forall$ n-cella $\sigma^n \rightsquigarrow \in \pi$ (egy σ^n szferoid, ami

$\pi_n(K(\pi,n)) = \pi$ egy eleme)

$C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \longrightarrow \dots$ (CW-homológia)

$\leftarrow C^n(X) \xleftarrow{\delta} \underset{\ni f}{C^{n-1}}(X;\pi) = \mathrm{Hom}(C_{n-1}(X), \pi)$

$(\delta f)(\sigma^n) \overset{def}{=} f(\partial\sigma^n)$

Kaptunk $L_n \in \mathcal{C}^n(K(\Pi,n))$ kolánot

L_n kociklus $\quad [L_n] \overset{def}{=} l_n$

$$\varphi: [X, K(\Pi,n)] \longrightarrow H^n(X;\Pi)$$
$$f \longrightarrow f^* l_n$$

$f: X \to Y$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_n(Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{n-1}(Y) & \longrightarrow \\ \uparrow f_\cdot & & \uparrow f_\cdot & \\ \mathcal{C}_n(X) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{C}_{n-1}(X) & \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \xleftarrow{\delta} & \mathcal{C}^n(X) & \xleftarrow{\delta} & \mathcal{C}^{n-1}(X) \\ & \uparrow f^\cdot & & \uparrow f^\cdot \\ & \mathcal{C}^n(Y) & \longleftarrow & \mathcal{C}^{n-1}(Y) \end{array}$$

<u>Áll</u> L_n kociklus.

<u>Biz</u> azaz $\delta L_n = 0$. azaz $C_{n+1}(\underset{\parallel}{\overset{K(\Pi,n)}{K}})$ $\forall \sigma^{n+1}$ generátorára

$\delta L_n(\sigma^{n+1}) = 0$. $\quad \delta L_n(\sigma^{n+1}) = L_n(\partial\sigma^{n+1})$

$$= \underbrace{\sum [\sigma^{n+1} : \sigma^n_k] \cdot \sigma^n_k}$$

0-homotóp n-dim szferoid
(σ^{n+1} mentén húzható pontra)
azaz $0 \in \Pi$-ben $\square$

<u>Áll</u> φ bijekció

<u>Biz</u> $sk_{n-1} X = *$

<u>5. előadás</u>

$$H^n(X,A;G) \overset{\varphi(X,A)}{\longleftarrow}= [X/A, K(G,n)]$$

$\dim(X \setminus A) < n$ esetén triv, mindkét oldal 0.

$sk_{n-1}(X \setminus A) = \emptyset$ $\quad$ ($X \setminus A$-ban csak $\geq n$-dim cellák)

φ „rá": $\exists\, b \in \beta \in H^n(X,A;G)$

kociklus $\quad C_n(X \setminus A) \to G$, $\quad b(\partial\sigma^{n+1}) = 0$

$\Pi_n(K(G,n))$ $\quad (n+1)$-cella

$f : X/A \longrightarrow K(G,n) \qquad \varphi([f]) = [b] = \beta$

$$\begin{tikzcd}
X \\
A \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & *
\end{tikzcd}$$

$\forall$ n-dim σ^n cellát $\in b(\sigma^n)$. Ezzel megadtuk f-et az n-vázon: $sk_n(X/A)$-n. Kiterjed-e az $(n+1)$-vázra?

$b(\partial\sigma^{n+1}) = 0 \Rightarrow$ Kiterjed

Tovább kiterjed az $(n+2)$-vázra, mert $\pi_{n+1}(K(G,n)) = 0$
$(n+3)$ ...

φ injektív: $f^*(\iota_n) = g^*(\iota_n)$

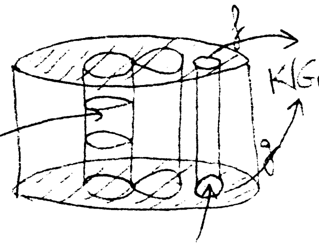
$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r] \arrow[dr] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "C^n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "C^{n-1}"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

$C^{n+1} = \mathrm{Hom}(C_{n+1}, G) \leftarrow \mathrm{Hom}(C_n, G) \xleftarrow{0} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\mathrm{Hom}(C_{n-1}, G)}$

$C_{n-1} = 0 \Rightarrow$ két n-dim kociklus kohomológ $\Rightarrow$ egyenlők mint láncok

$X/A \times [0,1]$

kiterjed a homotópia



c_f kociklus $[c_f] = f^*(\iota_n)$

$\sigma^n \to [f|_{\sigma^n}] \in G = \pi_n(K(G,n))$

c_g kociklus $[c_g] = g^*(\iota_n)$

Kiterjed-e $\sigma^{n+1} \times [0,1]$-re a homotópia?

$$\begin{tikzcd}
\sigma^{n+1} \times [0,1] \\
D^{n+1} \times [0,1] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$S^{n+1} = \partial(D^{n+1} \times [0,1]) \longrightarrow K(G,n)$

$S^{n+1} \to K(G,n)$ kiterjed $D^{n+2} \to K(G,n)$.

3) $\exists$ $Y = X/A$ $\quad Y^{n-1} = sk_{n-1}(X/A)$. Puppe $(Y, Y^{n-1}) \to K(G,n)$

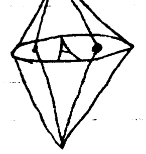
lét. ext

$$\begin{tikzcd}
0 & \underbrace{[Y^{n-1}, K(G,n)]}_{=0} \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_{Y^{n-1}}"] & {[Y, K(G,n)]} \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_Y"] & {[Y/Y^{n-1}, K(G,n)]} \arrow[l] \arrow[d, "\approx\ \varphi_{Y,Y^{n-1}}"] & {[SY^{n-1}, K(G,n)]} \arrow[l] \\
0 & H^n(Y^{n-1}; G) \arrow[l] & H^n(Y; G) \arrow[l] & H^n(Y/Y^{n-1}; G) \arrow[l] & H^{n-1}(Y^{n-1}; G) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$H^n(Y^{n-1}; G) = 0$

2) miatt
amikor $sk_{n-1} X = *$

$[SA, B] = [A, \Omega B]$



$\longleftarrow [SY^{n-1}, K(G,n)] = [Y^{n-1}, \underbrace{\Omega K(G,n)}_{K(G,n-1)}]$

$H^{n-1}(Y^{n-1}, G) \leftarrow \varphi_{Y^{n-1}}$ izom ((n-1)-re már tudjuk az állítást indukcióval)

és ⊕ öt lemma (triviális eset) miatt φ_Y izom

$n = 0$ -ra triv. □

<u>Direkt biz.</u> arra, hogy $H^n(X;G) \xleftarrow{\varphi} [X, K(G,n)]$ izom

$$K(G,n) = \Omega K(G,n+1)$$

φ homom. lesz:

$$f \longrightarrow [c_f] \qquad [f]*[g] \leftarrow \text{pontonkénti összeszorzás}$$
$$g \longrightarrow [c_g] \qquad \downarrow$$
$$[c_h] = [c_f] + [c_g]$$

$$\sigma^n \longrightarrow c_f(\sigma^n) = [f|\sigma^n]$$
$$\longrightarrow c_g(\sigma^n) = [g|\sigma^n]$$

Z egy H-tér $\Rightarrow \pi_n(Z)$-ben a művelet indukálható a Z-beli pontonkénti szorzással.

Egy nehéz lépés:

$f, g : X \longrightarrow K(G,n)$

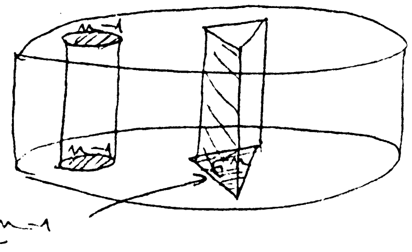
c_f kociklus
c_g —||—

$\underset{\text{kohomológ}}{c_f \sim c_g} \overset{?}{\Longrightarrow} f \simeq g.$

$c_f - c_g = \delta e^{n-1}$

Tfh e^{n-1} elemi kolánc: $\exists!\ \hat{e}^{n-1}$ $(n-1)$-cella, melyen nem nulla az e^{n-1}.

(n-2) váz fölött már adott a homotópia ← konst. homot.



$\hat{e}^{n-1}$

Az $(n-1)$-váz $\hat e^{n-1}$-től kül. celláira is kiterj. ← konst. homot.

Feltehető, hogy $f|_{sk_{n-1}} = *$, $g|_{sk_{n-1}} = *$

$\partial(\hat e^{n-1} \times [0,1]) \longrightarrow *$

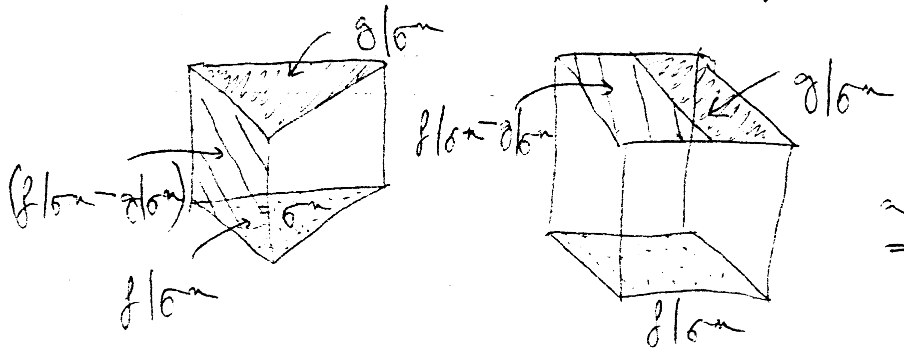
Kiterjesztem $\hat e^{n-1} \times [0,1]$-re úgy, hogy az $e^{n-1}(\hat e^{n-1}) \in G =$
$= \pi_n(K(G,n))$ elemet kapjam.

Megvan a homotópia az $(n-1)$ váz fölött.

Kiterj. az n váz fölé: ha ζ^n egy n-cella: $\partial \zeta^n \not\ni \hat e^{n-1}$

~~(akkor $\zeta^n \times [0,1] \to *$)~~ $\Rightarrow$ ~~ζ^n fölött konst. a homot.~~)

$\Rightarrow \exists$ homotópia $\zeta^n \times [0,1]$ fölött, mert $c_f(\zeta^n) = c_g(\zeta^n)$.



← így def-tük az összeadást

a korábra kiterjed
$\Rightarrow$ a prizmára is

Korábban megy a biz., ha e^{n-1} nem eleme. $\square$

$$\left.\begin{array}{l}[X/A, K(G,n)] = H^n(X,A;G) \\ \quad + \text{Puppe}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Kohomol. egzakt sorozat } (X,A)\text{-ra.}$$

Obstrukció elmélet

(X,A) CW pár, Y top tér

$f: A \cup X^{k-1} \longrightarrow Y$ adott, kiterjed-e X-re?

$\cap$

X - - $\exists$-e F

c_f - kolánc HF: c_f kociklus

$\sigma^k \longrightarrow [f|_{\partial \sigma^k}] \in \pi_{k-1}(Y)$

$\|$

$X \setminus A$-beli k-dim cella

$c_f(\sigma^k) = [f|_{\partial \sigma^k}] \in \pi_{k-1}(Y)$

$c_f \in C^k(X, A; \pi_{k-1}(Y))$

<u>Áll</u> $\delta c_f = 0$ 13.HF

<u>Tétel</u> a) f kiterjed $X^k \cup A$-ra $\iff c_f = 0$.

b) $[c_f] = 0 \iff f|_{X^{k-2} \cup A}$ kiterjed a k-vázra.

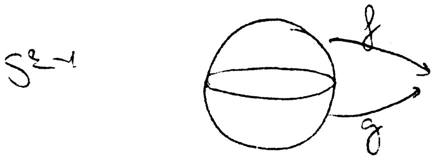
<u>Def</u> Különbség kolánc

$f, g : A \cup X^{k-1} \longrightarrow Y$, tfh $f|_{A \cup X^{k-2}} = g|_{A \cup X^{k-2}}$

$d_{f,g}$: $(k-1)$-kolánc

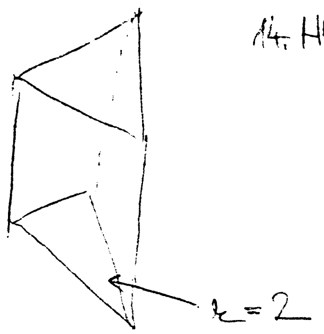
$d_{f,g}(\sigma^{k-1}) \in \pi_{k-1}(Y)$

c_f - kolánc



$$c_f - c_g = \delta d_{f,g}$$

14.HF, mint előbb



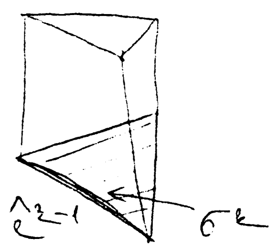
b) $\Rightarrow$ (ez az érdekes)

$[c_f] = 0 \Rightarrow c_f = \delta d$

$c_f(\sigma^k) = \delta d(\sigma^k) = d(\partial \sigma^k)$

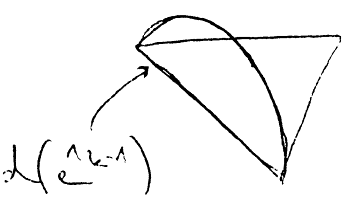
$\parallel$ def

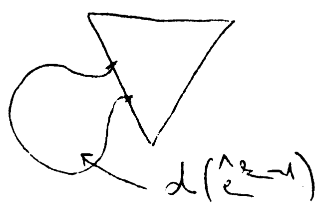
$[f|_{\partial\sigma^k}]$

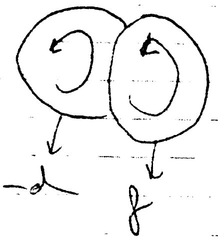


$\exists$ d elemi:

$\exists!\, \hat{e}^{k-1}$: $d(\hat{e}^{k-1}) \neq 0$



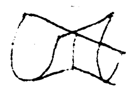




a megváltoztatott leképezés a peremen már 0-homotóp ⇒ kiterjed a k-vázra

⇐: kiterjed a k-vázra ⇒ meg lehet változtatni a (k−1) cellákon úgy, hogy kiterjedjen. Ezen változtatás ad egy (k−1)-koláncot, aminek a kohatára $= \pm c_f$. □

$f : M^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y) \to (x^2, xy, y)$

generikus leképezés. →  Whitney-esernyőből véges sok, máshol immerzió

Hogyan def. a gener. leképezések ekv. osztályait (átparam)? Osztályozni őket? (↓ sima pontot sima pontba)

6. előadás

Immerzióelmélet

Whitney, Smale, Hirsch, Gromov, Rourke–Sanderson

$f : M \looparrowright Q$ $\quad TM \rightarrowtail TQ$ (immerziók ⇝ nyalábok disztribúcióelm.)

Tétel (Hirsch)

$$\underset{f}{\mathrm{Imm}}(M^m, Q^q)\xrightarrow{} \underset{df}{\mathrm{Mono}}(TM, TQ) \text{ w.h.e.}$$

(C^∞-top. felett, C^0 top. felett)

(gyenge homot. ekv.: izo. a homot. csoportokon)

T_0-ban kölcs. egyért., ha $m < q$, vagy $m = q$ esetén M nyílt.

Rögz. $\varphi : M \to Q$ $\quad$ φ-vel homotóp immerziók reg. homot. oszt.?

$$\mathrm{Mono}(TM, \varphi^* TQ) = \Gamma(\mathrm{MONO}(TM, \varphi^* TQ))$$

(← két elem homotóp, ha a megf. szelések homotópok)

$$\mathrm{HOM}(TM, \varphi^* TQ) \supset \mathrm{MONO}(TM, \varphi^* TQ)$$

$$\downarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q) \supset V_m(\mathbb{R}^q) \downarrow$$

$M \underset{\text{Stiefel}}{=} M$

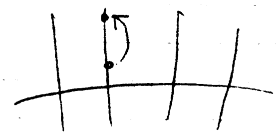
Példa $M^2 \looparrowright R^3$

$$\exists\ \mathrm{MONO}(TM^2, R^3)$$
$$\downarrow V_2(R^3) \cong SO(3)$$
$$M^2$$

nem kanonikus, elemenként csak

Két szelés ~~különbsége~~ eltérése: $M^2 \to SO(3)$

(az egyik szelésből ~~hogyan~~ milyen trafóval jutunk a másikba)



$$\Pi_0(\mathrm{Imm}(M^2, R^3)) \cong \Pi_0(\Gamma(\mathrm{MONO}(TM, R^3))) \approx [M, SO(3)]$$

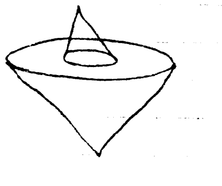
reguláris homot. osztályok

nem kanon

Puppe sorozat az $(M^2, \mathrm{sk}_1 M^2)$ párra $Y = SO(3)$

(X, A) Y Puppe: $[A, Y] \leftarrow [X, Y] \leftarrow [X/A, Y] \leftarrow$ ($X \cup CA$)

egzakt $\leftarrow [SA, Y] \leftarrow [SX, Y] \leftarrow [\ ,\ ]$



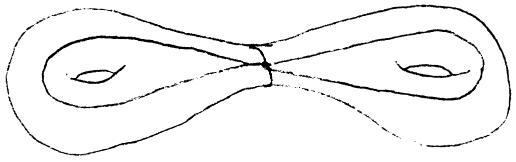
$$[\mathrm{sk}_1 M^2, SO(3)] \xleftarrow{1-1} [M^2, SO(3)] \leftarrow [S^2, SO(3)] = 0 \ (\Rightarrow \text{inj.})$$

$[\mathrm{sk}_1 M^2, SO(3)] = \mathbb{Z}_2^{2p}$ $(\mathbb{Z}_2^{q})$

$M^2 = A_p$ $M^2 = A'_q$

$M^2/\mathrm{sk}_1 M^2$, 1 db 2-cella van

szürj., mert a 2-cella ragasztó leképezése $\Pi_1(SO(3))$-ban 0-ba megy



$$\begin{array}{ccc} \alpha: \mathrm{sk}_1 M^2 & \longrightarrow & SO(3) \\ 3 \uparrow & \nearrow \text{kiterjed} & \\ \partial D^2 & \subset & D^2 \end{array}$$

$\alpha(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1})$ $\alpha(\ ) = 0$ mert $\Pi_1(SO(3))$ kommutatív ($M^2 = A_p$), a nem irányítható esetben ($M^2 = A'_q$) pedig $\Pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ miatt ($\forall$ elem rendje 2).

$[\mathrm{sk}_1 M^2, SO(3)]$ kilyukasztva M^2-t:

2 féle képpen csavarhatjuk (360°) a szalagokat

15. HF a) $f, g : S^2 \looparrowright R^3$ $\quad f \sim_r g$ (a gömb kifordítható)

b) $\pi_0(\mathrm{Imm}(S^n \underset{\text{öntranszv.}}{\looparrowright} R^q)) \approx \pi_n(V_n(R^q))$ (Smale)

c) $S^n \looparrowright R^{2n}$ csak a kettőspontok kis környezetét látjuk, mi a reg homot. osztály?

$n>1$ $\begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } n \text{ páros} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

d) $n=1$? látjuk az egész görbét

öf. a kettőspontok és a forgás között.

16. HF M^n stabilan parallelizálható, n páros

$\Rightarrow$ (M^n paral $\Leftrightarrow$ $\chi(M^n)=0$)

17. HF M^n stab. paral $\Rightarrow$ M^n-en $\exists\ \rho(n)$ db flen érintővektormező, ahol $\rho(n)$ = a flen mezők száma S^n-en

Spec $\nexists\ M^3$ stab. paral, de nem paral (mert S^3 paral). (megj: $\forall$ 3-dis ir. sok. paral)

M^7 —||—

Biz (Hirsch t. π_0-ra)

Volt: kiegyenesítési tétel:

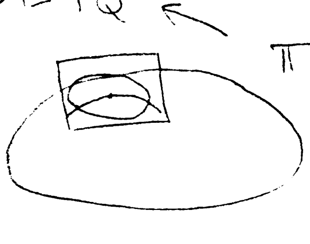
$M^n, v_1, \dots, v_k \hookrightarrow Q^q \times R^k$ $\quad q > n$, M^n kompakt

$\exists$ izotópiája $Q \times R^k$-nak, mely ezt átviszi $\tilde{M}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k$-ba, ahol $\tilde{v}_i \parallel e_k \leftarrow R^k$-ban az k-adik bázisvektor

Egyszerűs.: Tfh $\exists\ TM \rightarrowtail TQ$

$T_\varepsilon M \xrightarrow{exp} M$

$\forall$ fibrumon beágyazás (a 0 kis környezetében diffeo.)



π_0-ban szürjektív az $f \to df$ leképezés

$\varphi = \Phi$ által indukált $M \to Q$ leképezés.

Megmutatjuk: $\exists\ f : M \looparrowright Q$: $f \cong \varphi$

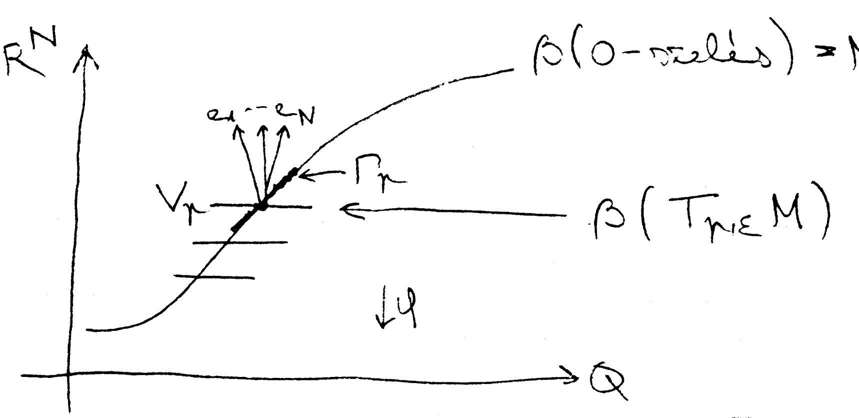
$T_\varepsilon M \xrightarrow{\text{projekció}} M \hookrightarrow R^N$

$T_\varepsilon M \overset{\Phi}{\rightarrowtail} T_\varepsilon Q \xrightarrow{exp} Q$

$M \subset T_\varepsilon M \overset{\beta}{\hookrightarrow} Q \times R^N$

$\uparrow$

0-szelés



<u>V_p</u> Q-ra vett vetítése inj. | Γ_p-nek R^N-re vett vetítése inj, mert az $M \hookrightarrow R^N$ differenciálja — és Γ kifeszítenek ~~nagy~~ egy 2m-dim teret.

$e_1, \dots, e_N$ az R^N bázisa eltolva ‖-an a $\beta(0\text{-szelés})$ pontjaiba, ⊥-ek V_p-re.

$$\bigcup_p V_p = TM \longrightarrow M$$
$$V_p \longrightarrow p$$
$$\bigcup_p \Gamma_p = TM \longrightarrow M$$
$$\Gamma_p \longrightarrow p$$

$\cup V_p$ és $\cup \Gamma_p$ is az érintőtér, van köztük egy i izomorfizmus.

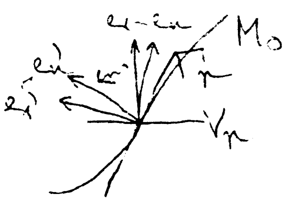
$u_V \in V_p$, $u_\Gamma \in \Gamma_p$ egymásnak i-nél megfelelő vektorok

$\exists$ ortog. transzf. $T(Q \times R^N)\big|_{M_0}$ $u_V \longrightarrow u_\Gamma$ egy forgatás, $\{V_p, \Gamma_p\}^\perp$ – fix forg.

A forgatás során $e_1, \dots, e_N \longrightarrow e_1', e_2', \dots, e_N'$

$e_1', \dots, e_N' \perp \Gamma_p$-re

$\perp d\beta(TM)$-re



$$(M_0, e_1', \dots, e_N') \hookrightarrow Q \times R^N$$

$\exists$ izotópia (kiegy. tétel), mely után $\tilde M_0, \tilde e_1, \dots, \tilde e_N$ ← függőlegesek

$\tilde M_0$ vetítése Q-ra immerzió.

Mivel csobbpiákat alkalmaztunk, ezért a kapott immerzió f-el homotóp.

<u>Megj.</u> Ha $M \subseteq \mathbb{R}^N$ leképezés tetsz. kicsinek választható (majdnem konstans) V_x és Γ_x közé kicsi, kicsit kell forgatni $\Rightarrow \forall f$ leképezés C^0-approximálható tetsz. pontossággal immerzióval

f C^1-leköp. C^1-approximálható

<u>Π_0-ban inj.</u> Az egész érvelést bevezorozzuk I-vel.

Mindenütt kicsi a változás (C^1-értelemben)

$\Rightarrow$ az elején és a végén az adott reg homot.

ort.-ban maradunk. (imm C^1-köny. imm) $\square$

<u>Plusz előadás</u>

$\Pi^S(3)$

$$\mathrm{Imm}(2,1) \approx \mathbb{Z}_{8}$$

<u>Megj.</u> $\Pi^S(2) \approx \mathrm{Imm}^{SO}(2,1) = \mathbb{Z}_2$

<u>Def.</u> V $\mathbb{Z}_2$-vektortér, $\langle , \rangle \in \mathbb{Z}_2$ nem elfajuló skal. szorzás

$q: V \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ kvadr. leképezés

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + 2\langle x,y \rangle$$

$\mathbb{Z}_2$ standard beágyazása $\mathbb{Z}_4$-be

$(V_1, q_1) \oplus (V_2, q_2) = (V, q)$ $\qquad V = V_1 \oplus V_2$

$\perp$-ek

$$q(\underset{V_1}{v_1} + \underset{V_2}{v_2}) = q_1(v_1) + q_2(v_2)$$

$(v_1, 0) + (0, v_2)$

Az ilyen kvadr. alakok félcsoportot alkotnak

<u>Def.</u> (V, q) neutrális, ha $\underset{\text{altér}}{\exists H}$: $\dim H = \frac{1}{2}\dim V$, $q|_H \equiv 0$.

részfélcsoport

Kvadr / Neutr = csoport mert $(V,q) \oplus (V,-q)$ neutrális

$\shortparallel$

$WQ(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$: Witt csoportja a $\mathbb{Z}_2$ vektortereken $\mathbb{Z}_4$ értékű kvadr. alakoknak

$WQ(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \approx \mathbb{Z}_8$

Megj: $WQ(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \overset{\text{triv. inv.}}{\cong} \mathbb{Z}_2$

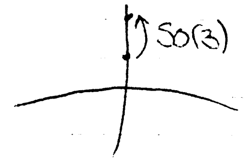
Kapcsolat a top-val:

$\mathrm{Imm}(M^2 \looparrowright R^3)$ $\qquad \overbrace{\mathrm{MONO}(TM, R^3)}^{\mu} \subset \mathrm{HOM}(TM, R^3)$

$$df \Big(\downarrow V_2(R^3) \cong SO(3) \quad \downarrow L(R^2, R^3)$$

$$M^2 \quad = \quad M^2$$

$\pi_0(\Gamma(\mu)) \qquad C(M^2, SO(3))$



ha itt egy szelést rögzítek,
~~SO(3)~~ $C(M^2, SO(3))$-mal paraméterezhetjük a szeléseket
(az eltolás fv.-nyel)

$\pi_0(\Gamma(\mu)) = [M^2, SO(3)]$

Puppe: $(M^2, sk_1 M^2)$ kanonikus CW-felb.

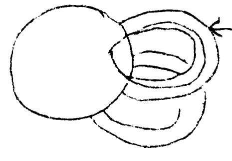
$[sk_1 M^2, SO(3)] \leftarrow [M^2, SO(3)] \leftarrow [S^2, SO(3)]$, $[S^2, SO(3)] = 0$

szürj. mert $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$

Kilyukasztva egy M^2-t az 1-váz egy immerziója egyértelműen terjed ki a 2-cellára.

$M^2 = A_p \qquad [sk_1 M^2, SO(3)] = \mathbb{Z}_2^{2p}$

$M^2 = A'_q \qquad$ —"— $\qquad = \mathbb{Z}_2^{q}$



← $SO(3)$-ban egy hurok, $\mathbb{Z}_2$ egy eleme

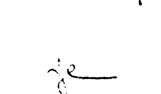
$H_1(M^2, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ homom.

az 1-váz kis környezetének immerziói (egyért. terjed ki a 2-cellára)

$f: M^2 \looparrowright R^3 \rightsquigarrow$ egy kvadr. alakot $H_1(M^2; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_4$

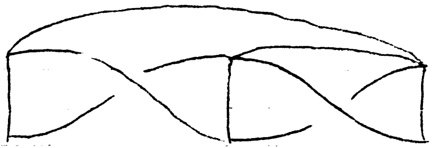
a 2-cella rögzített kiterjesztése $\mathbb{Z}_2$-ben 0-homológ $\longleftarrow$ $H_1(M^2 \setminus D^2; \mathbb{Z}_2)$

Egy hurok kis környezete szalag v. Möbius-szalag.



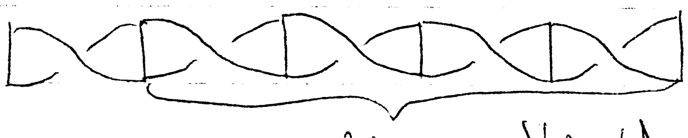
← egy generátor környezetének k-szori (szalaggal vett) fedéséhez egy rendel-
$k = 1, 2, 3, 4$

je a $k \in \mathbb{Z}_4$-et



$\pi_1(SO(3))$ generátora

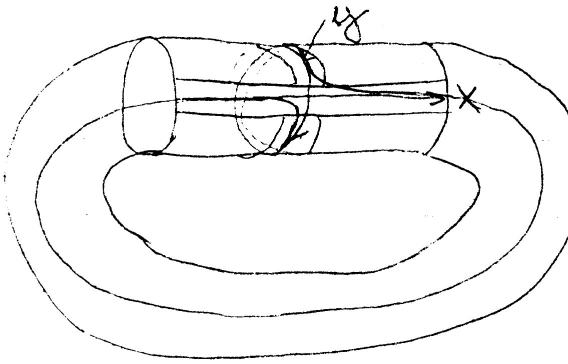
2-szer megcsavarva 0



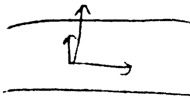
kiegyenesíthető

Ha M^2 a Möbius-szalag, akkor ennek 2 db reg. homot. osztálya van $\mathbb{R}^3$-ba, mert $[M^2, SO(3)] = \pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$. Hasonlóan a szalagnak is 2 féle immerziója van $\mathbb{R}^3$-ba. Ez összesen 4 féle immerzió, a q 4 lehetséges értéke.

$\langle , \rangle$ a két hurok metszési indexe.



$x+y$ először két görbe uniója, átépítjük úgy, hogy 1 görbe legyen

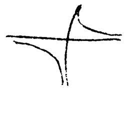


ez hány fordulatot tesz meg?

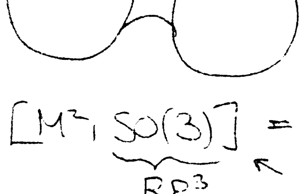
$q(x+y) = q(x)+q(y)+2\langle x,y\rangle$

(~~x-en 0-t,~~ y-on 360°-ot
az átépített x+y-on ~~360°-ot~~)

q: a kis környezeten a félfordulatok száma



minden metszetéből x-nek és y-nak 2 db félfordulatot tesz



ha diszjunktak, az átépítés után összeadódik

$[M^2, \underbrace{SO(3)}_{RP^3}] = Hom(H_1(M^2,\mathbb{Z}_2),\mathbb{Z}_2)$ ← egy rögz. immerzióból vett eltérések, affin tér

$[M^2, RP^\infty] = H^1(M^2,\mathbb{Z}_2)$

a $H^1(\, ,\mathbb{Z}_2)$ kohomológia osztály adja meg az immerziót

ebből is meg lehet adni a q-t (?)

Algebrai rész:

<u>Def</u> Braun inv. $q: V \to \mathbb{Z}_4$

$$\gamma(q) = \sum_{x \in V} i^{q(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\dim V}$$

<u>Áll</u> $\gamma: WQ(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \to \mathbb{Z}_8$ izomorfizmus

<u>Megj.</u> Ha a V-n a skalár szorzás izotróp, azaz $\langle x, x\rangle = 0 \ \forall x \in V \Rightarrow q$ csak páros értékeket vesz fel $=$

$= 2\bar{q} \quad \bar{q}: V \to \mathbb{Z}_2$

Ezért $i^{q(x)} = \pm 1$ Ekkor $\gamma =$ Arf invariánsa a $\bar{q}$-nak

<u>Biz</u>$^{(\text{megj.})}$ $q(0+0) = q(0) + q(0) + 2 \cdot 0 \cdot 0 \Rightarrow q(0) = 0$

$0 = q(2x) = q(x) + q(x) + 2\underbrace{\langle x, x\rangle}_{0}$ □

<u>K1</u> $\gamma(q_1 \oplus q_2) = \gamma(q_1) \cdot \gamma(q_2)$

<u>K2</u> q neutr. $\Rightarrow \gamma(q) = 1$

<u>K3.</u> Ha a V-n a $\langle , \rangle$ nem izotróp $\Rightarrow$

V felbomlik 1-dimenziósak direkt összegére

<u>K4.</u> $4q \approx -4q$ $\quad q \oplus q \oplus q \oplus q$

izotróp $\Leftrightarrow$ a felület irányítható

K1 $\Rightarrow$ homom

K2 $\Rightarrow$ $\gamma: WQ(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \to \mathbb{C}$ képezik

K4 $\Rightarrow$ $\operatorname{im}\gamma \subset \mathbb{Z}_8 \to 8$-adik egységgyökök

$V = \mathbb{Z}_2 \quad q(1) = \pm 1$ $\qquad q(x+y) = q(x) + q(y) + 2\langle x, y\rangle$ ből $x = y = 1$-et véve

$q_+ : (\mathbb{Z}_2, q_+(1) = 1)$ B^+ Boy felület

$q_- : (\mathbb{Z}_2, q_-(1) = -1)$ B^- tükörkép

$\mathbb{R}P^2$ egy immerziója

<u>Biz</u>$_{K1}$ $V = V_1 \oplus V_2$, $x = (x_1, x_2)$

$i^{q(x)} = i^{q(x_1)} \cdot i^{q(x_2)}$, $\langle x_1, x_2\rangle = 0$ miatt.

Összeszorzással adódik □

Biz. k2 $V = H \oplus L$ $q|_H \equiv 0$ $n = \dim V$

$$\gamma(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{\substack{h\in H\\ l\in L}} i^{q(h+l)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{\substack{h\in H\\ l\in L}} i^{q(l)} (-1)^{l\cdot h} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Big[\underbrace{\sum_{l\in L\setminus 0} \left((-1)^{l\cdot h} \cdot i^{q(l)}\right)}_{=0} + \operatorname{card}(H) \Big] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 1$$

~~$l = 0$~~ összeg

$l : H \to \mathbb{Z}_2$ nem elfajuló $(H = H^\perp)$
$h \to h \cdot l$
valódi szorzás

$l \notin H$ esetén $\exists\, h \in H$, melyre $l\,h \neq 0$ $(l \notin H^\perp)$

$H = H^\perp$ $q(h_1+h_2) = q(h_1) + q(h_2) + 2\langle h_1, h_2\rangle$
$\Rightarrow H^\perp \supseteq H$, de $\dim H^\perp = \dim H$ ($\langle , \rangle$ nem elfajuló) $\Rightarrow H^\perp = H$. □

Biz. k3 $x \longrightarrow \langle x, x\rangle = \langle c, x\rangle$ $\exists c \neq 0$ $\forall x \in V$

$\dim V \geq 2$ $\exists\, y \neq c$ $\langle y, y\rangle = 1$

(Mert. $\langle c, c\rangle = 0$ $\exists\, y \neq c$ $\langle y, y\rangle = 1$
$\langle c, c\rangle = 1$ $\langle y, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle c+y, c+y\rangle = 1$
$y \neq 0 \Longrightarrow c \neq c+y$)

$V = (y) \oplus (y)^\perp$
valódi sz. $|_{(y)^\perp}$ nem izotróp

Tfh. $\forall\, z \in (y)^\perp$ $\langle z, z\rangle = 0$
$\langle c, z\rangle = \langle z, z\rangle = 0 \Rightarrow c \in ((y)^\perp)^\perp = (y) \Rightarrow c = y$ ↯. □

(V, q), V-n a $\langle , \rangle$ anizotróp $\Rightarrow kq_+ \oplus lq_-$

Biz. k4 (V, q)

$W = V \oplus V \oplus V \oplus V \leftarrow V \oplus V \oplus V \oplus V$

$\varphi_1 : V \longrightarrow W$
$x \xrightarrow{\varphi_1} (0, x, x, x)$ $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 4 beágyazás
$x \xrightarrow{\varphi_2} (x, 0, x, x)$

$4(\oplus q)(\varphi_i(x)) = 3q(x) = -q(x)$ $i = 1,2,3,4$
Ua. 4 egyenletből $4q \simeq -4q$ □

Biz. vázl. γ izom:

$$\underbrace{(V,q) \oplus \overset{\swarrow \text{nem izotr.}}{(\mathbb{Z}_2,q_+) \oplus (\mathbb{Z}_2,q_-)}}_{\text{neutr.}} = kq_+ \oplus lq_- \overset{\text{mod neutrálisok}}{\simeq} (k-l)q_+$$

~~γ~~ $\to \varepsilon^{k-l}$ epi, mert ε összes lehetőségét megkapjuk

mono: $\gamma(V,q)=1 \Rightarrow k \equiv l \mod 8$

$8(V,q) \underset{\mathbb{Z}_4}{\approx} 4(V,q) \oplus 4(V,-q)$ neutr., mert a diag altéren 0 □

γ kobordizmus invariáns:

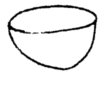
$f: M_f^2 \looparrowright R^3 \rightsquigarrow q_f: \underbrace{H_1(M^2;\mathbb{Z}_2)}_{V} \to \mathbb{Z}_4 \rightsquigarrow \gamma(q_f) \in \mathbb{Z}_8$

$g: M_g^2 \looparrowright R^3$

$f \overset{\text{kobord}}{\sim} g \Rightarrow \gamma(q_f) = \gamma(q_g)$

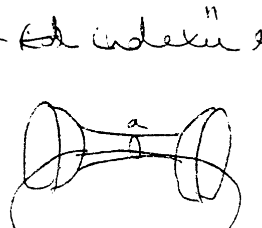
$h: W^3 \looparrowright R^3 \times [0,1]$ $\quad \partial W^3 = M_f \sqcup M_g$

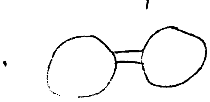
kritikus pontok között reguláris homot., nincs változás



S^2 jelenik meg 0 indexű krit. pont átlépésénél, a H_1^{*}-ében nincs változás, nem történik semmi. Hasonlóan a 3-indexű krit. pontnál

1-es indexű krit. ponton átlépés: megjelenik egy cső



Ha a megjelenő cső külön. új két komponenseket köt össze: nincs vált. 
(direktösszeg a homol. csoportokon)

Ha ugyanazt köti össze: a, b két új generátor

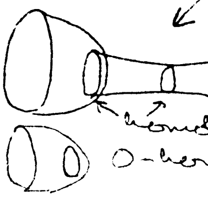
a $\perp$ az összes többire
b $\perp$ —||—

$x \in V \quad \sum i^{q(x)}$

új elemek: x, $x+a$, $x+b$, $x+a+b$ az x helyett

$q(x)$

$q(x+a) = q(x) + \overset{0}{\overset{\parallel}{q(a)}} + 2\overset{0}{\overset{\parallel}{\langle x,a\rangle}} = q(x)$



homológok

kezdetben — 0-homológ

$$q(x+b) = q(x)+q(b)+2\underbrace{\langle x,b\rangle}_{0} = q(x)+q(b)$$

$$q(x+a+b) = q(x)+q(a+b)+2\underbrace{\langle x,a+b\rangle}_{0} = q(x)+\cancel{q(a)}+q(b)+2\underbrace{\langle a,b\rangle}_{1}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\dim V+2}\sum \underbrace{i^{q(x)}+i^{q(x)}}_{2\cdot i^{q(x)}} + i^{\cancel{q(x)+q(b)}} + i^{\cancel{q(x)+q(b)+2}}$$

$\square$

$f: M^2 \looparrowright R^3 \# B^+ \# B^-$ / $RP^2 \#$ szétbomlik $B^\pm$-ok összegére

$\downarrow$

a Boy-felületek a reprezentánsok

γ_f egyért. megh. az immerziót

V-bord. osztályból reprezentáns $B^+ \# B^- \sim 0$

7. előadás

HF 18.) 1.) $S^1 \looparrowright R^2$ melyek határolnak imm-t: $\exists F^2, \partial F^2 = S^1$

19.) 2.) $\exists$ olyan imm., mely két lényegesen különböző ($\nexists$ a síknak diffeom, mely áttviszi) immerzált felületet határol $g: F^2 \looparrowright R^2$, $g|_{\partial F^2} = f$

20.) 3.) Hirsch t. $\Rightarrow$ kiegyenesítési t.

$TM \rightarrowtail TN$ | $f: M^n, \nu \looparrowright R^{n+k+1}$ $k>0$ (ν ← normálmező)

f reg homot. $g: M^n \looparrowright R^{n+k} \subset R^{n+k+1}$

21.) $\nexists$ $RP^2 \subset R^4$, melynek $\exists$ norm mezője

22.) $\exists$ $S^2 \looparrowright R^4$, melynek $\nexists$ norm mezője

Megoldások:

HF 16.) M^n stab. paral és n ps. $\Rightarrow$ (M^n paral $\Leftrightarrow \chi(M^n)=0$)

Biz: Hirsch t. $\Rightarrow$ (M^n stab. paral $\Rightarrow M^n \looparrowright R^{n+1}$)

$$TM^n \oplus \varepsilon^1 \cong \varepsilon^{n+1} \longleftrightarrow R^{n+1}$$

$$TM^n \rightarrowtail TR^{n+1} \longrightarrow R^{n+1} \leftarrow \text{egy fibrum}$$

(M^n ir. és $M^n \looparrowright R^{n+1} \Rightarrow M^n$ stab. paral)

$\nu: M^n \to S^n$, $x \mapsto \nu(x)$, $x \in R^{n+1}$ $\qquad \deg \nu = \dfrac{\chi(M^n)}{2}$

$\nu \simeq 0$

$[M^n, S^n] \to \mathbb{Z}$

$TM^n \approx \nu^*(TS^n)$

$$\begin{array}{ccc} TM^n & \xrightarrow{N} & TS^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu: M^n & \longrightarrow & S^n \end{array}$$

$TM^n \approx \nu^*(TS^n) = \text{triv}$

mert ν 0-homotóp □

17.) M^n stab. paral $\Rightarrow \exists\, S(n)$ mező M^n-en

S^n-en a flen érintőmezők száma

Biz $TM^n \approx \nu^*(TS^n)$. □

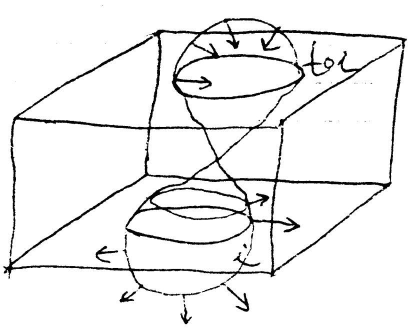
15.) a) $S^2 \looparrowright R^3$ 1 van $S^6 \looparrowright R^7$ 1 van

b) $\mathrm{Imm}(S^n, R^q) = \pi_n(V_n(R^q))$

4.) $\exists$ kifordítása $i: S^n \hookrightarrow R^{n+1}$-nek $\Rightarrow S^{n+1}$ paral.

$i \sim_{reg} t \circ i$

Biz



$S^n \times [0,1] \looparrowright R^{n+1} \times [0,1]$

$\cap$

$R^{n+1} \times R^1$

$S^{n+1} \looparrowright R^{n+2}$

$\nu: S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$

$$\begin{array}{ccc} TS^{n+1} & \xrightarrow{N} & TS^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu: S^{n+1} & \longrightarrow & S^{n+1} \end{array}$$

$\nu^*(TS^{n+1}) \approx TS^{n+1}$

$(x,t) \to (f_t(x), t)$

ν sose mutat az északi pólusba (felfele) $\Rightarrow \nu \simeq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \nu^*(TS^{n+1}) \approx TS^{n+1}$ triv. □

S^1, S^3, S^7 paral $\Rightarrow S^0, S^2, S^6$ lehet csak kifordítható

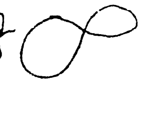
$S^6 \looparrowright R^7 \quad \pi_6(SO(7)) = \mathrm{Imm}(S^6, R^7)$

$SO(8) \xrightarrow{SO(7)} S^7$ fibr. $\Rightarrow \pi_6(SO(7)) \approx \pi_6(SO(8)) \approx \pi_6(SO(N)) = 0$

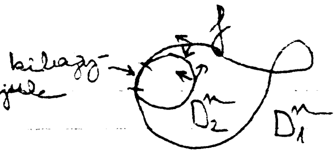
15.)
c) $S^n \looparrowright R^{2n} <$ $\mathbb{Z}$ n ps. v. $n=1$; $\mathbb{Z}_2$ n ptl >1

$\mathrm{Imm}(S^n, R^{2n}) \approx \pi_n(V_n(R^{2n}))$

of. univerzál csop.

f 

f egy pont kis környezetében megegyezik a standard immerzióval.



A közös részen megegyezik a két trivializáció.

$$S^n = D_1^n \cup D_2^n \longrightarrow V_n(\mathbb{R}^q)$$

$$\mathrm{Imm}(S^n, \mathbb{R}^q) \longrightarrow \pi_n(V_n(\mathbb{R}^q))$$ f Smale-invariánsa

$$\mathrm{Sm}(f) = \mathrm{Sm}(g) \Rightarrow f \text{ reg homot. } g$$

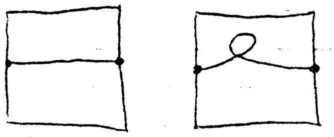
HF Smale-inv. homom.

$\exists$ imm $S^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$ 1 db kettősponttal

Whitney: $\exists\, D^n \looparrowright D^{2n}$ 1 db kettőspont

$\partial D^n \hookrightarrow \partial D^{2n}$ standard

$n=1$

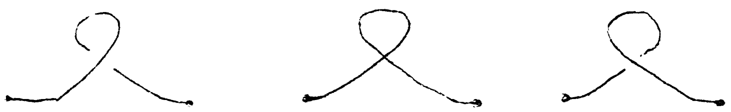


$I^1 \hookrightarrow I^2$ standard beágy.

$n=2$ $I^2 \looparrowright I^4$

$I \times [-1,1] \looparrowright I^3 \times [-1,1]$ szinttartó az imm.: $I \looparrowright I^3$ 1-paraméteres családja

$t<0$ $t=0$ $t>0$



stb.: $f_0^{(n)}: I^n \looparrowright I^{2n}$ 1 db kettősp. (p, q az ősei)

$f_t: I^n \looparrowright I^{2n+1}$

$h_t: I^n \longrightarrow I = [-1,1]$

$h_t|\partial I^n \equiv 0 \quad h_t(p) = -\frac{t}{2} \quad h_t(q) = \frac{t}{2}$

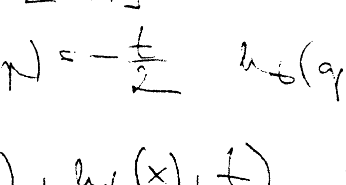
$$f_0^{(n+1)}(x,t) = \left(f_0^{(n)}(x), h_t(x), t\right) \quad x \in I^n,\ t \in [-1,1] = I.$$

Páros n-re előírhatjuk az előjelét.

n ptlan >1 (pontosabban hozzárend.)

$\pi_0(\mathrm{Imm}(S^n, \mathbb{R}^{2n})) \to \mathbb{Z}_2$

$\pi_n(V_n(\mathbb{R}^{2n})) = \mathbb{Z}_2$



két imm. pontosan akkor reg homot., ha a kettőspontok számának paritása megegyezik n ps. $\pi_n(V_n(\mathbb{R}^{2n})) = \pi_0(\mathrm{Imm}(S^n, \mathbb{R}^{2n})) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ← a kettőspontok előjeles összege

$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ (a Whitney konstr. miatt szürj.)

tudunk kettőspontokat gyártani: egy kis darabja az immerziónak: ◯ D^n ide csinálunk kettőspontot

<u>Tétel</u> (Whitney) $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$

<u>Whitney trükk</u>

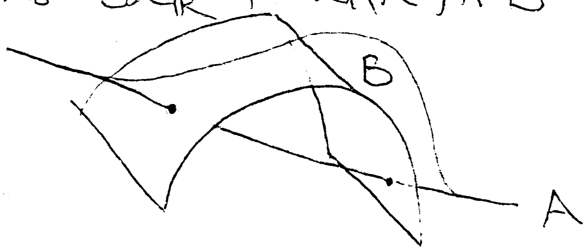
$A^a_{ir}, B^b_{ir} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ (vagy más 1-öf. sok.)

$a+b=n\geq 5$ (← a 4 dim ezért más)

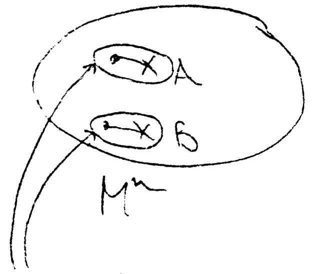
$A \pitchfork B$ p, q két ellentétes előjelű metszéspont.

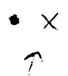
$\exists\, h_t: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ izotópia: h_t fix $A\cap B\setminus\{p,q\}$ körül

$h_0 = id_{\mathbb{R}^n}$, $h_1(A^a)\cap B = A\cap B\setminus\{p,q\}$.



Trükk ⇒ T. $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$





$\forall$ kettőspont mellett csinálunk egy ellentétes előjelű kettőspontot (~~ha n ps~~).

összekötjük, vesszük kis környezetét, ez lesz az A és B, erre a trükk úgy, hogy csak A és B belseje változzon □

<u>8. előadás</u>

<u>T.</u> (Whitney–Graustein) $f,g: S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$

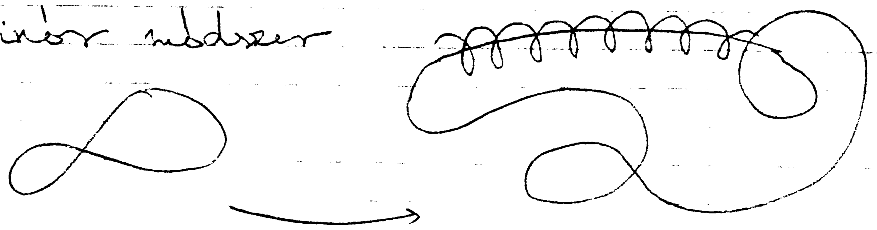
$\hat f = \frac{f'}{\|f'\|}: S^1\longrightarrow S^1$ $\hat g: S^1\longrightarrow S^1$

$\hat f \simeq \hat g \overset{1}{\underset{\text{triv}}{\Longleftrightarrow}} f,g$ reg. homotóp

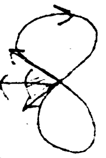
(Hirsch-tételből triv.)

„Biz" (Thurston)

telefonzsinór módszer



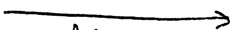
lineáris homotópiánál keletkeznek szingularitások (csúcsok), de a spirál ezt kiegyenlíti (a képben)



n(t)

ebbe a vízszintes irányba nem esik érintővektor $\Rightarrow (f+n)' \neq 0$

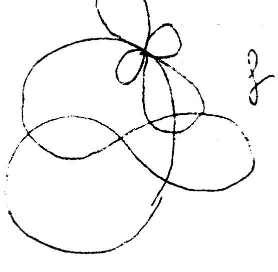
$(f+n)(t)$



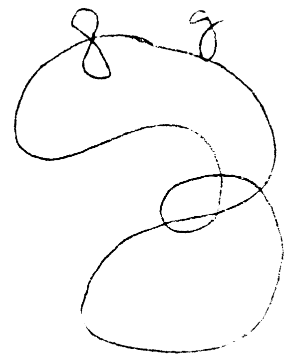
$f(t)$ egyenes vonalú mozgás

majdnem egyenes görbéhez hozzáadva n-t nem lesz $(f+n)' = 0$.

$(f+n)' \neq 0$, ha f = egyenes v. ahhoz közeli (megf. irányú)



f



g

megy az f mentén a kezemben egy 8-as alakú autópályán egy autó, elején a 8 mérete 0, közben nő, egy idő után olyan nagy, hogy a 8 deriváltja sokkal nagyobb, mint f-é, el lehet a 8-ast forgatni úgy, hogy a deriv. ne legyen 0, és az állása olyan legyen, mint ha a g-n menben volna forgatás nélkül (itt használjuk, hogy f és g forgása ugyanaz).

Lin. homotópia f és g között, és ∀ pillanatban hozzáadjuk a 8-ast

$sf+(1-s)g$ + a nagy 8-as.

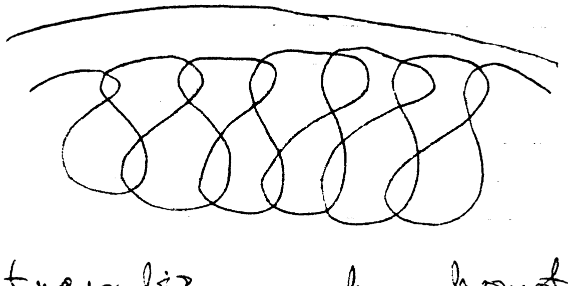
Itt végén visszazsugoríthatjuk a 8-ast, mert a g-n úgy áll, mint az ott megadott 8-as.

1) $f \longrightarrow f_\delta = f(t) + \varepsilon \cdot \delta_f(t)$

2) $f + N\delta_f \xrightarrow{\text{lin homot.}} g + N\cdot\delta_f$

3) $g + N\delta_f \longrightarrow g + N\cdot\delta_g$

4) $g + N\delta_g \longrightarrow g$



Whitney biz. $\quad h_u$ homot. $\hat f$ és $\hat g$ között.

Á. $h: S^1 \to S^1$ mikor lesz egy zárt síkgörbe deriváltja?

$f(t) = \int_0^t h(\tau)\,d\tau$

f zárt síkgörbe, ha $\int_0^1 h(\tau)\,d\tau = 0$. □

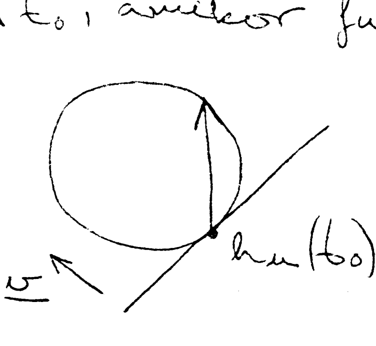
$\exists\, h_u$ homot.: $h_0 = \hat f$, $h_1 = \hat g$. $\quad (h_u: S^1 \to S^1)$

f_u homot f és g között: $\quad \dot f_u = h_u(t) - \int_0^1 h_u(\tau)\,d\tau$

Miért lesz az f_u reg. görbe? $\quad \int_0^1 \left(\kappa - \int_0^1 \kappa\right) = 0$

Tfh γ forgás $\neq 0$.

Tfh $\exists\, t_0$, amikor $\dot f_u(t_0) = 0$. $\quad h_u(t_0) = \int_0^1 h_u(\tau)\,d\tau$



$h_u(t_0) = \int_0^1 h_u(\tau)\,d\tau$

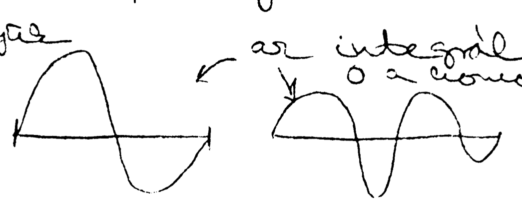
$$\int_0^1 \underbrace{\langle h_u(t) - h_u(t_0), \underline{v} \rangle}_{\geq 0}\,dt = 0$$

$\Rightarrow h_u(t) \equiv h_u(t_0)$, de a konstans görbe forgása 0.

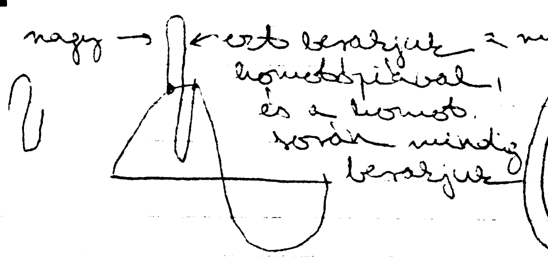
Ha $\gamma = 0$, akkor $\exists\, h_u$ homot., mely $\forall\, u$-ra nem konst.:

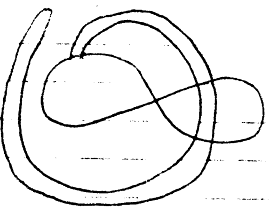
R^1 felemelése

$h_u: S^1 \longrightarrow S^1$



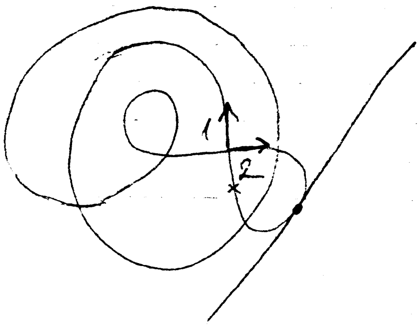
nagy → ← ezt berakjuk a maximumra homotópiával, és a homot. során mindig berakjuk





□

HF $S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$ forgásának leolvasása a kettőspontokból:



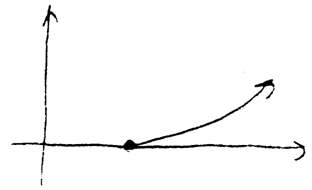
vegyünk egy támaszegyenest, ezen a görbe ~~kettőspontját~~ kezdőpontját, innen indulva $\forall$ kettőspont kap előjelet, mert a két ágat az áthaladás sorrendjében ~~előjelezhet-~~ számozhatjuk

$$\gamma(f) = 2\pi\left(\mu + (N^+ - N^-)\right)$$

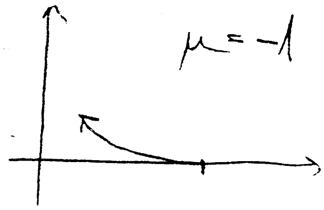
+kettősp. −kettősp.

$\mu = \pm 1$

a görbe az $y \geq 0$ félsíkban



$\mu = +1$



$\mu = -1$

A görbe kifordítása során mindig van olyan kettőspont, ahol a két érintőirány egybeesik.

8. előadás

Whitney trükk és szerepe a topol.-ban

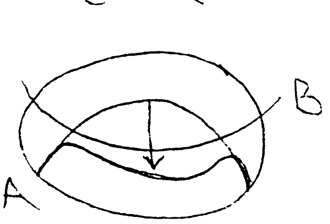
$A^a, B^b \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ (vagy 1-ösz. n-dim sok.-ban)

$a + b = n$

$A \pitchfork B$ p, q két ellentétes előjelű metszéspont.

$\exists\, h_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izotópia: $h_0 = id$

$h_1(A) \cap B = A \cap B \setminus \{p, q\}$

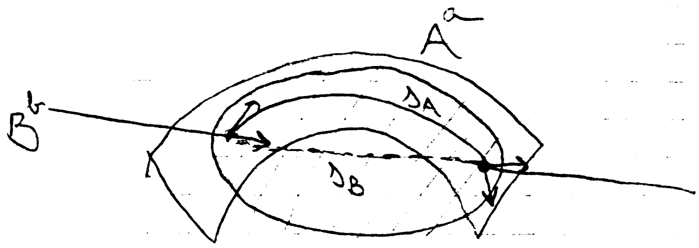


$n \geq 5$, $b \geq 3$

alkalmazás: $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$

s_A út $p \rightsquigarrow q$ A-ban

s_B út $p \rightsquigarrow q$ B-ben



$\gamma_A \cdot \overline{\gamma_B} \cong 0 \Rightarrow \exists\, h : D^2 \to \mathbb{R}^n \quad h|_{\partial D^2} = \gamma_A \cdot \overline{\gamma_B}$

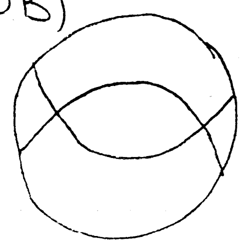
$n \geq 5 \Rightarrow$ Feltehető, hogy h beágyazás.

$h \perp A, B$ $\quad \gamma_A, \gamma_B$ mentén

$\downarrow$

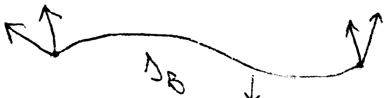
$dh(D^2) \not\subset TA, TB$

$h^{-1}(A \cup B)$



γ_A mentén vegyünk fel $(a-1)$ db lin. flen normálvektort A-ban. Ezen vektorok p-ben és q-ban $\perp$-ek a B-re és D^2-re.

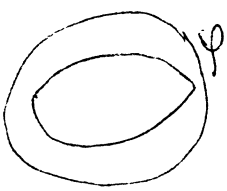
Ha γ_B mentén felveszünk ugyanennyi $(a-1)$ db vektort B-re és $h(D^2)$-re $\perp$-en. p-ben, q-ban a megadott legyen



$[0,1] \to O(a-1)$ ← 2 db komponens

$\exists$, mert p-ben, q-ban ellentétes előjelű a metszet.

$C = \gamma_A \cdot \overline{\gamma_B}$ mentén kapunk $(a-1)$ db D^2-re $\perp$ vektormezőt. D^2 normálnyalábja $= \varepsilon^{n-2}$.



$\varphi : C \longrightarrow V_{a-1}(\mathbb{R}^{n-2})$

$(b-2)$-öf. $\quad \exists\, b \geq 3 \Rightarrow 1$-öf

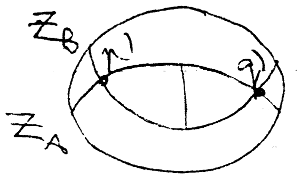
$\varphi \cong 0$ kapjuk!

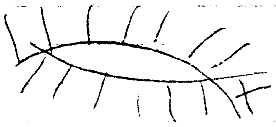
$\varepsilon^{n-2} = \varepsilon^{a-1} \oplus \varepsilon^{b-1}$

← (D^2 feletti $\forall$ nyaláb triv.)

⇒ ∃ egy diffeomorfizmusa a standard modellnek a D^2 környezetében. (a megf. részeket A-ra ill. B-re mennek)

Standard modell: $\underset{\substack{\cup \\ Z_A \cup Z_B}}{D^2_\lambda} \times \underset{x}{\mathbb{R}^{a-1}} \times \underset{y}{\mathbb{R}^{b-1}}$





Elég a st. modellen egy olyan izotópiát megadni, mely eltünteti a p', q' metszéspontokat és $D^2 \times 0 \times 0$ egy körny.-én kívül identitás.

Ψ_t izotópia a körlapon

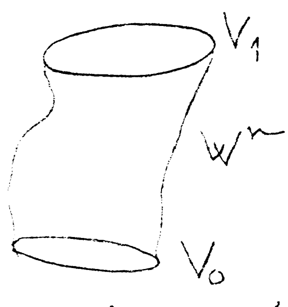
$\Psi_{t\cdot\lambda(S(x,y))}$ az izotópia a $D^2 \times \{x\} \times \{y\}$ körlapon □

Milnor: Lectures on the h-cobordism theorem.

(2-dim sz. kiterjesztése ≥5 dimenzióba approximálható beágyazással) (feltettük, h $a,b > 1$)

<u>h-kobordizmus tétel</u>

$(W^n, V_0^{n-1}, V_1^{n-1})$ kobordizmus, $n \geq 6$



$\pi_1(V_0) = \pi_1(V_1) = \pi_1(W) = 0$

h-kobordizmus:

$V_0 \subset W$ homot. ekv. $\Leftrightarrow H_*(W,V_0) = 0 \overset{\text{Poincaré dual}}{\Longleftrightarrow} H^*(W,V_1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H_*(W,V_1) = 0 \Leftrightarrow V_1 \subset W$ homot. ekv.

univ. együttható formula

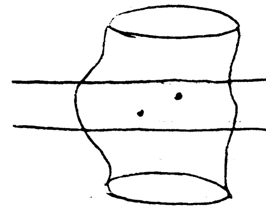
$\Rightarrow W^n \underset{\text{diffeom}}{\approx} V_0 \times [0,1]$. Spec. $V_0 \underset{\text{diff}}{\approx} V_1$.

Donaldson: $n=5$-re példa W^n-re, ami $\underset{\text{diff}}{\not\approx} V_0 \times [0,1]$.

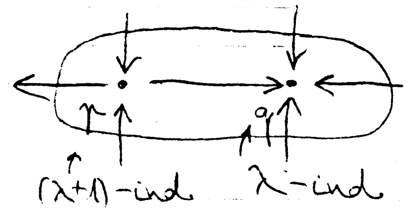
<u>Biz</u> (vázlat)

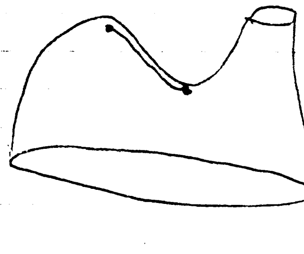
$f: W \to [0,1]$ Morse $f^{-1}(0) = V_0$, $f^{-1}(1) = V_1$

1) 1. eltávolítási lemma (gyenge)

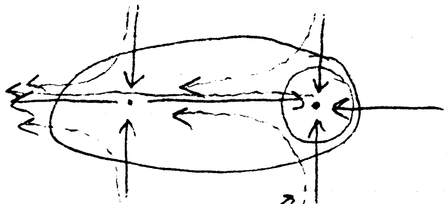


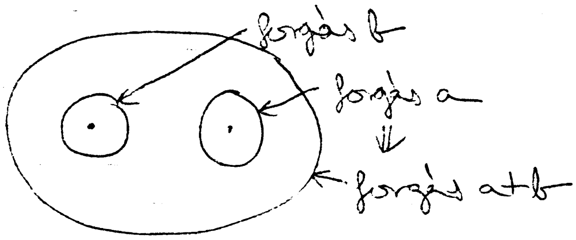
∃ a kobord olyan, h csak 2 szomsz. indexű krit. pont van
∃! grad (szerű) vonal, mely a nagyobb indexűből a kisebb indexűbe megy.



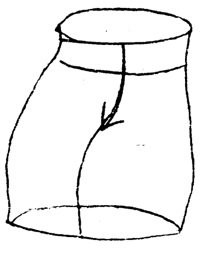


(nyíl irányába csökken)



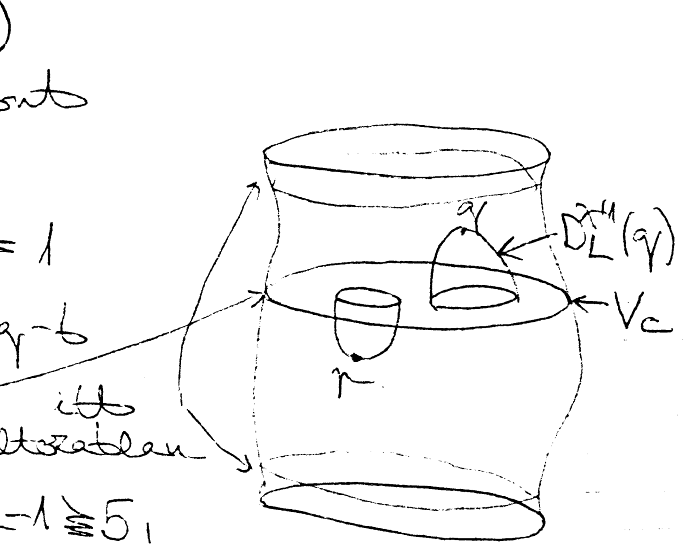


ki lehet egyenesíteni
a vektormezőt, hogy a peremen a forgás 0 legyen.



ξ az eredeti v.mező, ξ' az új
$c\cdot\xi'$ az integrálgörbéken $\int$-va a
fv. az alsó peremen a korábbi f-et
kapjuk

2) 2 eltáv.-i lemma (erős)
Tfh p, q két krit. pont
λ $\lambda+1$ indexű
$$\#_{alg}\left(S_L^{\lambda}(q)\cap S_F^{n-\lambda-1}(p)\right)=1$$
El lehet távolítani p-t és q-t



Tétel: ha f-nek ∄ 1 ill. $(n-1)$ indexű krit. pontjai
$\ast \Longrightarrow$ ha 1-öf és $n-1 \geqq 5$,
akkor ∃ deform, mely eltávolít 2 db metszéspon-
tot

Ezt tudjuk realizálni a ξ deformálásával

* mert $W \cong V_C \cup$ magas dim golyók, ha nincsenek 1 ill $(n-1)$ indexű krit. pontok (V_C-re két oldalra golyókat ragasztunk). $\pi_1(W)=0 \Rightarrow \pi_1(V_C)=0$.

ad cellafelbontást, CW-homológiája   ∀ csoportban egy bázis

$f \rightsquigarrow C_*$ lánckomplexus (W, V_0) és benne egy bázis, ha a lefele menő golyókon kiválasztunk egy irányítást.
(a krit. pontok adják a bázist)

<u>Alg lemma</u>

C_* alg lánckompl. (végesen gen szabad Abel-csop-okból) ∀ bázistól ∀ bázishoz át lehet térni elemi trafókkal

1. $b_1, \dots, b_k \to b_1+b_2, b_2, \dots, b_k$
2. $-b_1, b_2, \dots$
3. permut

<u>Alg áll.</u> C_* acikl. lánckompl $\Rightarrow \exists$ spec bázis (z, b) $\partial b = z$

ilyen párok uniójából előállítható a bázis

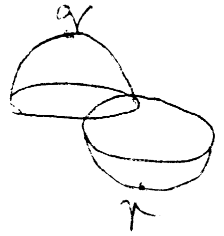
<u>Biz</u> $C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \to C_0 \to 0$

$b_i, \dots, b_{n_0}$ $z_1, \dots, z_{n_0} \to$

splittingnél a képek

$0 \to \mathrm{im}\,\partial_2 \to C_1 \to \cancel{C_0} \to 0$ felfele indukcióval

$C_1 = C_0 \oplus \mathrm{im}\,\partial_2$ $\ker \partial_1 = \mathrm{im}\,\partial_2$ □

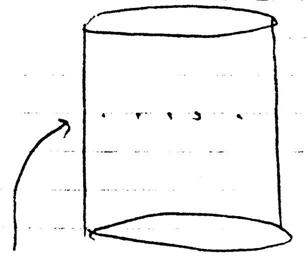


$\partial z = b$ ← a metszési index adja meg, hogy ∂z-ben hányszor szerepel a b.

Ha az f-ből kapott bázis spec bázis, akkor készen vagyunk (a kritikus pontok eltüntethetők).
Elég: ∀ elemi bázistrafó realizálható a f-r. ill a ξ mező modifikálásával

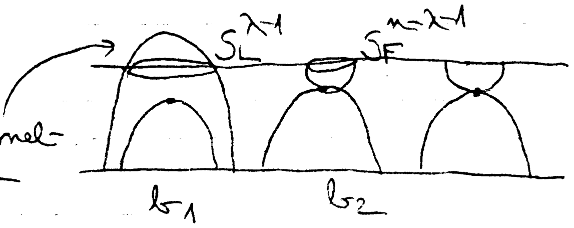
3.: a krit pontokat átszámozzuk
2.: az irányítást mi választjuk

1. elemi trafót kell!



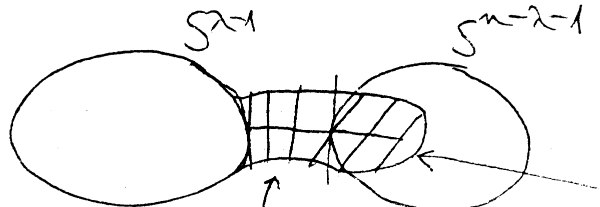
egy szinten vannak a λ-indexűek, kivágjuk ($\to$ más indexű nincs)

felemel-jük



csúsztatás

V^{n-1}-ben:

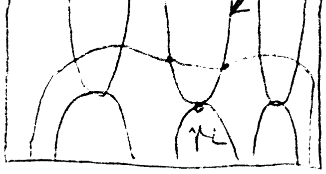


a gömb egy darabkáját eltoljuk, hogy $S^{n-\lambda-1}$ érintőterére $\perp$ legyen

ξ deformációja úgy, hogy az új $S_L^{\lambda-1}$ ez legyen

<u>Áll.</u> Az új fv. és vmező épp a $b_1+b_2, b_2, \dots, b_k$ bázist realizálja

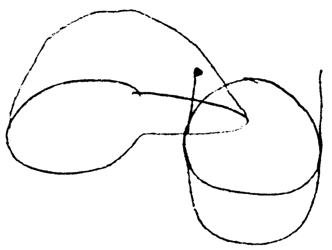
$D_F^{n-\lambda}(p_i)$ $\quad D^\lambda$ tetsz. beágyazott golyó W-ben



$$\partial D^\lambda \subset V_0$$

$$[D^\lambda] = \sum \alpha_i \cdot b_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_i = D^\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{algebrai}}}{\cap} D_F^{n-\lambda}(p_i) \qquad \text{(a fokszám)}$$



$$[D_1^\lambda] \rightsquigarrow [D_1^\lambda] + [D_2^\lambda]$$

$$b_1 \rightsquigarrow b_1 + b_2$$

<u>Plusz előadás</u>

<u>Ekvivariáns kobordizmusok</u>

Sima involúciók

(M^n, T) kobordizmuscsoportja $I_n(\mathbb{Z}_2)$

zárt

$(M_0^n, T_0) \sim (M_1^n, T_1)$ ha $\exists\, (W^{n+1}, T)$, amire

$T|_{M_0^n} = T_0$, $T|_{M_1^n} = T_1$.

$\mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2$ Grassmann $\qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2$

Tétel $0 \longrightarrow I_n(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow[i_*]{Fix} \bigoplus_{j=0}^{n} \mathfrak{N}_j(BO(n-j)) \xrightarrow[J]{\partial} \mathfrak{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2) \to 0$

egzakt.

bordizmus csoport,

$f_0 : M_0^n \to X$

$f_1 : M_1^n \nearrow$

$W^{n+1} \xrightarrow{F}$ $\qquad F|_{M_0} = f_0$, $F|_{M_1} = f_1$

Def $\mathfrak{N}_i(\mathbb{Z}_2)$ = Szabad involúciók az i-dim sok-on kobord. csoportja

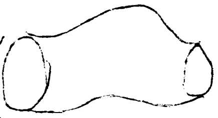
T. $\mathfrak{N}_i(X) = \bigoplus_{\alpha+\beta=i} H_\alpha(X;\mathbb{Z}_2) \otimes \mathfrak{N}_\beta$ kobordizmus csop.

Áll $\mathfrak{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2) = \mathfrak{N}_{n-1}(RP^\infty)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathfrak{N}_j$

Biz tk.

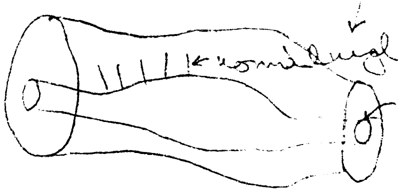


$$\begin{tikzcd} S^N \arrow[d] & V \arrow[l, "ekvivar."'] \arrow[d] \\ RP^N & V/T \arrow[l] \end{tikzcd}$$

□

Def 1) $i_* = \sum_j [F^j, \nu^j]$ jól def

a fixpontok alkotta sokaság és a normálnyalábja



$\updownarrow$

$\mathfrak{N}_j(BO(n-j))$

elemei j-dim sokaságok $n-j$ dim nyalábbal (visszahúzzuk)

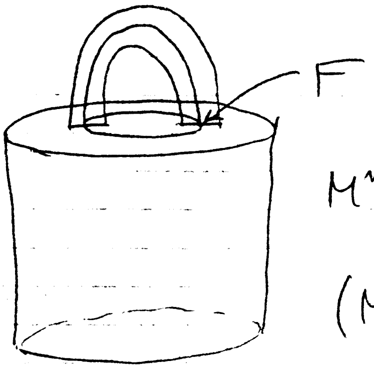
2) $J\,[(V, \xi)] = [S(\xi), (-1)]$

gömbnyaláb $\qquad$ fibrumonként (-1)-gyel szorzás

Biz 1.) i_* mono

$[(M^n, T)] \in I_n(\mathbb{Z}_2)$ $\qquad i_*[(M^n, T)] = 0$

0-kobordáns a fixponthalmaz



$M^n \times [0,1]$

$(M^n, T) \sim$ Szabad inv.

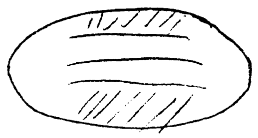
Á Szabad inv. 0-t repr. $I_*(\mathbb{Z}_2)$-ben

Biz.: Szabad inv. $= S(\ell) = \partial D(\ell)$ (-1) szorz.

ℓ egy vonalnyaláb (-1)-gyel szorzás □

2) J epi : $S(\ell) = \partial D(\ell)$

3.) $J \circ i_* = 0$ $\qquad \partial(M \setminus \mathring{D}(\nu)) = S(\nu)$



4.) $J(V, \xi) = 0$

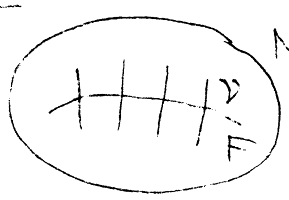
$M^n = D(\xi) \cup_{\partial W = S(\xi)} W^n$, T inv.: $D(\xi)$-n szorzás (-1)-gyel

W^n-en ami volt

$S(\xi) = \partial W^n$ inv.-val

$i_*([M,T]) = [(V,\xi)]$ □

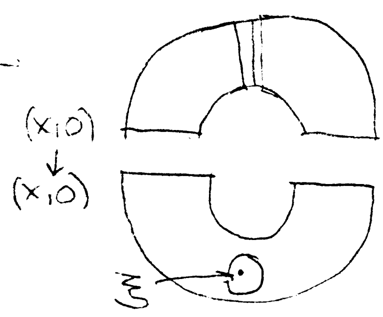
Áll.



(M^n, T) $\qquad M^n \sim RP(\nu \oplus \varepsilon^1)$

projektív lezárt — a fixpontok normál nyalábja

Biz.



$M \times [0,1]$ $\quad H_1$

H_3

H_2 $\quad M \times [0,1]$

$T_3 : H_3 \to H_3 \qquad (x,t) \in H_1 \longrightarrow (x, 1-t) \in H_1$

$(x,t) \in H_2 \longrightarrow (Tx, 1-t) \in H_2$

$\mathrm{Fix}(T_3) = \begin{cases} M \times \frac{1}{2} \subset H_1 \\ \mathrm{Fix}\, T \times \frac{1}{2} \subset H_2 \end{cases}$

$$H_3 \setminus \underset{\text{környezete}}{U}(\mathrm{Fix}(T_3))\big/ T_3 = M \amalg RP(\xi)$$
$$\xi = \nu \oplus \varepsilon^1$$
□

Köv. M, szabad inv $\Rightarrow M \sim 0$

HF. M-en hat $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ fixpontmentesen $\Rightarrow M \sim 0$.

<u>Ha fixpont sokaság</u>

$\chi(F) \equiv \chi(M) \mod 2$ (szimpl. felosztás, a fix sokaságon kívüli szimplexek párosával vannak).

T1. $\left.\begin{array}{l} \forall k \geq 0 \ \exists \varphi(k) \quad (\varphi(k) \approx 2{,}5k) \\ \forall n \geq \varphi(k) \ (M^n, T),\ [M^n] \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim \mathrm{Fix}(T) \geq k$

T2. $\left.\begin{array}{l} \chi(M) \equiv 1 \ (2) \quad (\dim M = 2n) \\ (M, T) \end{array}\right\} \Rightarrow \dim \mathrm{Fix}(T) \geq n$

Pl. RP^2-n $\nexists$ inv. izolált fixpontokkal.

Biz T1. k rögz. $\mathcal{M}_n = \bigoplus_{j=0}^{k} \mathfrak{N}_j(BO(n-j))$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{2k} \arrow[r, "I_*"', "BO(t)\subset BO(t+1)"] \arrow[d, "J"] & \mathcal{M}_{2k+1} \arrow[r, "I_*"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "I_*"] & \mathcal{M}_n \arrow[r, "I_*"] \arrow[d, "J"] & \mathcal{M}_{n+1} \arrow[d, "J"] \\
\mathfrak{N}_{2k-1}(\mathbb{Z}_2) & \mathfrak{N}_{2k}(\mathbb{Z}_2) \arrow[l, "\Delta"'] & \cdots \arrow[l, "\Delta"'] & \mathfrak{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2) \arrow[l, "\Delta"'] & \mathfrak{N}_n(\mathbb{Z}_2) \arrow[l, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

sz. ért. nyalábbal → ~~fix a sz. nyalábot~~ $\oplus \varepsilon^1$

Def Smith homomorfizmus $\Delta: \mathfrak{N}_n(\mathbb{Z}_2) \to \mathfrak{N}_{n-1}(\mathbb{Z}_2)$

$$\begin{array}{ccc} V^n & \xrightarrow{f} & S^N \\ \cup & & \cup \\ f^{-1}(S^{N-1}) = U^{n-1} & \longrightarrow & S^{N-1} \end{array}$$

f ekvivar. az involúcióra nézve (S^N-en a (-1)-gyel szorzás)

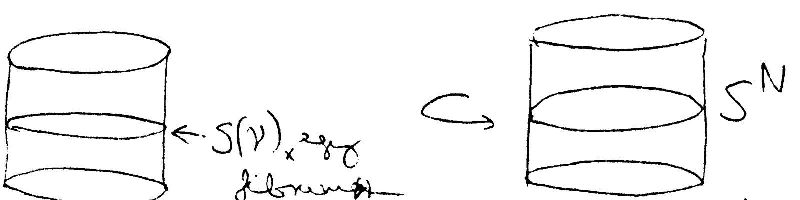
jóldef. (bordizmussal nem) (S^N-be, S^K-ba: nagy számban homotópok)

áll: a diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd}
{[F, \nu]} \arrow[r, "I_*"] \arrow[d, "J"] & {[F, \nu \oplus \varepsilon^1]} \arrow[d, "J"] \\
{[S(\nu), (-1)]} & S(\nu \oplus \varepsilon^1) \arrow[l, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$S(\nu) \subset S^N$ ekvivar. $\rightsquigarrow$

$S(\nu \oplus \varepsilon^1) \hookrightarrow S^{N+1}$

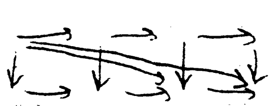


S^N-be

$[0,1]$-gyel beszorozzuk a leképezést, majd alul-felül összeragasztjuk $\rightsquigarrow$ $S(\nu)\oplus\varepsilon^1 \to S^{N+1}$ leképez., melynek S^N őse $S(\nu)$.

Ezek mind véges csoportok

$K_n = \mathrm{Ker}\, J\circ(I_*)^{n-2k}$



Komm. $\Rightarrow$ $K_{n+1}\subset K_n$

$\mathcal{M}_{2k}$ véges $\Rightarrow$ $\exists\, n_0 : \forall\, n\geq n_0 : K_n = K_{n+1}$.

$n=\varphi(k)=n_0+1$ jó!

$\alpha = i_*([M^n, T])$ $\qquad$ $J i_*([M^n,T]) \underset{\text{egz.}}{=} 0$

$\exists!\, \beta\in\mathcal{M}_{2k}$: $(I_*)^{n-2k}(\beta)=\alpha$, mert I_* izom-ok, ha $n>2k$

(lehasad trivi a nyalábból dim. miatt) $\quad i_*([M,T]) = \alpha$

$\beta\in K_n = K_{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccc} \beta & \xrightarrow{\approx} & \xrightarrow{\approx} & \cdots & \longrightarrow \alpha & \longrightarrow & I_*\alpha \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & [S(\nu),(-1)] & & 0 \end{array}$$

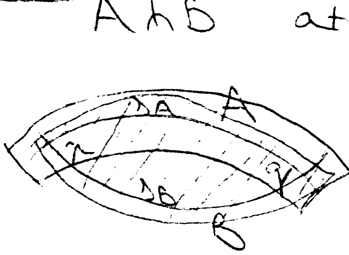
$$\lightning \quad 0\neq [M] \overset{\text{láttuk}}{=} \underbrace{[RP(\nu\oplus\varepsilon^1)]}_{\overset{\shortparallel}{0}} \Leftarrow [(S(\nu\oplus\varepsilon^1),(-1))]$$

faktor

□

10. előadás

W.-trükk: javítás: $A\pitchfork B$ $\quad a+b=n$ $\quad V^n$



+ feltétel: γ és η összeköthető ν_A ill. ν_B utakkal

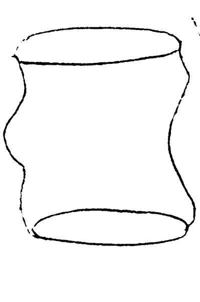
Miért $\exists$ törlap? Feltesszük, hogy $\exists$.

Ha $a\geq 3$, $b\geq 3$, akkor van törlap

(A és B kodimenziója is ≥ 3, a hurok 0-homotóp, a kapott törlapot A-ra és B-re transzverzálissá tesszük)

$a=1$ v. 2 $\quad \pi_1(V\setminus(A\cup B))=0$ feltétel kell.

h-kobord. t.:



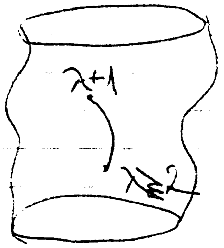
$\forall$ 1-öf

$H_*(W,V_0)=0$

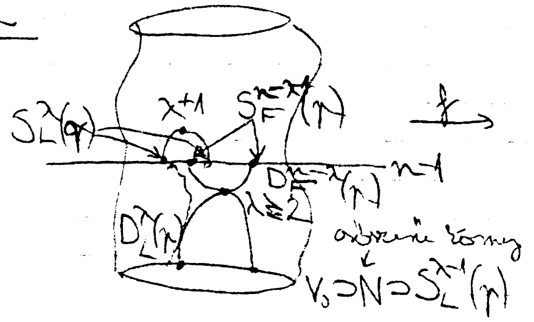
$n\geq 0$

$\Rightarrow W^n \underset{\text{diff}}{\approx} V_0\times[0,1]$

1. eset: $n-2 \geq \text{ind} \geq 2$



2. eset:



Ellentétes előjelű metszéspontok eltávolíthatók $\Leftarrow$ Whitney-trükk

$\lambda, n-\lambda-1 \geq 3$ esetén alkalmazható a trükk ✓

$\lambda = 2 \quad \underbrace{\pi_1\left(V \setminus \left(S_L^\lambda(q) \cup S_F^{n-\lambda-1}(p)\right)\right)}_{X} = 1$ kéne

$\pi_1(X) = \pi_1\big(\underbrace{V \setminus S_F^{n-\lambda-1}(p)}_{Y}\big)$, mert $S_L^2(q)$ ≥ 4 kodimenziós.

$Y \underset{\text{diff}}{\cong} V_0 \setminus S_L^{\lambda-1}(p)$ (integrálgörbék menti mozgás)

$V_0 = (\mathcal{S}) \; (V_0 \setminus S_L^{\lambda-1}) \underset{N\setminus S_L}{\cup} N$

Van Kampen:

$$\begin{array}{ccc} & 1 = \pi_1(V_0) & \\ =1 \Leftarrow \pi_1(V_0 \setminus S_L) \nearrow & & \nwarrow \mathbb{Z} = \pi_1(N) \\ & \nwarrow \mathbb{Z} = \pi_1(N \setminus S_L) \nearrow & \end{array}$$

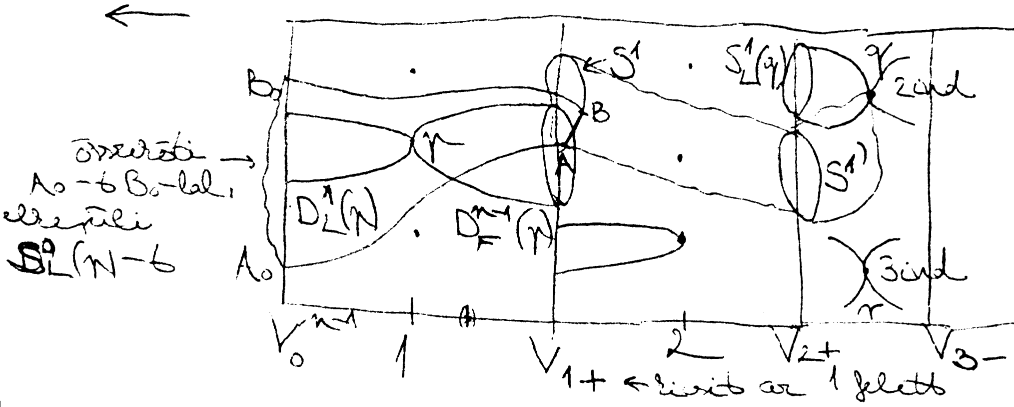
$N = S^1 \times (D^{n-2} \setminus \{0\})$

(vagy: $S_L^1(q)$-t kidobva π_1 nem változik a nagy kodimenzió miatt) □

1 és (n−1) indexű krit. pontok eltávolítása:

1. eset: Első eltáv. lemma visszafelé is elvégezhető (lehet csinálni egy kell $\lambda+1$ indexű krit. pontot) (ahol nincs ving)

$\leftarrow$



Áll: $\exists S^1 : |S^1 \cap S_F^{n-2}(p)| = 1$, $S^1 \subset V_{1+}$

Biz. $\underset{\text{szakasz}}{\overline{AB}} \pitchfork S_F^{n-2}(p) = 1$

A, B-t a grad. mező mentén $A_0 B_0 \subset V_0$-ba

$\gamma_0 \subset V_0$-ban γ_0 elkerüli $\bigcup_i S^0_L(p_i)$-t. ξ-vel

visszaviszve γ_0-t V_{1+}-ba elkerüli $S_F^{n-2}(p)$-t. □

(V_{1+} nem felt. 1-öf, ezért S^1-re nem húzható korlap)

S^1 elkerüli a D_L^2-eket (feltehető)

S^1-et $\subset V_{1+}$ $\xrightarrow{\xi}$ V_{2+}-ba: $S^{1\prime}$

V_{2+} és V_{3-} között generálunk egy 2 és egy 3 indexű krit. pontot (α)

V_{2+} 1-öf, mert $W \cong V_{2+} \cup D^{i_j}$, $\forall i_j \geq 3$

(V_{2+}-ra balra ill. jobbra golyók vannak ragasztva)

$\Rightarrow V_{2+}$-ban izotópok az $S^1_L(r)$ és $S^{1\prime}$

Deformáljuk V_{2+} és $V_{2+\varepsilon}$ között ξ-t: $S^1_L(q) = S^{1\prime}$

Gyenge eltáv. l. $\Rightarrow$ p, q eltávolítható. (a megf. görbék 1 pontban metszik egymást)

Marad r, de ő 3-indexű. □

α $\exists f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ egy kompakton kívül $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$,

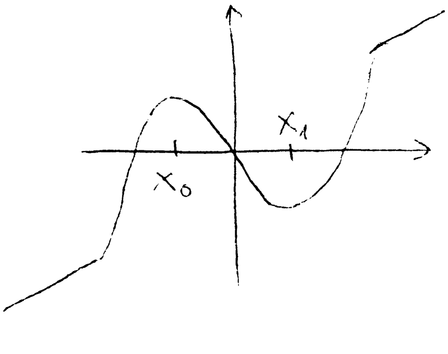
f-nek 2 kritikus pontja van: p_1, p_2 $\quad ind(p_1) = \lambda$, $ind(p_2) = \lambda + 1$

$f(p_1) < f(p_2)$

Biz $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{n-\lambda-1}$
(x, y, z)

$S(x)$ kompakt tartójú fv.-t $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

$x + S(x)$



$x + S(x)$-nek 2 krit. pontja x_0, x_1

Tek. $x + S(x) - y^2 + z^2$ krit. pontja $\mathbb{R}^n$-en $(x_0, 0, 0)$, $(x_1, 0, 0)$

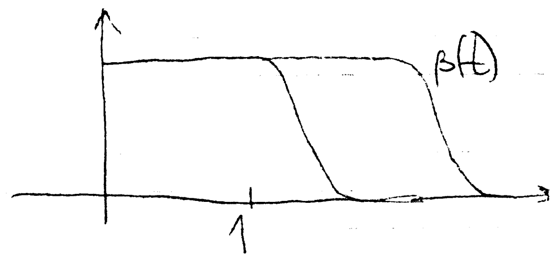
Válasszunk 3 sima fv.-t: $\alpha, \beta, \gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ kompakt tartójukra: 1.) $\alpha(t)=1$ ha $|t|\leq 1$

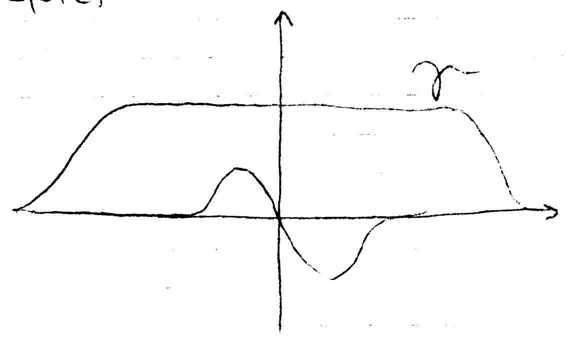
2.) $|\alpha'(t)| < \frac{1}{\max S(x)}$ $\forall t$

3.) $\beta(t)=1$ ha $\alpha(t)\neq 0$

4.) $\gamma(x)=1$ ha $S'(x)\neq 0$

5.) $|\gamma'(x)| < \frac{1}{\max t\beta(t)}$





$$f(x) = x+S(x)\cdot\alpha(y^2+z^2) + \gamma(x)(-y^2+z^2)\cdot\beta(y^2+z^2)$$

Megj.: a) $f-x$ kompakt tart.

b) ahol $\alpha=1$ (és ezért $\beta=1$) és $\gamma=1$ ott

$$f = x+S(x)-y^2+z^2$$

c) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 1+S'(x)\cdot\alpha(y^2+z^2) + \underbrace{\gamma'(x)(-y^2+z^2)\cdot\beta(y^2+z^2)}_{|\ |<1}$$

$(-y^2+z^2)\beta(y^2+z^2) < (y^2+z^2)$

Ha $S'(x)\neq 0$ vagy $\alpha(y^2+z^2)=0$ $\Big\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\neq 0$.

Tehát krit. pont csak ott lehet, ahol $S'(x)\neq 0$ és $\alpha(y^2+z^2)\neq 0 \overset{3)}{\Rightarrow} \beta(y^2+z^2)=1$

$S'(x)\neq 0 \overset{4)}{\Downarrow} \gamma=1$

Ha $\gamma=1$ és $\beta=1 \Rightarrow \operatorname{grad} f = \big(1+S'(x)\alpha(y^2+z^2),\ 2y(S(x)\cdot\alpha'(y^2+z^2)-1),\ 2z(S(x)\cdot\alpha'(y^2+z^2)+1)\big)$

2) $\Rightarrow S(x)\cdot\alpha'(\ )\pm 1\neq 0$

$\operatorname{grad} f = 0 \Rightarrow y=0,\ z=0 \Rightarrow \alpha=1$. □

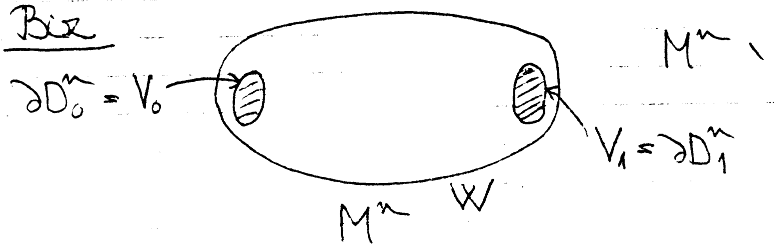
A h-kobord. t. alkalmazásai

Ált. Poincaré sejtés $n\geq 5$ dim.-ban, sima kategóriában

Eredeti Poincaré sejt.: M^3 1-öf zárt top. sok. ⇒ M^3 homeomorf S^3-mal

Tétel. $n \geq 5$ M^n 1-öf sima zárt, $H_*(M^n) \approx H_*(S^n)$
⇒ M^n homeom S^n (nem felt. diffeomorf) (Smale)

Biz



$M^n \setminus (D_0^n \cup D_1^n)$

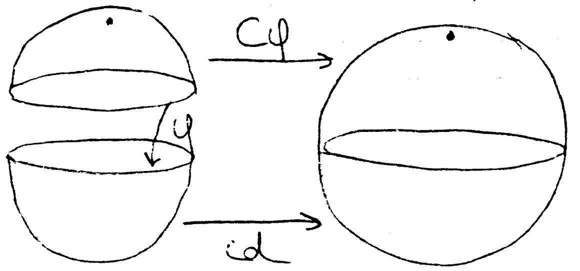
$H_*(W, V_0) = 0$

⇓ h-kobord.

$W \approx \underset{\partial D_0^n}{\overset{\shortparallel}{S^{n-1}}} \times [0,1]$

$D_0^n \cup (S^{n-1} \times [0,1]) \approx D^n$

(W) $M^n = D^n \cup_\varphi D_1^n$ $\varphi : \partial D^n \xrightarrow[\text{diffeom}]{} \partial D_1^n$



$C\varphi$ a φ kúpja

homeom. (de esetleg nem diffeom, É-ben lehet csúnya)

csavart gömb (nem diffeom. a gömbbel, a felső félgömbön nem terjed ki a diffeom.)

S^7-en ∃ 28

T. (az n-dim gömb jellemzése)

W^n sima, kompakt, 1-öf, ∂W 1-öf $n \geq 6$ ⇒

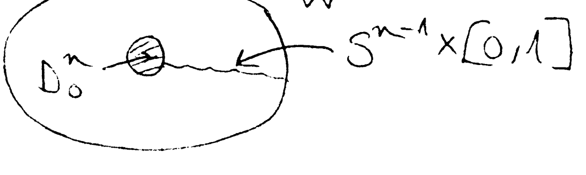
Ekv.: 1.) W^n diffeom. D^n

2.) W^n homeom D^n-nel

3.) W^n homot. ekv. D^n-nel

4.) $\tilde{H}_*(W) = \tilde{H}_*(D) = 0$ $X \to *$ $\tilde{H}_0(X) = Ker(H_0(X) \to H_0(*))$

Biz elég: 4.) ⇒ 1.)



(mint fent)

$S^{n-1}\times(1-\varepsilon,1] \cup S^{n-1}\times[1,2]$

$(1-\varepsilon,1]\cup[1,2] \approx (1-\varepsilon,1]$

11. előadás.

F: 24.) $S^1 \looparrowright S^2$ hány reguláris homot., tóruszon, tetsz. felületen?

25.) $\exists$-e a tórusznak kifordítása?

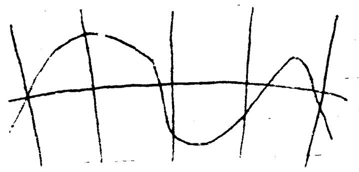
$i: T^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ kívül kék, belül piros $\overset{?}{\sim}_r$ $j: T \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ fordítva

26.) $f,g: M^{2k} \looparrowright \mathbb{R}^{3k}$, $f\sim_r g$, öntranszverzálisak

$\Delta_2(f) \looparrowright M^{2k}$ kettőspontok | $\Delta_2(g)$

ν_f nyaláb: normálnyaláb | ν_g

Euler-szám:



$e(\nu_f)$: önmagával transzverzálissá tesszük, s a metszésszámot ("önmetszések száma")

Igaz-e, hogy $e(\nu_f)=e(\nu_g)$?

27.) $\mathrm{Imm}(n,k) \approx \pi^s_{n+k}(\underbrace{MO(k)}_{T\gamma_k \text{ Thom-tér}})$

Smale tétel

$$\pi_0(\mathrm{Imm}(S^n,\mathbb{R}^q)) \approx \pi_n(V_n(\mathbb{R}^q))$$

Biz (vázlat)

$X^q_{n,s} = \mathrm{Imm}(D^n,\mathbb{R}^q)$, s db normálvektorral $\nu_1,\dots,\nu_s$, $n+s<q$

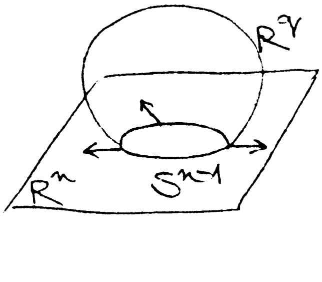
Egy pontban normalizált.

$Y^q_{n,s} = \mathrm{Imm}(S^n,\mathbb{R}^q)$, —"—

$\exists$ egy Serre-fibrálás: $X_{n,s} \to Y^q_{n-1,s+1}$ (Smale lemma)

$X^q_{n,s} \cong *$

a gömböt saját maga mentén behúzzuk, majd lineárissá tesszük ($\mathbb{R}^q$ mentén kiegyenesítjük):



fibrum $F \cong Y^q_{n,s}$

$\varphi_t(f)(x) = \frac{1}{t} f(tx)$, $\varphi_0(f)(x) = df(x)$ (f immerziót a differenciáljába visszük)

Egzakt sorozatból $\pi_j(Y^q_{n,j}) \approx \pi_{j+1}(Y^q_{n-1,j+1})$

$$\pi_0(Y^q_{n,0}) \approx \pi_n(Y^q_{0,n}) \approx \pi_n(V_n(\mathbb{R}^q))$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^q \times V_n(\mathbb{R}^q)}$$

□

Hirsch t. (Gromov biz.)

$TM^n \rightarrowtail R^q \Rightarrow \exists$ immerzió $M^n \looparrowright R^q$.

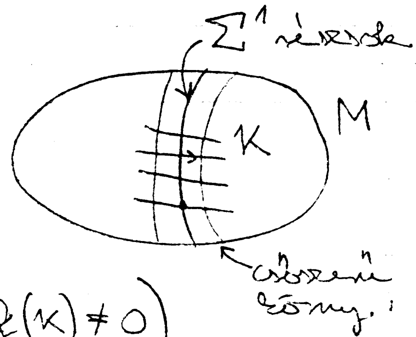
„Biz" $\omega_1, \dots, \omega_q$ 1-formák (a $TM^n \rightarrowtail R^q$ koord. leképezései adják) $Ker_i = Ker\,\omega_i$

injektív $\Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{q} Ker_i = \{0\}$ (*)

Kell: (*) megtartásával $\omega_i \rightsquigarrow df_i$-re cserélni (egzakt formákra cseréljük).

1. lépés: Elhagyjuk ω_q-t.

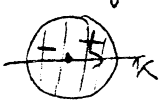
$M \supset \Sigma^1 = \{x \mid \underbrace{\bigcap_{i=1}^{q} Ker_i}_{K} \neq 0\}$



Tfh. $K \notin T\Sigma^1$.

Kell egy f fv., amire $K(f) \neq 0$ ($\Leftrightarrow df(K) \neq 0$)

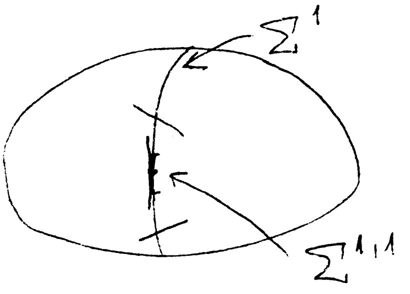
Környé:



először K-n definiáljuk f-et, egy adott irányba nőjön (K-t irányítjuk: amerre így poz.), majd M-re kiterjesztjük

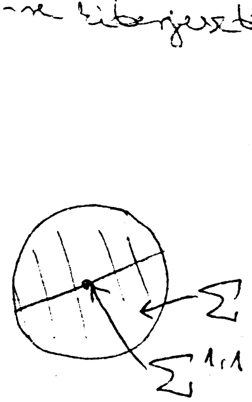
Ha $\exists x \in \Sigma^1$: $K_x \subset T_x\Sigma^1$.

$M \supset \Sigma^{1,1} = \{x \in \Sigma^1 \mid K_x \subset T_x\Sigma^1\}$.



Tfh. $K \notin T_x\Sigma^{1,1}$. $\Sigma^{1,1}$-en ~~tetsz.~~ fv.

ezt kiterjesztjük először Σ^1-re, majd ott a maradék pontokra



ha nem

$\Sigma^{1,1,1} \subset \Sigma^{1,1} \subset \Sigma^1$, stb.

Mert $M\times I$ fölött elsimítva kapjuk:

$\pi_0(\mathrm{Mono}(TM,\mathbb{R}^q)) = \pi_0(\mathrm{Imm}(M,\mathbb{R}^q))$, ha $n<q$. □

Gromov tétel

$\varphi: M \longrightarrow N$

$$\begin{array}{c} \mathrm{MONO}(TM, \varphi^*TN) \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

Holonom szelések (aminek a differenciálja)

$\uparrow$ w.h.e. (gyenge homot. ekv.)

Tetsz. szelések

M^m sok. $E(M) \longrightarrow M$ sima nyaláb „természetes" módon

Természetes:

1) $\forall N^m \quad E(N) \longrightarrow N$

2) $U \subset N$ nyílt $\quad E(U) = E(N)|_U$

3.) $f: U \xrightarrow{\cong} V \quad \bar{f}: E(U) \to E(V)$

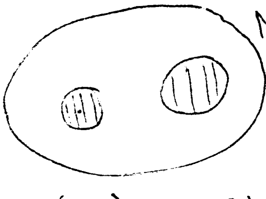
$\overline{f\circ g} = \bar{f}\circ\bar{g}$, $\overline{id} = id$

(tehát E a sima sok.-ok és leképezések kategóriájából funktor a sima nyalábokba)

Példák: 1.) $E(M) = TM$

2) $E(M) = M\times X$ (triv. nyaláb)

$D(M)$ a lok. diffeomorfizmusok pszeudocsoportja



M

lok.: M nyílt részét M nyílt részébe viszi

pszeudocsop.: kompozíció a szorzás, ha értelmes

$\Gamma E(U)$ szelések $\quad$ ~~$f: U \to V$~~ $f: V \to U$

$\Gamma E(U) \longrightarrow \Gamma E(V)$

$\sigma \longmapsto \bar{f}^{-1}\circ\sigma\circ f$

$E(M) \longrightarrow M$

$E^r(M) \longrightarrow M$ = $E(M)\to M$ szeléseinek r-jet nyalábja

$\cap$ def $\qquad$ (elnevezés)

$j^r(M, E(M))$ azon részhalmaza, mely a lok. szelések r-jetjeiből áll

$E_0^r(M) \subset E^r(M)$ $\quad D(M)$ invariáns nyílt részhalmaz

$\Gamma_0(E(M)) =: \Gamma_0(M) = \{E(M) \to M$ azon szelései, melyek r-jetjei $\in E_0^r(M)\}$

$\Gamma(E_0^r(M)) =: \Gamma(M) = \{$azon szelései $E^r(M) \to M$-nek, melyek $\forall$ pontra $\in E_0^r(M)\}$

<u>Tétel.</u> M nyílt (nincs kompakt komponense) $\Longrightarrow$

$j^r : \Gamma_0(M) \longrightarrow \Gamma(M)$ w.h.e.

<u>Példák</u> k-merziók ($\geq k$-rangú leképezések)

N^q
M^m

$E(M) = M \times N \qquad r = 1 \qquad E_0^1(M)$

$\Gamma E(M) = \{f : M \longrightarrow N\}$

$E^1(M) = j^1(M, N)$

$$\begin{array}{ccc} E^1(M) & & j^1(M,N) \\ \downarrow & & \downarrow L(T_xM, T_yN) \\ M & \longleftarrow & M \times N \end{array}$$

$E_0^1(M) = \{A \in L(T_xM, T_yM) \mid \mathrm{rk}\, A \geq k\}$

$\mathrm{Imm}_k(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(TM, TN)$ w.h.e., ha M nyílt.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Imm}_k(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(TM,TN) \\ \| & & \| \\ \Gamma_0(M) & & \Gamma(M) \end{array}$$

($\geq k$-rangú $M \to N$ sima leképezések)

Nem igaz zártakra (M zárt).

<u>Megj.</u> Igaz immerziókra ($k = \dim M$) köv. a Hirsch t. $\quad \dim M < \dim N$.

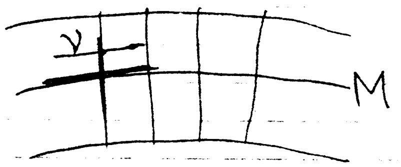
Bl: $TM \overset{\varphi}{\rightarrowtail} TN \Longrightarrow \exists$ imm

$\nu = \overline{\varphi}^* TN / TM = TM^{\perp} \subset \overline{\varphi}^* TN$

$\phi : TM \oplus \nu \xrightarrow{\approx} TN$

$M = D(\nu)$ nyílt gyűjtőnyaláb

$\exists\ \phi' : T(D(\nu)) \rightarrowtail TN$



$$T(D(\nu))\big|_M = TM \oplus \nu$$

a $D(\nu)$ más pontjait előbb M-re projektáljuk, majd az érintőteret ennen így képezzük TN-be injektíven

$\overset{\text{Gromov t.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $\underset{M}{\overset{D(\nu)}{\cup}} \propto N$.

□

Masahisa Adachi: Embeddings and Immersions.

(péntek 13-a után kutatás, apu szobájában)

12. előadás

Gromov t.

$E(M) \to M$ $\qquad$ $E^r(M) \to M$, $\quad E^r(M) \supset E_0^r(M)$ nyílt

$\Gamma_0(M) = \{$jó szelései $E(M) \to M$-nek$\}$

$\Gamma(M) = \{E_0^r(M) \to M$ szelései$\}$

Áll: $j^*: \Gamma_0(M) \to \Gamma(M)$ w.h.e., ha M nyílt.

$\underset{\text{nyílt}}{U} \subset M \qquad \Gamma_0(U), \Gamma(U)$

K kompakt esetén $\Gamma_0(K) = \varinjlim_{U \to K} \Gamma_0(U)$

Biz: M nyílt $\Rightarrow \exists$ rajta valódi Morse-fv., aminek $\nexists$ n-indexű krit. pontja (nincs max). (Ez triv, ha M = nyílt gömbnyalábja egy (zárt) sokaságnak)

Indukcióval: feltesszük olyan sokaságokra, melyeken csak k-nál $<$ indexű krit. pontok vannak.

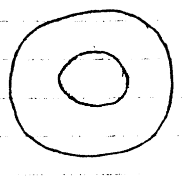
Pr. 1.) D^m-re igaz a T.

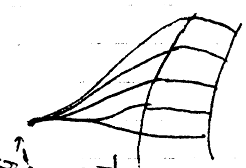
Pr 2) $\Gamma_0(\underset{\text{peremes}}{M} \cup \underset{\text{gallér}}{\partial M \times I}) \to \Gamma_0(M)$ w.h.e

Pr 3.) (Smale l) $\quad A = \underset{\text{2 sugarú gömb}}{D_2^k} \times D^{m-k}$, $k < m \qquad B = D^k_{[1,2]} \times D^{m-k}$

$\Rightarrow \Gamma_0(A) \longrightarrow \Gamma_0(B)$ Serre fibrálás.

$\Gamma(A) \longrightarrow \Gamma(B)$ ← triviá

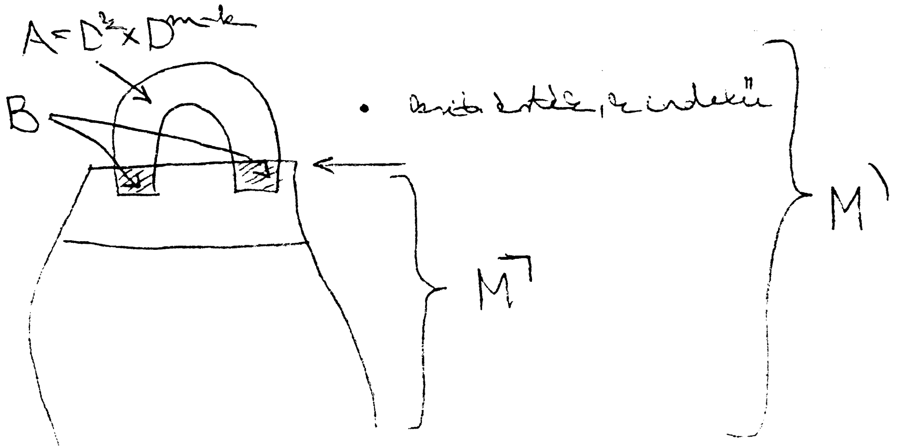




Pr 1,2,3 $\Rightarrow$ T.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_0(A) \arrow[rrr, "j^r"', "\text{w.h.e. Pr1 miatt}"] \arrow[ddd, "\text{Serre fibr. Pr3}"'] & & & \Gamma(A) \arrow[ddd, "\text{Serre fibr. Pr3}"] \\
& \Gamma_0(M') \arrow[ul] \arrow[r, "2"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{fibr. w.h.e}"] & \Gamma(M') \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& \Gamma_0(M^{\urcorner}) \arrow[dl] \arrow[r, "j^r \checkmark", "\text{w.h.e az ind. felt. miatt}"'] & \Gamma(M^{\urcorner}) \arrow[dr] & \\
\Gamma_0(B) \arrow[rrr, "\text{w.h.e az ind. miatt}"] & & & \Gamma(B)
\end{tikzcd}$$

mert $B = S^{k-1} \times [1,2] \times D^{m-k}$, s ezen létezik Morse-fv. $<k$ ind. krit. pontokkal



$\underline{\alpha}$
$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d] & E' \arrow[d] \\
B \arrow[r, "g"] & B'
\end{tikzcd}$$

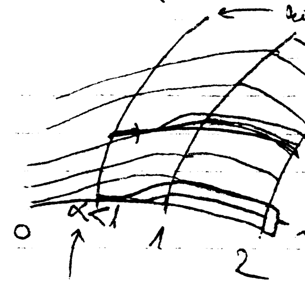
g w.h.e $\Rightarrow$ ($\bar{g}$ w.h.e. $\Leftrightarrow$ $\bar{g}|_{\text{fibr.}}$ w.h.e)

Biz 5 lemma (egzakt sorozat, g izo-t indukál, ha $\bar{g}$ és $\bar{g}|_{\text{fibr.}}$ közül valamelyik izo. $\Rightarrow$ a másik is) □

Külső négyzetben fibrumok közt w.h.e. $\Longrightarrow$ belső négyzetben is $\overset{\alpha}{\Longrightarrow}$? = w.h.e

a külső és a belső négyzetben a fibrumok homeomorfak

Biz (Prop 3. (Smale l))



← kis kompaktban is van immerzió a kompakton ccb def szerint

← ∀ pontban a kompaktban ccb immerziónak lappuk kis homotópiáját, ami az α-nál rögzített

mikrohajlékony lesz

A (= D^1 a rajzban)

$\exists\ 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_s = 1$

$[t_i, t_{i+1}]$-en $\exists\ \mu^i$ reg homotópia, mely α körül fix és $[1,2]$-n megegyezik az adott f_t homotópiával

($[0,1]$ szakasz kompaktságából)

$\Gamma_0(A) \longrightarrow \Gamma_0(B)$ Serre-fibr. ? $\qquad B = D^k_{[1,2]} \times D^{n-k}$

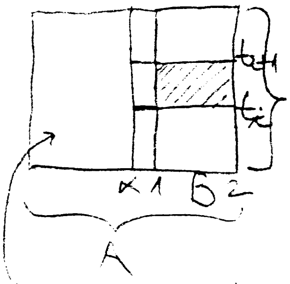
$\forall$ P poliéder $\forall\ f: P \times I \longrightarrow \Gamma_0(B)$

$\forall\ g_0 : P \times 0 \longrightarrow \Gamma_0(A) = \Gamma_0(D^k_2 \times D^{n-k})$

g_0 és f = ott, ahol mindkettő $\exists$.

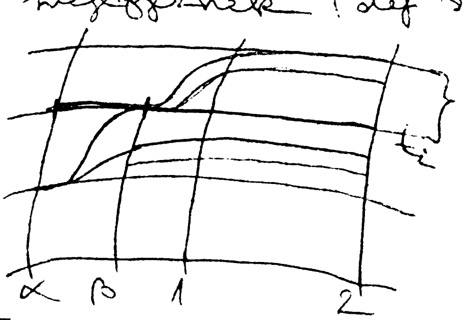
$\Rightarrow \exists\ g: P \times I \longrightarrow \Gamma_0(A)$.

1.) f_t reg homot. nem csak $D^k_{[1,2]} \times D^{n-k}$-n van, hanem $\exists\ \alpha < 1$, hogy $D^k_{[\alpha,2]} \times D^{n-k}$-n adott.



először betűz kiterjesztjük a szelést $B \times [0,1] \cup A \times 0$-ről $A \times [0,1]$-re, ez $B \times [0,1]$ egy környezetén jó lesz (beleesik az E_0 nyíltba)

$f_t = \mu_i \quad [1,2]$-n $\Rightarrow \exists\ \beta < 1 \quad (\alpha < \beta)$, hogy $[\beta, 2]$-n is megegyeznek (def szerint)

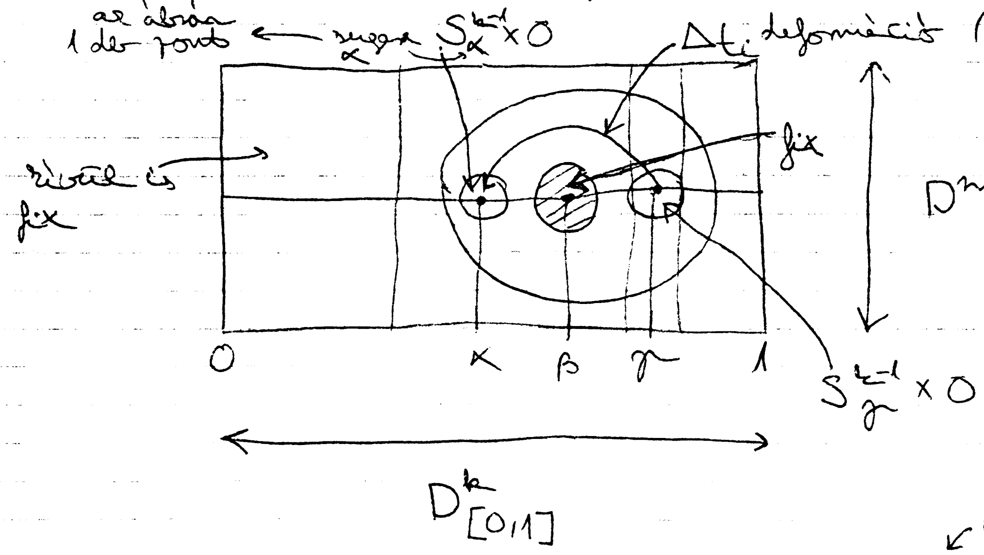


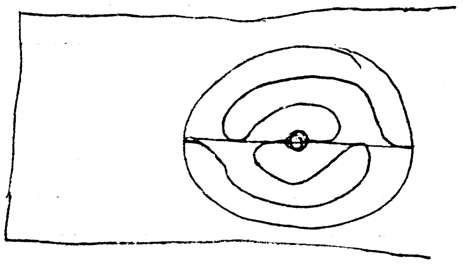
Tfh szerencsénk van:

$\mu^{i+1} = f_{t_i} \quad [\alpha, \beta]$-n

Ekkor összevonhatjuk μ^i-t és μ^{i+1}-et.

Ha nincs szerencsénk: γ, $\alpha<\beta<\gamma<1$





diffeotópia: ← ehhez kell, hogy $m-k \geq 1$ $(k<m)$

Δ_t, $t\in[0,t_i]$

$\Delta_0 = id$

$\cancel{\Delta_{t_i}}$ $\Delta_{t_i}(S^{k-1}_\gamma \times 0) = S^{k-1}_\alpha \times 0$

Δ_{t_i}-vel komponálva μ^{i+1}-et olyan homotópiát kapunk $[t_i, t_{i+1}]$-en, ami $(S^{k-1}_\gamma \times 0)$ körül fix: μ^{i+1}

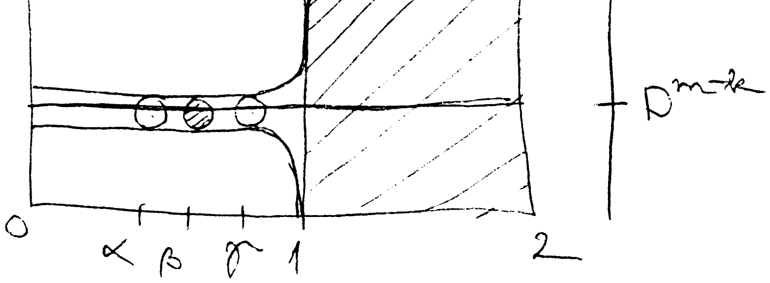
$t<\frac{t_i}{2}$-re $\Delta_t = id$

Megszorozzuk f_t-t Δ_t-vel.

f_t-t komponáljuk Δ_t-vel: f'_t

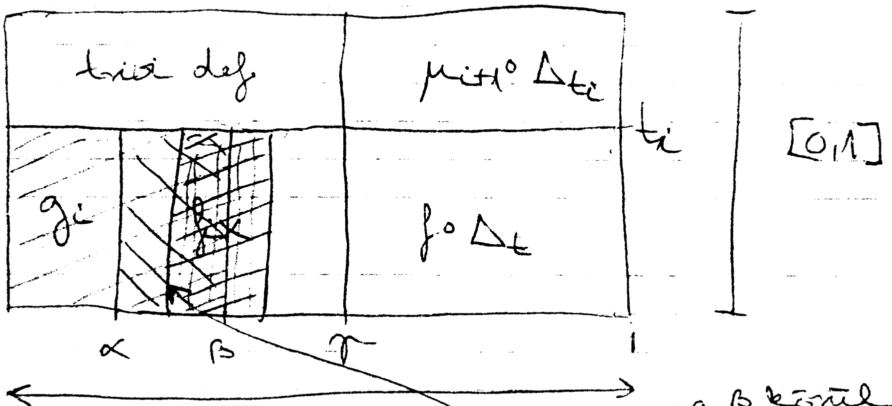
$f'_t = f_t$ $D^k_{[1,2]} \times D^{m-k}$-n.

$\Rightarrow \mu_{i+1}$ folytatja f'_t-t. (probl.: μ_{i+1} csak $S^{k-1}_\alpha \times 0$ környezetében fix, nem egy α körüli sávban)



$C = D^k_{[1,2]} \times D^{m-k} \cup D^k_2 \times \{0\}$

$C \subset U(C)$ kompakt (ebbe be lehet deformálni az egészet)



$U(C) \subset D^k_{[0,2]}$ itt fix a Δ_t a β körül, ~~~~ és ez a kör szétválasztja az $<\alpha$ és a $>\beta$ részt.

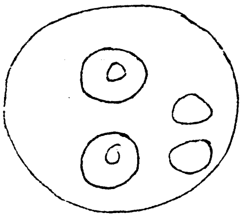
g_i a körlap homotópiája t_i-ig, most akarjuk továbbterjeszteni

összeragaszthatjuk a g_i α előtti és az $f \circ \Delta_t$ β utáni részt

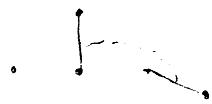
$\exists$ diffeo~~topiája~~morfizmus $D^k_2 \times D^{m-k} \longrightarrow U(C)$, ami C egy környezetén fix □

13. előadás

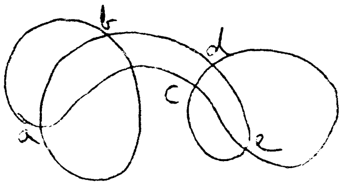
Pl. $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$



$\rightsquigarrow$ élpárosított fa

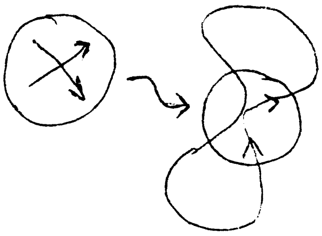


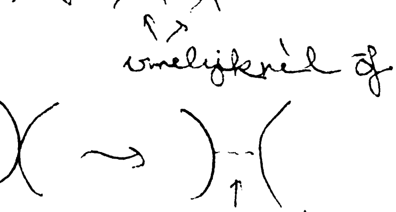
1-dim: $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$



körbemenve milyen szavak jönnek ki? Gauss-szavak

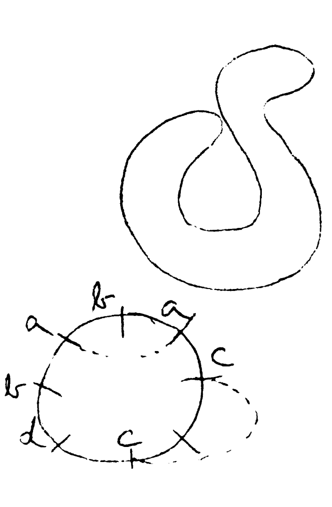
abdecdec

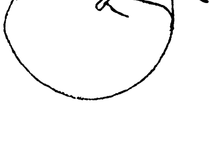


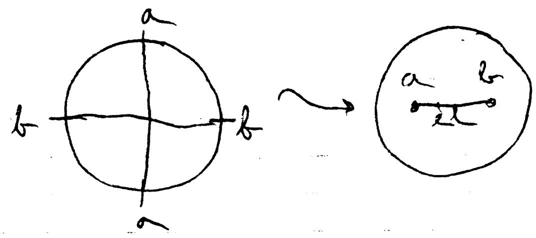


vmelyiknél ő.

„nadrág"

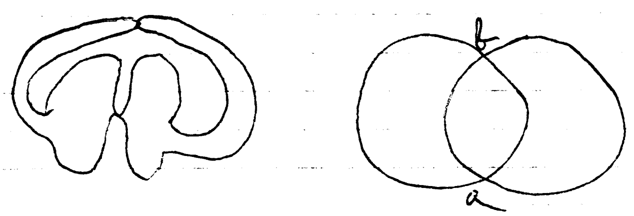




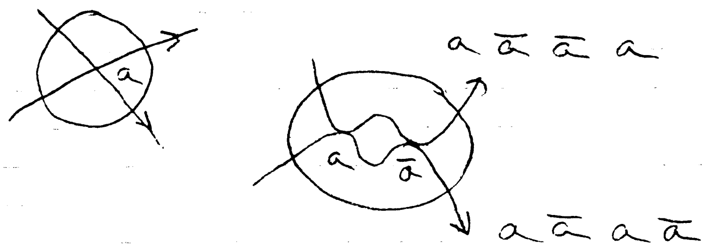


páros gráfot kapunk

abab



szétesik!



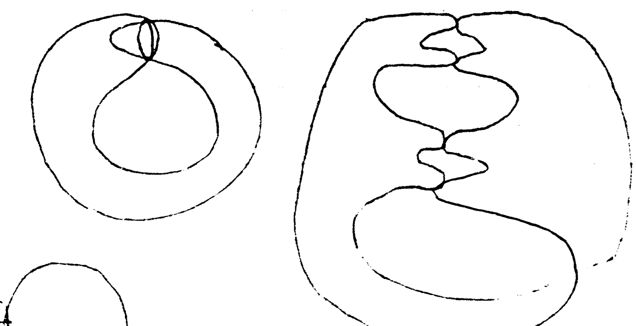
két púp: vissza ~~da~~ tudjuk építeni

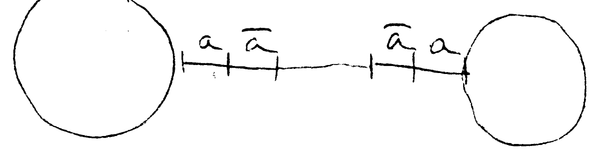
abc abc
$a\bar{a}cb\,\bar{a}abc$
$a\bar{a}cb\bar{b}a\bar{a}\bar{b}bc$
$\bar{a}ac\bar{c}b\bar{b}a\bar{a}\bar{b}b\bar{c}c$

P. Ossona de Mendez

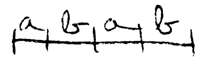
S^2 esetén hasonlóan:

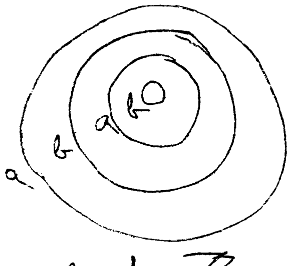
szó helyett fa





P^2 nem valósítható meg:





11.) Dold t. X, Y véges CW-kompl., szabad $\mathbb{Z}_2$-hatás
X k-öf., $\dim Y = n$

$$\exists \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} \Rightarrow n \geq k+1$$

Biz $S^n_{n-1} \longrightarrow S^n_n$

Borsuk-Ulam t. $\Rightarrow \nexists\ S^m \to S^{m-1}$ $\mathbb{Z}_2$-ekvivar.

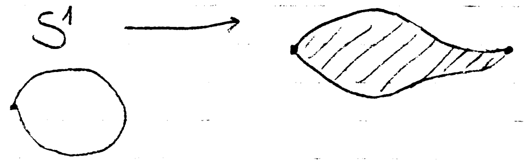
$f: S^m \to \mathbb{R}^m \quad g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{\| \quad \|} \quad g: S^m \to S^{m-1}$

X k-öf $\overset{*}{\Rightarrow}$ $\exists$ $S^{k+1} \overset{**}{\to} X$ ekv.

$\exists$ $Y \to S^n$ ekv., mert $\dim Y = n$

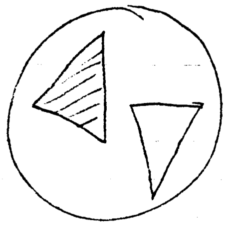
$S^{k+1} \to X \to Y \to S^n$, ~~ez~~ képezné $S^{k+1} \to S^n$ $\mathbb{Z}_2$ ekv. leképezést $\lightning$.

$*$: $S^1 \longrightarrow$



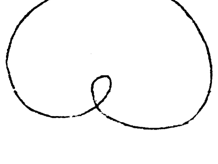
indukcióval

$**$
$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & S^\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y/\mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}P^\infty = B\mathbb{Z}_2 \end{array}$$



15.) $\mathbb{Z}_3$-szabad hatás: ptlan dim-ban 3. komplex egységgyökkel való szorzás.

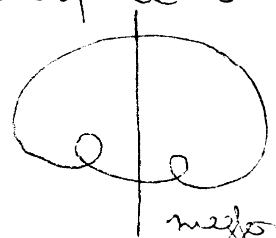
18.) $f: S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$ mely reg. homot. osztályok tartalmaznak határoló kört?



← ilyen $\nexists$: ha volna, kiemelnénk $\mathbb{R}^3$-ba, a kettőspontoknak ptlan sok vége lenne $\lightning$

Tehát nem lehet ptlan. sok kettőspont.

Ps. sok kettőspont van: reg. homot. a görbe egy ilyennel:



megforgatjuk: $D^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$, ez a perem
tehát 0-kobordáns
benyomjuk a síkba (kiegyenesítéssel.)

Vizsgák: máj. 27., jún 7., jún 17.
júl. 8., 5 oldalas puska használható

---

3. félév

1. előadás

Hatcher könyv: kohomológia elm.

Milnor – Stasheff: Charact. classes