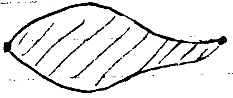
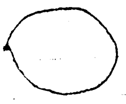
$< k$-ós $\overset{*}{\Rightarrow}$ $\exists\ S^{k+1} \xrightarrow{**} X$ ekv.

$\exists\ Y \longrightarrow S^n$ ekv., mert $\dim Y = n$

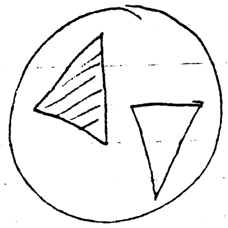
$S^{k+1} \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow S^n$, ~~az~~ kapnánk $S^{k+1} \to S^n$ $\mathbb{Z}_2$ ekv.

leképezést ↯.

$*$: $S^1 \longrightarrow$  indukcióval

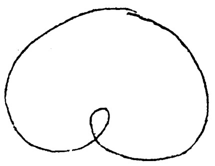


$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & S^\infty \arrow[d] \\ Y/\mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \mathbb{R}P^\infty = B\mathbb{Z}_2 \end{tikzcd}$$



5.) $\mathbb{Z}_3$-szabad hatás: ptlan dim-ben 3. komplex egységgyökkel való szorzás.

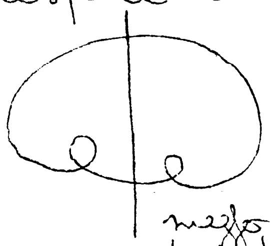
) $f: S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$ mely reg. homot. osztályok tartalmaznak határoló kört?



← ilyen $\nexists$: ha volna, kiemelnénk $\mathbb{R}^3$-ba, a kettősgörbéknek ptlan sok vége lenne ↯

Tehát nem lehet ptlan. sok kettőspont

Ps. sok kettőspont van: reg. homot. a görbe egy ilyennel:



megforgatjuk: $D^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$, ez a perem tehát 0-kobordáns

benyomjuk a síkba (kiegyenesítési l.)

Vizsgák: máj. 27., jún 7., jún 17.

júl. 8., 5 oldalas puska használható

---

3. félév

1. előadás

Hatcher könyv: kohomológia elm.

Milnor - Stasheff: Charact. classes

HF: 1.) a) $f: A_p \to A_{p'}$ $p' > p$ ir. felületek között

$\Rightarrow \deg f = 0$.

b) Nem ir. eset

2) $H^*\left(A'_q ; \begin{smallmatrix}\mathbb{Z}\\ \mathbb{Z}_2\end{smallmatrix}\right)$ kohomológia gyűrű

Kohomológia

$$\begin{tikzcd} (C_*(X), \partial) \arrow[r, "\text{Hom}"'] & (C^*, \delta) \end{tikzcd}$$

↑ kovariáns ↑ kontravar.

H_* meghat. H^*-ot (ha végesen generált)

Homol-ban „szorzás":

X, Y CW kompl

$$H_i(X) \times H_j(Y) \longrightarrow H_{i+j}(X \times Y)$$

$$e_i \qquad e_j \qquad e_{i+j} = e_i \times e_j$$

$X = Y$

$$H_i(X) \times H_j(X) \longrightarrow H_{i+j}(X \times X) \overset{?}{\dashrightarrow} H_{i+j}(X)$$

↑ ha X H-tér, akkor ∃

Pontrjagin szorzás a homol.-on

Kohomol.-ban jobb a helyzet:

$\Delta : X \longrightarrow X \times X$ átló leképezés

$$H^i(X) \times H^j(X) \longrightarrow H^{i+j}(X \times X) \xrightarrow{\Delta} H^{i+j}(X)$$

$\cup$ csésze-szorzás, cup-product

Kohomologikus operációk

Sq^i (Steenrod négyzet)

$$\begin{tikzcd} Sq^i : H^n(X; \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "Sq^i"] & H^{n+i}(X; \mathbb{Z}_2) \\ H^n(Y; \mathbb{Z}_2) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "Sq^i"] & H^{n+i}(Y; \mathbb{Z}_2) \arrow[u, "f^*"] \end{tikzcd}$$

természetes:

$f: X \to Y$

Emlék: $H^n(X;\mathbb{Z}_2) = [X, K(\mathbb{Z}_2,n)]$

$H^{n+i}(K(\mathbb{Z}_2,n);\mathbb{Z}_2) \ni Sq^i$

$\alpha \in H^n(X;\mathbb{Z}_2)$ $\alpha : X \to K(\mathbb{Z}_2,n)$

$$\begin{array}{ccc} H^{n+i}(X;\mathbb{Z}_2) & \xleftarrow{\alpha^*} & H^{n+i}(K(\mathbb{Z}_2,n);\mathbb{Z}_2) \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & Sq^i \end{array}$$

HF 3.) Ez természetes.

(így egy modulus struktúrát kapunk $K(\mathbb{Z}_2,n)$ kohom. felett)

Kohom. megjelenik:

1.) Obstrukció elm.

2.) Poincaré dual.

3.) Karakterisztikus osztályok

$$\begin{array}{ccc} Vect_n(X) & = & [X, BO(n)] \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \parallel \\ \xi, \eta & & G_n(\mathbb{R}^\infty) \end{array}$$

$\alpha \in H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2)$ α karakt. osztály

$$\begin{array}{ccccc} \alpha(\xi) & \neq & \alpha(\eta) & \Rightarrow & \xi \not\approx \eta \\ \parallel & & \parallel & & \\ \xi^*(\alpha) & & \eta^*(\alpha) & & \end{array}$$

S^n-en ∄ vmező $\Longleftrightarrow TS^n \not\approx \varepsilon^1 \oplus \eta^{n-1}$

∃-e immerzió $M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$

$TM^n \oplus \nu^k \approx \varepsilon^n$ (Hirsch-t. $\Rightarrow$ elégséges)

Vmezőnek ∃-e potenciálfv.-e?

Harm. fv.-nek ∃-e holomorf társa?
(lokálisan Laplace = 0)

a tart. kohom.-tól függ

$$H^1(\Omega;\mathbb{R}) = \frac{\text{Vmező} \overset{\text{teljesíti}}{\sim} \text{Young-tétel}}{\text{grad alakú}}$$

Felületen 1-kociklusok $\mathbb{Z}_2$-együtthatóval

$C_1(F, \mathbb{Z}_2) = \{\sum a_i\sigma_i : a_i \in \mathbb{Z}_2, \sigma_i \in 1\text{-dim szimplex}\}$

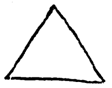
↑ szimpliciális lánckompl.

kolánc: $C^1(F, \mathbb{Z}_2)$

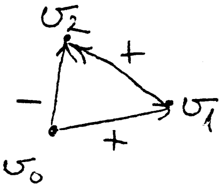
ψ ∀ 1-dim szimpl-hez egy $\mathbb{Z}_2$-beli elem.

ψ kociklus, ha $\delta\psi = 0$.

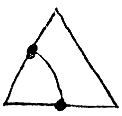
$\delta\psi$ – 2 kolánc $\delta\psi(\underset{\overset{\uparrow}{\Delta}}{\sigma^2}) = \psi(\underset{\overset{\shortparallel}{v_0v_1v_2}}{\partial\sigma^2})$



$\partial\sigma^n = \sum(-1)^i[v_0,\dots,\hat{v_i},\dots,v_n]$

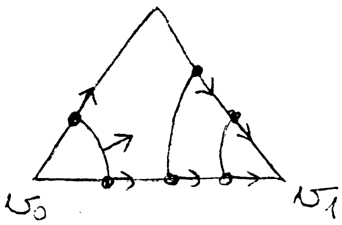


$\delta\psi = 0$ vagy csupa 0-t rendel ψ az oldalakhoz, vagy pontosan 2 db 1-est.



ψ kociklushoz ⇝ C_ψ görbe
(a két 1-es oldalát megfelezzük, összekötjük görbével a felezőpontokat)

Ha egész együtthatós a ψ: Akkor is ∃ C_ψ ir. görbe



annyi ir. pont az oldalon, amennyit ψ hozzárendel

Csésze szorzás

$\varphi \in C^i(X; R)$ R gyűrű, $\psi \in C^j(X; R)$

$\shortparallel$

$\mathrm{Hom}(C_i(X), R)$

$\varphi \cup \psi \in C^{i+j}(X; R)$

$\sigma: \Delta^{i+j} \longrightarrow X$ i+j-ds szing. szimplex

$$(\varphi \cup \psi)(\sigma) = \varphi\left(\sigma|_{[v_0,\dots,v_i]}\right) \cdot \psi\left(\sigma|_{[v_i,\dots,v_{i+j}]}\right)$$

Áll $\delta(\varphi \cup \psi) = \delta\varphi \cup \psi + (-1)^i \varphi \cup \delta\psi$

Biz számolás □

Köv. $\cup$-szorzás a kohomológiákon jól def

a) φ, ψ kocikl $\Rightarrow$ $\varphi \cup \psi$ is kociklus

b) $(\varphi + \delta\alpha) \cup \psi = \varphi \cup \psi + \delta\alpha \cup \psi = \varphi \cup \psi + \delta(\alpha \cup \psi)$

asszoc, disztr. $H^*(X;R)$-en

$$\begin{matrix} H^*(X;R) \\ \parallel \\ \prod H^i(X;R) \end{matrix}$$

Ha R 1-elemes, akkor H^* is: $1 \in H^0(X;R)$ (egy pont képéhez 1-et rendel)

$$H^i(X;R) \otimes H^j(X;R) \xrightarrow{\cup} H^{i+j}(X;R)$$

Áll Antikommutatív: $[\varphi] \cup [\psi] = (-1)^{ij} [\psi] \cup [\varphi]$, ha R komm.

$\varphi \in C^i$, $\psi \in C^j$ $[\varphi] \in H^i$ a repr. kohom osztály.

Biz $T : [v_0, \dots, v_k] = [v_k, \dots, v_0]$ $(\forall k$-ra$)$

$\overline{\sigma} = \sigma \circ T$ $\overline{\sigma}(v_i) = \sigma(v_{n-i})$, σ n-dim szing szimpl.

$\rho : C_n(X) \to C_n(X)$ $\rho(\sigma) = \varepsilon_n \overline{\sigma}$ $\varepsilon_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Lemma a) ρ lánckompl leképezés

b) $\rho \simeq id$-val

Biz $a \Rightarrow$ áll

a koláncok közt megy

$$(\rho^* \varphi \cup \rho^* \psi)\cancel{(\sigma)} \overset{?}{=} (-1)^{ij} \rho^*(\psi \cup \varphi)$$

$? + \rho^* = id \Rightarrow$ áll

$$(\rho^*\varphi \cup \rho^*\psi)(\sigma) = \varphi\left(\varepsilon_i \sigma|_{[v_i,\dots,v_0]}\right) \cdot \psi\left(\varepsilon_j \sigma|_{[v_{i+j},\dots,v_i]}\right)$$

b.o. ↗

j.o. ↘

$$\rho^*(\psi \cup \varphi)(\sigma) = \varepsilon_{i+j} \cdot \psi\left(\sigma|_{[v_{i+j},\dots,v_i]}\right) \varphi\left[\sigma|_{[v_i,\dots,v_0]}\right)$$

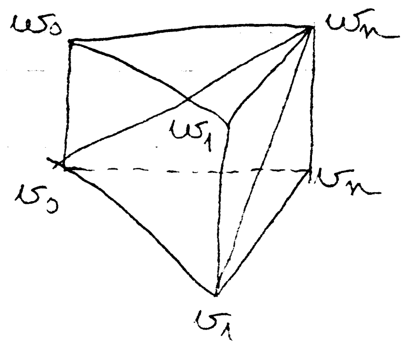
□

Biz.: a) $\partial S = S \partial$ számolás, Hatcher

b) $S \simeq id$

$P : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$ homot. operátor

$$P(\sigma) = \sum (-1)^i E_{n-i} (\sigma \circ \pi)\Big|_{[v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i]}$$



$$\Delta^n \times [0,1] \xrightarrow{\pi} \Delta^n$$

Áll: $\partial P + P \partial = S - id$

Hatcher 222. o.

b) koncepc. biz-a

Def Megengedett operátor:

$\forall X \quad A_X : C_*(X) \longrightarrow C_*(X)$ lánc. lekép.

természetes és id a 0-dim-ban

Áll Bármely két megengedett operátor homotóp.

(a homotópia funktoriális)

Pl 1) identitás 2) S 3) Baricentr. felb.

Biz A, B megeng. operátor

Építsük a homotópiát dim. szerinti ind.-val

$h_X : A_X \simeq B_X$

$(h_X)_0 = 0$. Tfh. $(h_X)_0, \dots, (h_X)_{r-1}$ megvan

$$(*) \quad (A_X)_k - (B_X)_k = (h_X)_{k-1} \partial + \partial (h_X)_k \qquad k \leq r-1$$

Def $(h_X)_r : C_r(X) \longrightarrow C_{r+1}(X)$

Áll: $\Big(\underbrace{(A_X)_r - (B_X)_r - (h_X)_{r-1}\partial}\Big)(\sigma) \subset \overset{\text{ciklus}}{Z_r}(X)$

Biz

Kell: $\partial(\text{—"—}) = 0$

$\partial A_r - \partial B_r - \partial h_{r-1} \partial$

$\partial h_{r-1} = A_{r-1} - B_{r-1} - h_{r-2} \circ \partial$ (tudjuk)

$-\partial h_{r-1} \circ \partial = -A_{r-1} \circ \partial + B_{r-1} \circ \partial + \underbrace{h_{r-2} \circ \partial \circ \partial}_{=0}$

$\partial \cancel{A_r} - \partial \cancel{B_r} - \cancel{A_{r-1}} \circ \partial + \cancel{B_{r-1}} \circ \partial = 0$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "A_r"'] & {} \arrow[d, "A_{r-1}"] \\ {} \arrow[r, "\partial"'] & {} \end{tikzcd}$$

□

$X = \Delta^r$, $i_r : \Delta^r \to \Delta^r$ id

$\sigma = i_r$-rel az előző áll

$\underbrace{(A_{\Delta^r})_r(i_r) - (B_{\Delta^r})_r(i_r) - (h_{\Delta^r})_{r-1} \circ \partial(i_r)}$ ciklus $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ határ

$\exists\, c_{r+1} \in C_{r+1}(\Delta^r)$, melyre $\partial c_{r+1} =$

Def $(h_{\Delta^r})_r(i_r) = c_{r+1}$

(*) telj. $k = r$-re $X = \Delta^r$, $\sigma = i_r$

$(h_X)_r(\sigma) = \sigma_\circ(c_{r+1})$

$\sigma : \Delta^r \to X$ $\quad \sigma_\circ : C_*(\Delta^r) \to C_*(X)$

Teljesül (*) $\forall X\ \forall \sigma$ $k \leq r$ (természetesség miatt)

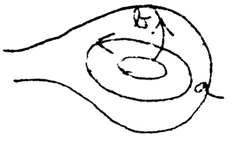
2. előadás

HF: $\nexists\, \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, aminek van normálmezője

4.) F_1, F_2 két irányított zárt felület, $g(F_1) < g(F_2)$

$f : F_1 \to F_2$, $f \pitchfork \underset{\uparrow}{a}, \underset{\uparrow}{b}$

egyszerű meridián egy fülön



$f^{-1}(a), f^{-1}(b)$ irányított görbék F_1-ben

$\#_{alg}(f^{-1}(a) \cap f^{-1}(b)) = 0$

5.) M^n sdk, $x \in M^n$ $\quad H_i(M^n, M^n \setminus \{x\}) = ?$ Útm: kivágás

6.) Alexander dualitás tétel:

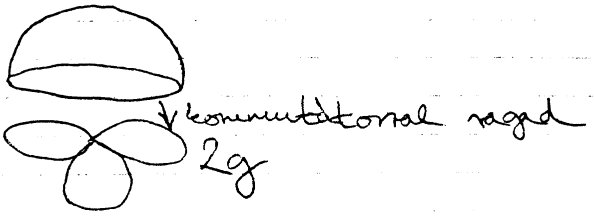
K véges szimpl. kompl. $\subset \mathbb{R}^n$ $\quad H_i(K) \approx \overset{\text{redukált}}{\overline{H}}{}^{n-i-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)$

Útm: 1) Poincaré dualitás, vagy
2) szimplexek szerinti indukció

Példa ∃ M zárt, ir., $g \geq 1$ génuszú

$H^*(M, \mathbb{Z})$ kohomol. gyűrű

Homol. CW strukt-ből



$$\begin{array}{ccccccccc} & C_3 & & C_2 & & C_1 & & C_0 & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}^{2g} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$H_* = C_*$

$C^* = \mathrm{Hom}(C_*, \mathbb{Z})$ $\quad 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}^{2g} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0$

$H^* = C^*$ $\quad H^* = \mathrm{Hom}(H_*)$

Megj. Ált-ban ∃ párosítás

$\alpha \in H^*(X)$ $\quad \beta \in H_*(X)$

$\underset{\| \text{def}}{\langle \alpha, \beta \rangle} = \underset{\varphi}{\underset{\cup}{\alpha}}(\underset{\xi}{\underset{\cup}{\beta}})$ jelentése: φ – kociklus $\quad \delta\varphi = 0$

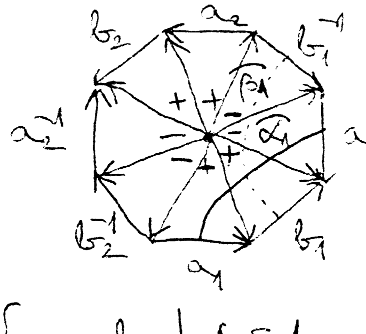
ξ – ciklus $\quad \partial\xi = 0$

$\varphi(\xi) \in$ együttható csoport

$\varphi(\xi + \partial\eta) = \varphi(\xi) + \underset{0}{\underset{\|}{\delta\varphi}}(\eta) = \varphi(\xi)$

(ha $\dim \alpha \neq \dim \beta$, akkor $\langle \alpha, \beta \rangle \overset{\text{def}}{=} 0$)

$g = 2$:



Δ-komplexus: két Δ-nek lehet pl. egy közös oldala + +1 közös csúcsa (nem csak 1 db oldal)

$H_1(M) = \{a_i, b_i \mid i = 1, \dots, g\}$

$H^1(M) = \mathrm{Hom}(H_1(M); \mathbb{Z})$ $\quad \alpha_i = a_i^*, \beta_i = b_i^*$ duális elemek (duális bázis)

$\alpha_i \cup \beta_i = ?$

$\alpha_i(a_i) = 1, \ \alpha_i(a_j) \overset{(j \neq i)}{=} 0, \ \alpha_i(b_j) = 0 \qquad (*)$

φ_i kociklus, melyre $[\varphi_i] = \alpha_i$

$\varphi_i \sim (*)$, kell még: φ_i(sugarak) = ?

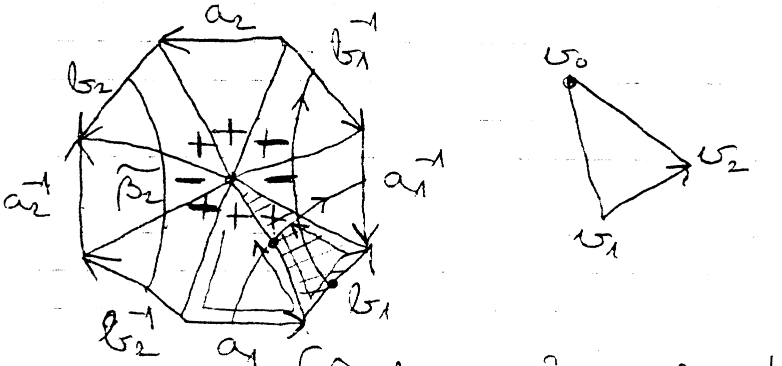
$c_{\varphi_1} = \tilde{\alpha}_1$ - görbe

φ_1(egy szakaszon) = $\#_{alg}(\tilde{\alpha}_1 \cap$ a szakasz)

(HF) $\delta \varphi_1 = 0$ $[\varphi_1] = \alpha_1$

Ψ_i kocikkus $[\Psi_i] = \beta_i$

∀ Δ-re a nyilak adják meg a csúcsok sorrendjét. A Δ-eknek előjelet adunk, hogy megkapjuk a fundamentális osztályt, ellentétes nyilak esetén ellentétes előjel.



$$(\varphi_1 \cup \Psi_1)(\text{2-dim szimplexen}) = \begin{cases} 0 & \text{ha a 2-szimplex} \neq \text{satírozott} \\ 1 & \text{ha satírozott} \end{cases}$$

$$(\varphi_1 \cup \Psi_1)\big|[v_0, \dots, v_n] = \varphi_1([v_0, \dots, v_i])\Psi([v_i, \dots, v_n])$$

$\alpha_1 \cup \beta_1 = \gamma$ - generátor $H^2(M; \mathbb{Z})$-ben

$H_2(M; \mathbb{Z})$ = gener. Δ-ek ábrán vett előjelekkel az összege [M]- fundamentális osztály

$$(\alpha_1 \cup \beta_1)([M]) = 1 \Rightarrow \alpha_1 \cup \beta_1 = \gamma = [M]^*$$

Tehát $\alpha_i \cup \beta_i = \gamma$ $\forall i$

$\alpha_i \cup \beta_j = 0$. $i \neq j$

$\alpha_i \cup \alpha_j = 0$ $\forall i \, \forall j$

$H^0 = \mathbb{Z} = \{1\}$

$H^1 = \mathbb{Z}^{2g} = \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g\}$

$H^2 = \mathbb{Z} = \{\gamma\}$

HF: ua. nem ir. felületekre $\mathbb{Z}$ ill $\mathbb{Z}_2$ eh-kal

$\mathbb{Z}$ eh-kal a szorzás $= 0$, mert $H^2 = 0$, hiszen nincs 2-ciklus: a 2-szimplexeket nem tudjuk illeszkedően előjelezni. $\mathbb{Z}_2$ esetén?

Relatív csészeszorzat

$C^m(X, A) \subset C^m(X)$

$$0 \to C_m(A) \longrightarrow C_m(X) \longrightarrow C_m(X,A) = C_m(X)/_{C_m(A)} \to 0$$

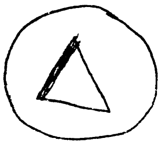
$$0 \leftarrow C^m(A) \leftarrow C^m(X) \leftarrow C^m(X,A) \longleftarrow 0$$

$$C^m(X,A) \subset C^m(X)$$

$\parallel$

azok a koláncok X-ben, melyek $\forall$ A-beli láncon 0-k

$$H^m(X,A) \otimes H^n(X) \xrightarrow{\cup} H^{m+n}(X,A)$$
$$([c], [c']) \longmapsto [c \cup c']$$



$\downarrow$

ez is 0 az A-beli szimplexeken
$\Rightarrow$ jóldef

$$H^m(X,A) \otimes H^n(X,B) \longrightarrow H^{m+n}(X, A \cup B)$$

$\uparrow$

$\exists$, ha A, B nyílt $A \cup B$-ben

Megj: Gond: $C^m(X,A) \cap C^m(X,B) \neq C^m(X, A \cup B)$

Def $\hat{C}^m(X; A, B) = C^m(X,A) \cap C^m(X,B)$

(*):
$$0 \longrightarrow C^*(X, A \cup B) \to \hat{C}^*(X; A, B) \longrightarrow \hat{C}^*(A \cup B; A, B) \to 0$$

$$0 \leftarrow C_*(X)/_{C_*(A \cup B)} \leftarrow C_*(X)/_{C_*(A)+C_*(B)} \longleftarrow C_*(A \cup B)/_{C_*(A)+C_*(B)} \longleftarrow 0$$

$\nwarrow$ a-beli láncok + + b-beli láncok által generált

egzaktak:

$C_*(X) \supset C_*(A\cup B) \supset C_*(A)+C_*(B)$ -re izom tétel.

$(*) \Rightarrow$ hosszú egzakt sorozat kohomológiából

Áll. $\hat{C}^*$ kohomológiái 0-k $\hat{C}^*(A\cup B; A, B)$

Köv. Nincs gond. $H^*(C^*(X, A\cup B)) \approx H^*(\hat{C}^*(X; A, B))$

Biz Áll

$$0 \leftarrow C^*(A)+C^*(B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homot. ekv., ez elég}}}{\leftarrow} C^*(A\cup B) \leftarrow \hat{C}^*(A\cup B; A, B) \leftarrow 0$$

egzakt $\hat{C}^*$ def-ja miatt $\Uparrow$ lemma a fedésről

$$C_*^{u}(X) \longrightarrow C_*(X) \text{ homot. ekv.}$$

$$C_*(A)+C_*(B) \underset{\text{homot. ekv.}}{\longrightarrow} C_*(A\cup B), \text{ ezt}$$

dualizáljuk $\square$

HF: 7.)

$$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\kappa] \big/ \kappa^{n+1}=0$$

$\kappa \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ ezt felhasználva

Bizb: $\mathbb{R}P^n$ Lusternik - Schnirelman kategóriája $= n+1$

ahány pontrahúzható térrel lefedhető

Univerzális együttható formulák

Cél: $H_*(X; G)$ $H^*(X; G)$ $H_*(X)$ ismeretében

G Abel-csoport

Válasz: K tetsz. lánckompl. szabad Abel-csoportokból

$$\longrightarrow K_r \xrightarrow{\partial} K_{r-1} \longrightarrow$$

(G-együtthatós: $K_r \otimes G$ homológiái)

$$0 \to H_r(K)\otimes G \to H_r(K\otimes G) \to \operatorname{Tor}(H_{r-1}(K), G) \to 0$$

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{r-1}(K), G) \to \underbrace{H^r(K, G)}_{\text{ezt akarjuk kiszámolni}} \to \operatorname{Hom}(H_r(K), G) \to 0$$

sőt hasad
(de nem kanonikusan)

funktoriális v. természetes: K → L leképezés ad az egz sorozatok közti leképezést.

Def Tor Periodikus szorzat

A tenzorszorzás jobbról egzakt funktor:

$$(3)\quad 0 \to A_0 \to A_1 \to A \to 0 \qquad / \otimes B$$

szabad csoportok, A_1-generátorait ráképezzük A generátoraira, a mag is szabad (A_0) (rezolvens)

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Tor}(A,B)}_{A *_3 B} \to A_0 \otimes B \to A_1 \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

a mag

$$\mathrm{Tor}(A,B) = A * B$$

Funktoriális a rövid egzakt sorozatokon:

$\exists$ A' másik Abel-csoport

$$(3')\qquad \sigma : A \to A' \text{ homom.} \Rightarrow \sigma_* : A *_3 B \to A' *_{3'} B$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\sigma_0"] & A_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, shift right, "\tau_1"'] \arrow[d, shift left, "\sigma_1"] \arrow[dl, "\lambda"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_0' \arrow[r, "\alpha'"] & A_1' \arrow[r, "\pi'"] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutatív

σ-ból csináljuk σ_1-et, σ_0 a magra való megszorítás.

$/ \otimes B$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A *_3 B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, shift right, "\tau_*"'] \arrow[d, shift left, "\sigma_*"] & A_0 \otimes B \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, shift right, "\tilde{\tau}_0"'] \arrow[d, shift left, "\tilde{\sigma}_0"] \arrow[d, bend right=60] & A_1 \otimes B \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{\sigma}_1"] \arrow[dl, "\tilde{\lambda}"'] & A \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\sigma}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' *_{3'} B \arrow[r, "\beta'"] & A_0' \otimes B \arrow[r] & A_1' \otimes B \arrow[r] & A' \otimes B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

σ_* nem függ ~~σ_0-tól~~ σ_1 választásától:

τ_1 egy másik homom

$$\pi'(\tau_1 - \sigma_1) = 0$$

$$\exists\, \lambda : A_1 \to A_0' : \ \alpha' \lambda = \tau_1 - \sigma_1 \text{, mert } A_1 \text{ szabad}$$

$\tau_0 - \sigma_0 = \lambda \circ \alpha \Rightarrow \tilde{\tau}_0 - \tilde{\sigma}_0 = \tilde{\lambda} \circ \tilde{\alpha}$

$\beta'(\tau_* - \sigma_*) = \tilde{\lambda} \circ \tilde{\alpha} \circ \beta = \tilde{\lambda} \circ 0 = 0$ β' mono $\Rightarrow \tau_* = \sigma_*$

Spec ha $\sigma = id_A$, akkor $\sigma_* = (id_A)_* \Rightarrow A *_\rho B$ nem függ ρ-tól.

3. előadás

HF. 8.) a) $f: X \longrightarrow Y$ $f_*: H_*(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(Y;\mathbb{Z})$ izo.

$\Rightarrow \forall G$ együtthatós homol. és kohomol.-ban is izo.

b) $G = \mathbb{Q}$-ra és $\forall G = \mathbb{Z}_{p^r}$-re izom. a G együtth. homol $\Rightarrow \mathbb{Z}$ eh-s homol-ban is izom

9.) $\operatorname{Ext}(\overset{G}{\cancel{\mathbb{Q}}}, \overset{\mathbb{Q}}{\cancel{G}}) = 0$ $\forall G$-re

10.) B T_4 tér, $\xi \in Vect_n(B)$

$LS(B) = k \Leftrightarrow k$ db pontrahúzható zárt térrel lefedhető $\Rightarrow \exists\, \eta \to B$ $\xi \oplus \eta = \varepsilon^{k+n}$.

$Tor_\rho(A,B)$ $A *_\rho B$ periód. szorzat

$0 \to A_0 \to A_1 \to A \to 0 \,/ \otimes B$ A_1, A_0 szabad

$0 \to A *_\rho B \to A_0 \otimes B \to A_1 \otimes B \to A \otimes B \to 0$

$\sigma: A \to A'$

$\sigma_*^{\rho\rho'}: A *_\rho B \longrightarrow A' *_{\rho'} B$ (nem függ σ_1-től, jóldef)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A *_\rho B \arrow[r] & A_0 \otimes B \arrow[r] & A_1 \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_1"] & A \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' *_{\rho'} B \arrow[r] & A'_0 \otimes B \arrow[r] & A'_1 \otimes B \arrow[r] & A' \otimes B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Megj. $\sigma \longrightarrow \sigma_*^{\rho\rho'}$ funktoriális

$\tau: \underset{(\rho')}{A'} \longrightarrow \underset{(\rho'')}{A''}$ $\tau_*^{\rho'\rho''}$

$\tau_*^{\rho'\rho''} \circ \sigma_*^{\rho\rho'} = (\tau \circ \sigma)_*^{\rho\rho''}$

$\uparrow$

konstr. és egyért.-ből $\left(\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d, "\sigma_1"] \arrow[dd, bend right] \\ \bullet \arrow[d, "\tau_1"] \\ \bullet \end{tikzcd}\right.$

$\sigma_*^{\rho\rho'}$:
$$\begin{tikzcd} A *_\rho B \arrow[r] \arrow[dr] & A' *_{\rho'} B \arrow[d, "\tau_*^{\rho'\rho''}"] \\ & A'' *_{\rho''} B \end{tikzcd}$$

$\sigma = id_A$

$id_A^{\rho\rho} = id_{A *_\rho B}$

$id_A^{\rho'\rho} \circ id_A^{\rho\rho'} = 1$ $\quad \rho \leftrightarrow \rho'$ és

↑
izom.

⇒ nem függ a rezolvenstől □

$A \otimes B$

$A \times B \to K$ bihomom. az objektumai egy kat-nak

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "obj."] \arrow[dr] & K \arrow[d, "\leftarrow \text{morfizmus}"] \\ & K' \end{tikzcd}$$

Ebben az univ. iniciális elem az $A \otimes B$:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r] \arrow[dr] & A \otimes B \arrow[d, "\exists!"] \\ & K' \end{tikzcd}$$

$$\{(a,b)\} \Big/ \begin{matrix} (a_1+a_2, b) - (a_1,b) - (a_2,b) \\ (a, b_1+b_2) - (a,b_1) - (a,b_2) \end{matrix}$$

$A \otimes \mathbb{Z} = A$

$\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m = 0$ ha $(n,m) = 1$

Disztr.: $(A_1 \oplus A_2) \otimes B$

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ $\quad m = q_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{\beta_l}$

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}$ $\quad \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{q_1^{\beta_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{q_l^{\beta_l}}$

$$\mathbb{Z}_{p^\alpha} \otimes \mathbb{Z}_{p^\beta} = \mathbb{Z}_{p^{\min(\alpha,\beta)}}$$

$\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m$ disztributivitással.

Aperiod szorzás tul-i

1.) Disztr. ∀-két tényezőben

Biz S felbomlik

2) Ha A v. B torziómentes $(\mathbb{Z}^\alpha)$ $\Rightarrow A * B = 0$

Biz a) $A = \mathbb{Z}$

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0 \quad / \otimes B$$

$$\underset{\overset{\|}{0}}{A * B} \to \underbrace{0 \otimes B}_{\overset{\|}{0}} \to$$

b) $\otimes \mathbb{Z}$ nem változtat.

3.) $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}_{(p,q)}$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p \to 0 \quad / \otimes \mathbb{Z}_q$$

$$0 \to \mathbb{Z}_{\underbrace{(p,q)}_{t}} \to \mathbb{Z}_q \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q \to 0$$

$$q = q' \cdot t \qquad p = p' \cdot t \qquad (q', p') = 1$$

4.) $\mathrm{Tor}(A,B)$ szimm. $= \mathrm{Tor}(B,A)$

Biz 1.)+2)+3.)

Univ. együtth. formula

$$0 \to H_r(K) \otimes G \to H_r(K \otimes G) \to H_{r-1}(K) \cancel{\otimes} * G \to 0$$

T kovariáns, jobbegzakt, disztributív, szabadokon egzakt, T(0-homom) = 0. funktor.
(rövid egz. szabadokból)

ST - balderivált funktor:

(S) $0 \to A \to B \to C \to 0$

$$0 \to \underset{\uparrow}{ST(C)} \to T(A) \to T(B) \to T(C) \to 0$$

ha (S) = szabad rezolvense a C-nek

<u>Univ. együttható formula:</u> $H_r = H_r(K)$

$$0 \to T(H_r) \to H_r(T(K)) \to ST(H_{r-1}) \to 0$$

<u>Biz</u>

$$\begin{tikzcd}
 & & Z_r \oplus B_{r-1} \text{ mert hasad} & & & \\
0 \arrow[r] & Z_r \arrow[r] \arrow[d, "0"] & K_r \arrow[u, equal] \arrow[r, "\partial_r"] \arrow[d, "\partial_r"] & \underbrace{(K/Z)_r}_{K_r/Z_r = B_{r-1}} \arrow[r, equal] & \overset{\subset K_{r-1}}{B_{r-1}} \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \ \text{(izom tétel)} \\
0 \arrow[r] & Z_{r-1} \arrow[r] & K_{r-1} \arrow[rr] & & B_{r-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\partial_r : K_r \to K_{r-1}$ $\quad$ $\text{Ker}\,\partial_r = Z_r$, $\text{im}\,\partial_r = B_{r-1}$

Erre a homol. egz. sorozat: $H_r(Z) = Z_r$

$H_r(B) = B_{r-1}$

lehet, mert szabadok

Alk. T-t, aztán homol. egz. sorozat:

$$\begin{tikzcd}
T(Z_r) \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \overset{T(Z_r)\oplus T(B_{r-1})}{T(K_r)} \arrow[r] \arrow[d, "T(\partial_r)"] & T(B_{r-1}) \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[dll] & 0 \\
T(Z_{r-1}) \arrow[r] & \underset{T(Z_{r-1})\oplus T(B_{r-2})}{T(K_{r-1})} \arrow[r] & T(B_{r-2}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$H_r(T(Z)) = T(Z_r) \qquad H_r(T(B)) = T(B_{r-1})$$

$$T(B_r) \xrightarrow{\delta_T} T(Z_r) \to H_r(T(K)) \to T(B_{r-1}) \xrightarrow{\delta}$$

$$\begin{tikzcd}
 & K_r \arrow[dd, "\partial_r"'] & = Z_r \arrow[d] & \oplus B_{r-1} \arrow[ddl, "\text{hasító leképezés}"] \arrow[r] & B_{r-1} \arrow[ddllll] \\
 & & 0 & & \\
Z_{r-1} \arrow[r, hook] & K_{r-1} & = Z_{r-1} & \oplus B_{r-2} &
\end{tikzcd}$$

$$B_{r-1} \subset Z_{r-1}$$

δ = beágyazás, a hasító leképezésekkel adódik ez T nélküli homol. egz. sorozat. Ebben a

$\delta = B_{r-1} \overset{\beta_{r-1}}{\hookrightarrow} Z_{r-1}$ beágyazás.

$\Rightarrow (\delta_T)_{r-1} = T(\beta_{r-1})$

Áll: $\delta_T = T(\beta)$, ahol $\beta : B \hookrightarrow Z$.

biz: a T-s rövid egzakt sorozatban kövessük végig δ_T definícióját (3 leképezés kompozíciója).

$$T(B_r) \xrightarrow[T(\beta_r)]{\delta_T} T(Z_r) \to \boxed{H_r(T(K))} \to T(B_{r-1}) \xrightarrow[T(\beta_{r-1})]{\delta_T}$$

$$0 \to \overbrace{\mathrm{Coker}\, T(\beta_r)}^{T(H_r)} \to H_r(T(K)) \to \mathrm{Ker}\, T(\beta_{r-1}) \to 0$$

$$\mathrm{Coker}\, T(\beta_r) = T(Z_r) / \mathrm{im}\, T(\beta_r)$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_r \arrow[r] \arrow[d, "0"] & Z_r \arrow[r] \arrow[d, "0"] & H_r \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
(0 \arrow[r] & B_{r-1} \arrow[r] & Z_{r-1} \arrow[r] & H_{r-1} \arrow[r] & 0)
\end{tikzcd}$$

alk. T-t, de itt H_r (ill. H_{r-1}) nem szabad, így megjelenik ST:

$$0 \to \underline{ST(H_r)} \to T(B_r) \xrightarrow{T(\beta_r)} T(Z_r) \to T(H_r) \to 0$$

~~$(0 \to ST(H_{r-1}) \to T(B_{r-1}) \to)$~~

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Coker}\, T(\beta_r)}_{T(H_r) = H_r(K) \otimes G} \to H_r(T(K)) \to \mathrm{Ker}\, T(\beta_{r-1}) \to 0$$

$$\mathrm{Ker}\, T(\beta_{r-1}) = ST(H_{r-1}) = H_{r-1}(K) * G$$

hasad: a $0 \to T(Z_r) \to T(K_r) \leftrightarrows T(B_{r-1}) \to 0$ hasad $\Rightarrow$ a hosszú egzakt is hasad stb.? □

Nem kanonikusan hasad.

Funktoriális : $f: K \to L$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_r(K)\otimes G \arrow[r] \arrow[d, "f_*\otimes id"] & H_r(K\otimes G) \arrow[r] \arrow[d] & H_{r-1}(K) * G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_r(L)\otimes G \arrow[r] & H_r(L\otimes G) \arrow[r] & H_{r-1}(L) * G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ext funktor

$$(S) \quad 0 \to \overset{\text{szabadok}}{A_0 \to A_1} \to A \to 0$$ szabad rezolvens

$\mathrm{Hom}(-, B)$ balegzakt :

$$0 \leftarrow \mathrm{Ext}_S(A,B) \leftarrow \mathrm{Hom}(A_0,B) \leftarrow \mathrm{Hom}(A_1,B) \leftarrow \mathrm{Hom}(A,B) \leftarrow 0$$

Nem függ a S-től. $\mathrm{Ext}(A,B)$

HF **Ext tul.-i:**

1.) Disztr. $\forall$-két változóban

2) NEM szimm.

3.) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) = \mathbb{Z}_{(p,q)}$

4.) a) Ha A szabad, akkor $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = 0$.

b) $B = \mathbb{Z}$, akkor $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p$

5.) B teljes ($nx = y$ $\forall y \in B$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\exists!$ mego.)

$\mathrm{Ext}(A,B) = 0$ $\forall$ A-ra.

$$H^r(K;G) = \mathrm{Hom}(H_r(K), G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{r-1}(K), G)$$

$$0 \to \mathrm{Ext} \to H^r(K;G) \xrightarrow[\uparrow]{} \mathrm{Hom}(H_r(K); G) \to 0$$

a Kronecker-index adja meg

Szorzat formulák, Künneth tétel

X, Y top. terek. Egzakt:

$$0 \to \overset{\text{direktösszeg}}{\sum_{p+q=r}} H_p(X)\otimes H_q(Y) \to H_r(X\times Y) \to \sum_{p+q=r-1} H_p(X) * H_q(Y) \to 0$$

$$0 \leftarrow \sum_{p+q=r} \mathrm{Hom}(H_p(X), H_q(Y)) \leftarrow H^r(X\times Y) \leftarrow \sum_{p+q=r-1} \mathrm{Ext}(H_p(X), H_q(Y)) \leftarrow 0$$

Hasadnak, természetesek.

Komplexusok tenzorszorzata

Def. K, K' alg. kompl.

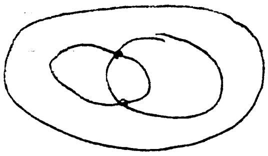
$K\otimes K'$ $\quad C_n^{\otimes} = \sum_{p+q=n} C_p \otimes C'_q$

$$\partial^{\otimes}\Big|_{C_p\otimes C'_q} = \partial\otimes 1 + (-1)^p\, 1\otimes\partial'$$

op.tér párok

$$\begin{tikzcd} X,Y \arrow[r, "CW"] \arrow[d] & \text{Alg. komplexus} \arrow[d, "\otimes"] \\ X\times Y \arrow[r] & \text{Alg. kompl} \end{tikzcd}$$

Top terek



Poincaré-duálisok szorzata = a metszet Poincaré-duálisa

$x \in H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) \rightsquigarrow$ hipersík

$x^n \neq 0$, mert n db hip-sík metszete 1 pont

$x^{n+1} = 0$. Így megkaptuk $H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$-t.

4. előadás

HF. 1.) Borsuk–Ulam t.

$f: S^n \to \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \nexists\, S^n \to S^{n-1}$ ekvivariáns = ptlan leképezés (Bb. kohom. elmélettel)

$$H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x] / x^{n+1} = 0$$

2) $\nexists\, \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^{n-k}$ retrakció.

3.) a) $H^*(\mathbb{CP}^n; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gyűrű}}}{G})$ (felhasználva a fenti $\mathbb{RP}^n$-es gondolatmenetet)

b) $\nexists\, \mathbb{CP}^n \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-k}$ retr.

I. (Künneth, homologikus)

K szabad alg. komplexus

L alg. kompl és L-ben a ciklusok csoportjának ∃ kieg. csoportja

$$\begin{tikzcd} L_{r+1} \arrow[r, "\partial_{r+1}"] & L_r \arrow[r, "\partial_r"] & L_{r-1} \arrow[r] & {} \\ & Z_r = \mathrm{Ker}\,\partial_r \arrow[u, phantom, "\cup"] & & \end{tikzcd} \qquad \partial^2 = 0$$

$$\begin{tikzcd} \exists U_r: & L_r \arrow[d, "\partial_r"] & \cong & U_r \arrow[drrr, "\approx \partial|U_r"] & \oplus Z_r & & \\ & L_{r-1} & = & U_{r-1} \oplus & Z_{r-1} \supset & U_{r-1} \oplus & B_{r-1} \end{tikzcd}$$

$$(K \otimes L)_n = \bigoplus_{p+q=n} K_p \otimes K_q$$

$$\partial^{\otimes}(c_p \otimes c'_q) = \partial_K c_p \otimes c'_q + (-1)^p c_p \otimes \partial_L c'_q$$

$$0 \to \sum_{p+q=n} H_p(K) \otimes H_q(L) \longrightarrow H_n(K \otimes L) \longrightarrow \sum_{p+q=n-1} H_p(K) * H_q(L) \longrightarrow 0$$

term., hasad

Biz $H_n(K \otimes L) \approx \sum_{p+q=n} H_p(K \otimes H_q(L))$ (*) ~~$\leftarrow$ univ. együttható formula~~

Σ univ. eh. form $\Longrightarrow$ Künneth

1.) L kompl $0 \to \ldots \to 0 \to L_q \to 0 \to \ldots$

$$K \otimes L \xrightarrow[\substack{q\text{-val} \\ \text{elcsúsztatva} \\ \text{az indexeket}}]{} K \otimes L_q \quad , \quad \text{triv.}$$

2) L', L''-re igaz $\Rightarrow$ $L = L' \oplus L'$-re is igaz
(mindkét oldal direktösszeg)

3.) L : $\forall\, \partial = 0$
Erre igaz, mert 1.)-típusúak összege (+2.))

4.) $H_*(L)$ ~~komplexusból~~ komplexus 0-homomorfizmusokkal, ($L' = H_*(L)$, 0-homom.), L'-re igaz

$L_q = Z_q \oplus U_q \qquad V_q = B_q \oplus U_q \qquad L_q \supset V_q$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial_L|V_q"'] \arrow[d, squiggly, shift left=3] & L_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial_L"] & H_q(L) \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 & 0 \arrow[ll] \\
0 \arrow[r] & V_{q-1} \arrow[r] & L_{q-1} \arrow[r] & H_{q-1}(L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
V_q = & B_q \arrow[d] & \oplus & U_q \arrow[dll, "\approx"] \\
& 0 & & \\
& B_{q-1} \oplus U_{q-1} & &
\end{tikzcd}$$

K szabadokból áll, így vele tenzorszorozva rövid egz. marad:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K\otimes V_q \arrow[r] \arrow[d] & K\otimes L_q \arrow[r] \arrow[d] & K\otimes H_q(L) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K\otimes V_{q-1} \arrow[r] & K\otimes L_{q-1} \arrow[r] & K\otimes H_{q-1}(L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Lemma

Kell: $K\otimes V$ aciklikus $(H_*(K\otimes V)=0)$

$\Rightarrow H_*(K\otimes L) \approx H_*(K\otimes H_*(L))$.

Hosszú egzakt sorozat:

$$\underset{=0}{H_n(K\otimes V)} \to H_n(K\otimes L) \xrightarrow{\approx} H_n(K\otimes H_*(L)) \to$$
$$\to \underset{=0}{H_{n-1}(K\otimes V)}$$

Biz.: $0 \to B_q \to V_q = B_q \oplus U_q \to \overset{=B_{q-1}}{U_q} \to 0$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K\otimes B_q \arrow[r] \arrow[d] & K\otimes \overset{=B_q\oplus U_q}{V_q} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] \arrow[dr, "\approx"] & K\otimes U_q \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dll, "*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K\otimes B_{q-1} \arrow[r] & K\otimes \overset{=B_{q-1}\oplus U_{q-1}}{V_{q-1}} \arrow[r] & K\otimes U_{q-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\xrightarrow[\approx]{\delta} H_*(K\otimes B) \to \underbrace{H_*(K\otimes V)}_{=0} \to H_*(K\otimes U) \xrightarrow[\underset{?}{\approx}]{\delta} H_{*-1}(K\otimes B)$$

*: $u_q = B_{q-1}$ a ⊗-szorzás előtt ⇒ K⊗ után is uo.

kijött: $H_n(K\otimes L) \approx H_n(K\otimes H_*(L))$

$$= \sum_{p+q=n} H_p(K\otimes H_q(L))$$

☐

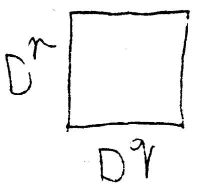
X, Y CW kompl. (véges)

$K = C_*(X) \qquad L = C_*(Y)$

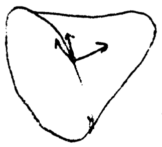
$K\otimes L = C_*(X\times Y)$

$$\underset{e_p}{C_*(X)} \otimes \underset{e_q'}{C_*(Y)} = \underset{e_p\times e_q'}{C_*(X\times Y)}$$

$$\partial(e_p \times e_q') = \partial e_p \times e_q' + (-1)^p e_p \times \partial e_q'$$



$$\underset{u_1,\dots,u_p,\,v_1,\dots,v_q}{\partial(D^p\times D^q)} = \underbrace{\underbrace{\partial D^p}_{u_2,\dots,u_p} \times \underbrace{D^q}_{v_1,\dots,v_q}}_{u_1 \text{ a normálvektor}} \cup \overbrace{\underbrace{\underbrace{D^p}_{u_1,\dots,u_p} \times \underbrace{\partial D^q}_{\cancel{v_2}\,v_2,\dots,v_q}}_{v_1 \text{ a normálvektor}}}^{(-1)^p \text{ ha ir. van}}$$



p db cserével lesz a kijelölt bázis

végtelenre: X×Y a w = gyenge topológiával (≠ szorzattop, végesre igen).

L szabad ⇒ ∃ kieg. csoport ☐

Kitérő

Cél: M^n diff. sok.

$H^*_{dR}(M^n) \approx H^*(M^n; \mathbb{R})$

$\Omega^p(M)$ = p-formák M-en

(lokálisan felírva jól transzformálódik a koord transzf-kor, lehet integrálni)

$$d: \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$$

$$\sum a_I \, dx_I \qquad \sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i} \cdot dx_i \wedge dx_I$$

<u>Áll</u> $d^2 = 0$

$$\left(\mathrm{Ker}\, d \,/\, \mathrm{im}\, d \right)_{r\text{-dim}} = H^r_{dR}(M) = H^r(M;\mathbb{R})$$

<u>Def</u> Čech kohomológiák

X top tér, $\mathcal{U}$ nyílt fedése.

$\mathcal{U}$ ideg = szimpl. komplexus

csúcsok = $\mathcal{U}$ elemei

p-szimplexek = (p+1)-szeres metszetek

$\check{H}^*(X;\mathcal{U})$ = itt az ideg kohomológiái.

<u>Áll</u> X szimpl kompl.

$\mathcal{U}$ olyan, hogy ∀ metszet pontrahúzható } ⇒

↖ $\mathcal{U}$ jó fedés

⇒ $\check{H}^*(X;\mathcal{U}) = H^*(X)$

<u>Megj.</u> ~~(X szimpl kompl)~~ M triangulált sokaság

$\mathcal{U}$ jó fedés: a max dim poliéderek ~~szimplexek~~ ε-körny.-e a duális felbontáson.

(Ekkor az ideg = M komplexus)

<u>Áll</u> $\mathcal{U}$ jó fedése az M diff sok.-nak

$\Rightarrow \check{H}^*(M, \mathcal{U}; \mathbb{R}) \approx H^*_{dR}(M)$

Bott - Tu : Differential forms in alg. top.

<u>5. előadás</u>

Vissza az univ. együtth. formulához:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_q \arrow[r] & K_q \arrow[r, shift right] & B_{q-1} \arrow[l, shift right, bend right] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ez nem kanon.: B_{q-1} szabad, a generátorainak tetsz. megválasztjuk a képét

$$\begin{tikzcd} K_q \arrow[d, "\partial"'] & = & Z_q \arrow[d] & \oplus & B_{q-1} \arrow[dll, "\beta_{q-1}"] \\ & & 0 & & \\ K_{q-1} & = & Z_{q-1} & \oplus & B_{q-2} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K_q \otimes G \arrow[d, "\partial\otimes 1"'] & = & Z_q \otimes G \arrow[d] & \oplus & B_{q-1} \otimes G \arrow[dll, "\beta_{q-1}\otimes 1"] \\ & & 0 & & \\ K_{q-1} \otimes G & = & Z_{q-1} \otimes G & \oplus & B_{q-2} \otimes G \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Ker}_q(\partial \otimes 1) = (Z_q \otimes G) \oplus \ker(\beta_{q-1} \otimes 1)$$

$$\mathrm{Im}_q(\partial \otimes 1) = \mathrm{Im}(\beta_q \otimes 1) \subset Z_q \otimes G$$

$$H_q(K \otimes G) = \underset{\overset{\parallel}{H_{q-1}(K) * G}}{\ker(\beta_{q-1} \otimes 1)} \oplus \underbrace{\mathrm{coker}(\beta_q \otimes 1)}_{\text{kanonikus}} \overset{\parallel}{} H_q(K) \otimes G$$

$$0 \to B_q \xrightarrow{\beta_q} Z_q \to \overset{H_q(K)}{\overset{\parallel}{H_q}} \to 0 \quad / \otimes G$$

$($~~$B_q \otimes G \xrightarrow{\beta_q \otimes 1}$~~$)$

$$0 \to H_q * G \to B_q \otimes G \xrightarrow{\beta_q \otimes 1} Z_q \otimes G \to H_q \otimes G \to 0$$

$\square$

De Rham

M $\quad\mathfrak{U}$ nyílt fedése, jó ($\forall$ metszet pontrahúzható), megsz. rendezett J indexhalmaz

$$\mathfrak{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

$$U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \qquad U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma = U_{\alpha\beta\gamma}$$

$$\begin{tikzcd} M & \coprod\limits_{\alpha_0 \in J} U_{\alpha_0} \arrow[l] & \coprod\limits_{\alpha_0 < \alpha_1} U_{\alpha_0\alpha_1} \arrow[l, shift right, "\partial_0"'] \arrow[l, shift left, "\partial_1"] & U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \arrow[l, shift right=2, "\partial_0"'] \arrow[l, "\partial_1"] \arrow[l, shift left=2, "\partial_2"] \end{tikzcd} \qquad (*)$$

∂_i = ignoráljuk az α_i-t

$\partial_0(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}):\quad U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \hookrightarrow U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$

$\Omega^*(M) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Omega^q(M)$

$(*) \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^*(M) \arrow[r] & \prod_{\alpha_0} \Omega^*(U_{\alpha_0}) \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_1"'] \arrow[r, bend left=40, "\delta=\delta_1-\delta_0"] & \prod_{\alpha_0<\alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, shift left=2, "\delta_0"] \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[r, shift right=2, "\delta_2"'] \arrow[r, bend left=40, "\delta=\delta_0-\delta_1+\delta_2"] & \prod_{\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2} \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \arrow[r, bend left] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha_1} & U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1} \arrow[l, hook', "\partial_0"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha_0} & U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1} \arrow[l, hook', "\partial_1"']
\end{tikzcd}$$

Def. $\delta = \sum (-1)^i \delta_i$

$\omega \in \prod_{\alpha_0<\ldots<\alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p}) \qquad \omega_{\alpha_0\ldots\alpha_p} \in \Omega^q(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p})$

$$(\delta\omega)_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha_i}\ldots\alpha_{p+1}}\Big|_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}}}$$

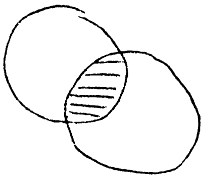
Áll: $\delta^2 = 0$. □

Áll 8.5. Egzakt.

Biz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underbrace{\Omega^*(M)}_{\text{itt triv.}} \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right=30] & \underbrace{\prod \Omega^*(U_{\alpha_0})}_{\text{itt az egzaktság}} \arrow[r, "\delta"] & \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, "\delta"] & {}
\end{tikzcd}$$

itt triv.:
ha ∀-re megszorítva 0, akkor ő glob. 0.



$U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}$

ha a metszetben 0 a δ-nál a kép, akkor az U_{α_0}-on és az U_{α_1}-en a forma összeilleszthető.

$\exists\ \{\rho_\alpha\}$ egységosztás $\{U_\alpha\}$ alá írva.

$\omega \in \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\ldots\alpha_p})$ p-kociklus a δ-ra. $\delta(\omega)=0$

Def-juk a τ $(p-1)$ láncot

$$\tau_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \rho_\alpha \underbrace{\omega_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}}}$$

indexcsere (hogy rendezve legyenek) =

= (-1) szorzás

$$(\delta\tau)_{\alpha_0\ldots\alpha_p} = \sum_i (-1)^i \tau_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_p} =$$

$$= \sum_{i,\alpha} (-1)^i \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_p} \overset{*}{=}$$

$$\delta\omega = 0 \Rightarrow (\delta\omega)_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_p} = \omega_{\alpha_0\ldots\alpha_p} + \sum_i (-1)^{i+1} \omega_{\alpha\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_p} = 0$$

$$\overset{*}{=} \underbrace{\sum_\alpha \rho_\alpha}_{1} \underbrace{\sum_i (-1)^i \omega_{\alpha\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_p}}_{\omega_{\alpha_0\ldots\alpha_p}} = \omega_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$$

Tehát $\delta\tau = \omega$. □

Kettős komplexus

komm diagr:

$$\begin{tikzcd} K^{0,1} \arrow[r, "\delta"] & K^{1,1} \\ K^{0,0} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & K^{1,0} \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}$$

$K^{p,q}$

(rács az első síknegyedben)

$\delta^2 = 0$, $d^2 = 0$

$$D|_{K^{p,q}} = \delta + (-1)^p d$$

$$\bigoplus_{p+q=n} K^{p,q} = K^n$$

(pl. tenzorszorzat)

$D : K^n \longrightarrow K^{n+1}$

Áll $D^2 = 0$

$$D^2 = \underbrace{\delta^2}_0 + \underbrace{d^2}_0 \overbrace{\pm d\delta \mp \delta d}^{0}$$

egyik helyen $(-1)^p$, a másikon $(-1)^{p+1}$ előjel,
a komm miatt $d\delta = \delta d$

Megj. Kettős kompl. sorai egzaktak $\Rightarrow$
$H^*(K^*, D) \simeq$ első oszlop kohomológiái

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\delta \arrow[r, "r"] & K^{0,1} \arrow[r, "\delta"] & K^{1,1} \\
\operatorname{Ker}\delta \arrow[r, "r"] \arrow[u, "d"] & K^{0,0} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"'] & K^{1,0} \arrow[u, "d"]
\end{tikzcd}$$

$\underbrace{\operatorname{Ker}\delta}$ ez az első oszlop (az egzaktság miatt kell odaírni, simán 0-ákat nem lehet ide tenni, de ez elé már igen. Egyébként pl. $K^{0,0}$-ban nem lenne értelme az egzaktságnak).

<u>Biz</u> r láncompl leképezés: ~~($rd = dr$, mert)~~

$rd = Dr$, mert $rd = dr$ és r képén $D = d$ ($\delta = 0$). ← egzaktság miatt

$\operatorname{im} r \subset K^{0,n} \subset K^n$

r: első oszlop $\to K^*$ láncompl lekép.

r indukál izom.-t. (l. később) □

$K^{p,q} = C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) =$ $(p+1)$-szeres metszetekben q-forma $\prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^2(M) \arrow[r, "r"] & {} & & \\
\Omega^1(M) \arrow[r, "r"] \arrow[u] & \prod \Omega^1(U_{\alpha_0}) \arrow[r, "\delta"] & \prod \Omega^4(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, "\delta"] & {} \\
\Omega^0(M) \arrow[r, "r"] \arrow[u, "d"] & \prod \Omega^0(U_{\alpha_0}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \prod \Omega^0(U_{\alpha_0\alpha_1}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \prod \Omega^0(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \\
\Rightarrow H^*_{dR}(M) \arrow[r, "r_*", "\approx"'] & H^*(C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)) & & \\
& C^0(\mathcal{U}; \mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[uu, "\text{mag:}"'] & C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[uu, bend right] & C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

az U_{α_0}-kon lok. konst. fv.-ek — az $U_{\alpha_0\alpha_1}$-eken lok konst. fv.-ek — $U_{\alpha\beta\gamma}$-kon lok konst.

$\approx$ Čech kohom-ban a csúcsokon fv.-ek = kolánc — ‖ Čech-kohom-ban az éleken koláncok

A sorok egzaktak: láttuk.

Az oszlopok egzaktak a Poincaré lemma miatt, mert $\forall\, U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ pontrahúzható.

Alk. az Áll-t az alsó sorra is $\Rightarrow$

Čech kohom = De Rham kohom

r* izo.:

1.) r^* epi

φ kocikl. D-re: $D\varphi = 0$

Kell: $\exists\, \omega$ zárt forma M-en: $r(\omega) \sim \varphi$, azaz $r(\omega) - \varphi \in \operatorname{im} D$.

(általános)
φ legalsó komponense egy x-nek a δ-képe

(mert $D\varphi = 0$ és az alsó sor egzakt)

Tek. $\varphi' = \varphi - Dx$. stb.

Végül kapunk egy φ-vel kohomológ φ''' elemet, melynek csak a 0-ik oszlopban van komponense.

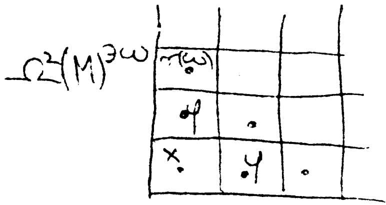
$D\varphi''' = 0 \Rightarrow \delta\varphi''' = 0$, tehát φ''' egy forma M-en megszorítva $\forall\, U_\alpha$-ra.

Továbbá $d\varphi''' = 0$, tehát φ''' zárt.

2) r^* mono

$r(\omega) = D\varphi$, kell: $[\omega] = 0$.

φ-ből kivonjuk a legalsó komp. δ-ősének D-képét.



stb.

φ'''-ből csak az első oszlopban marad.

$$\left(\xcancel{\begin{array}{l} \Rightarrow D(D\varphi''') = 0 \\ \Rightarrow \delta(D\varphi''') = 0 \\ \quad d(D\varphi''') = 0 \end{array}}\right)$$

$r(\omega) = D\varphi''' = D\varphi$

Kell: $\exists\, \xi : d\xi = \omega$.

$r(\omega) = \underset{\parallel}{D\varphi'''} \Longrightarrow \delta\varphi''' = 0 \Longrightarrow \varphi'''$ globális forma

$r(\omega) = d\varphi''' \qquad d\varphi''' = \omega$ □

6. előadás

HF.

1.) $H^*_{dR}(S^1)$, $H^*_{dR}(S^1\times S^1)$ formák segítségével.

2.) $\exists$-e univ. öf az n-dim $\mathbb{Z}_2$-együtthatós kohom. osztályok között?

Azaz $\exists$-e $f \in \mathbb{Z}_2[x]$, hogy $\forall X$ top tér-re és $\forall a \in H^n(X; \mathbb{Z}_2)$-re $f(a) = 0$? (ötlet: kohom. Künneth)

3.) a) $\exists$-e X: $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{szuszpenzió}}}{S}X \cong \mathbb{C}P^n$?

b) $Y = SX \Rightarrow H^*(Y)$-ban a szorzás trivi ($\overset{r\text{-dim.}}{|a|} > 0$, $|b| > 0 \Rightarrow a \cup b = 0$).

c) X, Y útöf., $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$

$$\bar H^*(X\wedge Y) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{gyűrű izom.}}}{=} \underset{\substack{\in\\ a\\ a'}}{\bar H^*(X)} \otimes \underset{\substack{\in\\ b\\ b'}}{\bar H^*(Y)} \qquad \begin{matrix} a\otimes b\\ a'\otimes b'\end{matrix}$$

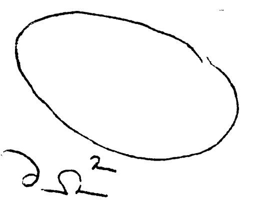
szorzás: $(a\otimes b)(a'\otimes b') = (aa' \otimes bb')(-1)^{|b|\cdot|a'|}$
(graduált gyűrűben)

$H^*_{dR}(M)$-en a szorzást a formák ékszorzása indukálja.

Stokes t.: $\displaystyle\int_{\partial M^{k+1}} \omega^k = \int_{M^{k+1}} d\omega^k$, M^{k+1} kompakt peremes sok.

1. spec eset:

$\mathbb{R}^2$-ben: $\quad A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



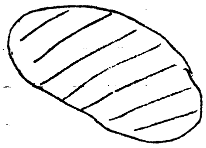
$$\int_{\partial\Omega^2} \langle \underline{A}, \underline{n} \rangle\, ds = \iint_{\Omega^2} \operatorname{div} A\, dx\, dy$$

$A_1, A_2 \qquad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}$

$\mathbb{R}^n$-ben vmező $\underline{A}$

$$\text{div}\, A = \langle \nabla, \underline{A} \rangle = \sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, A_1, \dots, A_n \right\rangle$$



szeml. jelentése a div.-nak: folyadékmennyiség áramlik, A a sebességvektorok mezője, V(t) a térfogata t idő múlva.

$$\left.\frac{dV(t)}{dt}\right|_{t=0} = \iint_{\Omega^2} \text{div}\, A \, dx_1 dx_2 .$$

Biz $g^t(x) = \underline{x} + A(\underline{x}) \cdot t + O(t^2)$

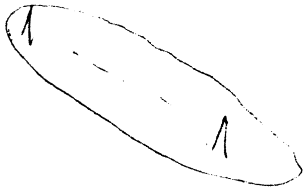
$$\frac{\partial g^t(x)}{\partial x} = E + t \cdot \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(x) + O(t^2)$$

jacobi

$$V(t) = \iint_{\Omega^2} \det \frac{\partial g^t}{\partial x}(x)$$

a $0 \rightsquigarrow t$ diffeo. jacobijának
det.-t integrálva kapjuk az
új térfogatot

$$\underline{\underline{1 + t \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_1}}}, \; t \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$



t-s tagot akkor kapunk, ha $\forall$-tagot az átlóból választunk, és azon belül is $(n-1)$ db 1-est.

$$\det \frac{\partial g^t}{\partial x}(x) = 1 + t \cdot \underbrace{\text{trace} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}}_{\text{div}\, \underline{A}} + O(t^2)$$

$$\frac{V(t) - V(0)}{t} \longrightarrow \iint_{\Omega^2}$$

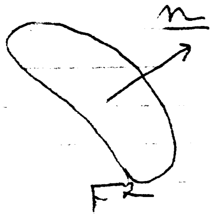
□

Pl. összenyomhatatlan folyadék esetén div A = 0.

2 spec eset.

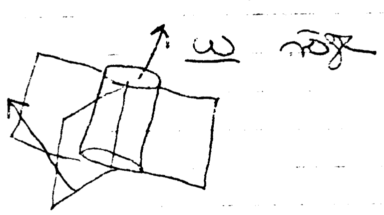
$\mathbb{R}^3$-ban γ görbe, zárt, $\partial F^2 = \gamma$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{F^2} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$



$$\| \qquad \iint_{F^2} \langle \text{rot}\,\underline{A}, \underline{n} \rangle \, d\sigma$$

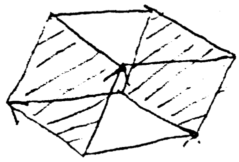
rot $\underline{A}$: folyadék áramlik, ∀ pontban kis malomkerék



$2\underline{\omega} = \text{rot}\,\underline{A}$

$d\omega^k$ szeml. jelentése

1.)



$\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}$ a paralellepipedon éleivel ∥ vektorok

$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$ (az első lappal ∥ metszetekben kiszámoljuk) ⇝ fv., ezt a $(k+1)$-dik irányba deriváljuk, és ezt mind a $k+1$ irányban összeadjuk.

2) $\Pi_\varepsilon = (\varepsilon \cdot \xi_1, \dots, \varepsilon \cdot \xi_{k+1})$ paralellepipedon

$$\int_{\partial \Pi_\varepsilon} \omega = \varepsilon^{k+1} \cdot \underbrace{F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})}_{d\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})} + O(\varepsilon^{k+2}) \qquad \text{(Stokes t.).}$$

$\mathbb{R}^3$-ban $\supset M$ tart.

De Rham komplexus:

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \to \dots$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^0(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "\omega^1_A"'] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "\omega^2_A"'] & \Omega^3(U) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^\infty(U) \arrow[r, "grad", "\nabla\cdot"'] & \overset{A}{Vect}(U) \arrow[r, "rot", "\nabla\times"'] & \overset{A}{Vect}(U) \arrow[r, "div", "\langle\nabla,\rangle"'] & C^\infty(U) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\exists$ A vmező U-n. $\omega^1_A(\underline{X}) = \langle \underline{A}, \underline{X} \rangle$

$\omega^2_A(X,Y) = \langle A, X, Y \rangle$ vegyes szorzat $= \langle A, X \times Y \rangle$

$\Omega^3(U) = f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$X \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^n)^*$ között a kanon. izom-t a skaláris szorzás létesíti.

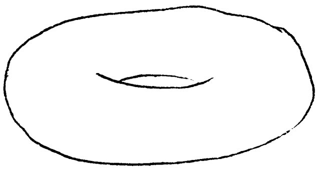
(Arnold: A mechanika mat. módszerei)

__Kérdés__ adott egy vmező az U-n. $\exists$-e potenciál fv.-e?

rot: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$

Szükséges: rot $\underline{A} = 0$ (Young-tételből a keresztbe vett deriváltak egyenlők).

$$H^1(U;\mathbb{R}) = \frac{\operatorname{Ker} rot}{\operatorname{im} grad} = \frac{\left\{\underline{A} \,\middle|\, \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right\}}{\left\{\underline{B} \,\middle|\, \exists f : B = grad f\right\}}$$



U = tömör tórusz

$H_1(U;\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$\exists$ olyan vmező, melyre Young-felt. telj., de ő nem grad: $\exists$ $\underline{A}$

$\forall$ más $\underline{B}$ vmező, melyre ~ Young-felt.,

$\underline{B} = \alpha \cdot \underline{A} + \text{grad}\, f$.

Kapcsolat a Cauchy-Riemann egyenletekkel

$$f(z) = u + iv \text{ holomorf} \Leftrightarrow \begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix} \quad \left(\Rightarrow \begin{matrix} \Delta u = 0 \\ \Delta v = 0 \end{matrix}\right)$$

Kérdés: Adott u harm. fv. egy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tart.-on. $\exists$-e Ω-n f holom. fv.: $\text{Re}\, f = u$?

Mego.: $\omega^1 = -u_y\, dx + u_x\, dy$

$$-\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right) dx - \frac{\partial u_y}{\partial y}\, dy\, dx$$

$$d\omega^1 = \overset{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\overset{\shortparallel}{\Delta u}}\, dx\, dy = 0 \quad \Rightarrow \omega^1 \text{ zárt.}$$

Ha $U \sim D^2 \Rightarrow H^1(U; \mathbb{R}) = 0 \Rightarrow \exists\, \omega^0 = v$:
$d\omega^0 = \cancel{v}\ \omega^1$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -u_y\, dx + u_x\, dy$$

$\Rightarrow v_x = -u_y,\ v_y = u_x$.

$$\left(d\, a_{i_1 \dots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right)$$

$$\underset{H_1(\Omega; \mathbb{R})}{\underset{\shortparallel}{H^1(\Omega; \mathbb{R})}} = \frac{\text{Harm}(\Omega)}{\text{Re Holom}(\Omega)} = \frac{\{u \mid \Delta u = 0\}}{\{u \mid \exists f \text{ holom } \Omega\text{-n}: \text{Re}\, f = u\}}$$

Pl. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $H^1(\Omega; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$\log|z| = x$ harm., de nem Re holomorf $\left(\int_{\odot} \neq 0\right)$

$\log z = w = x + iy \quad e^w = z \quad e^x(\cos y + i \sin y) = z$

$\forall$ harm. fv. $= \underset{\underset{\mathbb{R}}{\in}}{\alpha} \log|z| + \text{Re holomorf}$

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$

∀ harm.: $\sum_i \alpha_i \log|z-a_i|$ + Re holomorf

Kohomologikus Künneth formula

I. X, Y CW komplexusok

$H^i(X;\Lambda)$ torziómentes Λ-modulus,

(pl. $\Lambda = \mathbb{Z} \Rightarrow$ Tors $H^i(X;\mathbb{Z}) = 0$

Λ = test esetén ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$) mindig igaz)

Y-nak ∀ dim.-ban véges sok cellája van, akkor

$$\overset{a\times b \longleftarrow a\otimes b}{H^n(X\times Y;\Lambda) \approx \bigoplus_{i+j=n} H^i(X;\Lambda)\otimes H^j(Y;\Lambda)}$$

Az izom.-t a ×-szorzás adja.

Def $a\in H^i(X)$, $b\in H^j(Y)$

$p_1: X\times Y \to X$

$p_2: X\times Y \to Y$ $\qquad a\times b \overset{\text{def}}{=} p_1^* a \cup p_2^* b$

Köv. Szorzás $H^*(X\times Y)$-ban:

$(a\times b)\cup(a'\times b') =$

↖ ∀ elem ilyenek összege $H^*(X\times Y)$-ban, ilyeneket kell tudni összeszorozni

$= (p_1^* a \cup p_2^* b) \cup (p_1^* a' \cup p_2^* b') =$

$= (p_1^* a \cup p_1^* a') \cup (p_2^* b \cup p_2^* b')(-1)^{|b|\cdot|a'|} =$

$= \pm\, p_1^*(a\cup a') \cup p_2^*(b\cup b') = \pm(aa' \times bb')$

Def Grad. gyűrűk tenzorszorzatán a szorzás:

$$(a\otimes b)(a'\otimes b') = (aa'\otimes bb')(-1)^{|b||a'|}$$

Tehát így nemcsak additív izot., hanem gyűrűizomorfizmust is kaptunk.

$$H^*(\mathbb{RP}^n\times\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2) = \left(\mathbb{Z}_2[x]/_{x^{n+1}=0}\right)\otimes\left(\mathbb{Z}_2[y]/_{y^{n+1}=0}\right) =$$

$$= \mathbb{Z}_2[x,y]/_{x^{n+1}=0,\ y^{n+1}=0}$$

7. előadás

múltkori 2) $\nexists$ k-vált. univ. ∂ kohom. műv. között.

18.) ξ, η két ir. 2-dim nyaláb S^2 fölött.

$\xi \approx \eta \iff H^*(T\xi;\mathbb{Z}) \approx H^*(T\eta;\mathbb{Z})$ „Milyen gyűrűk állnak így elő?

19.)* $f: S^3 \longrightarrow S^2$ $H(f)$ ekv. def-ja:

$X = S^2 \cup_f D^4$ $H^*(X;\mathbb{Z})$ (ebben csak a 2 ill 4-dim kohom. csop $\neq 0$)

g_2 – 2-dim gener.

g_4 – 4-dim.

$g_2^2 = k\cdot g_4$ **áll**: $k = H(f)$ (Hopf invariáns)

T. X, Y CW Λ egys. elemes gyűrű

$H^i(X;\Lambda) = H^iX$ torziómentes pl $\Lambda = \mathbb{Z}$ és Tor $= 0$

$\Lambda =$ test, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$

Y-nak véges sok cellája $\forall$ dim-ban

$$\Rightarrow H^n(X\times Y;\Lambda) \approx \bigoplus_{i+j=n} H^i(X;\Lambda)\otimes H^j(Y;\Lambda)$$

$$a\times b \longleftarrow\!\!\!\mid\ a\otimes b \qquad p_1: X\times Y \longrightarrow X$$

$$\overset{\shortparallel}{p_1^* a \cup p_2^* b} \qquad p_2: X\times Y \longrightarrow Y$$

$X/_A \wedge Y/_B = X\times Y/_{A\times Y\cup X\times B}$ (X,A) (Y,B)

$\leftarrow$ relatív verzió (L HF)

Biz Ezentúl $\forall$ Λ eh-s.

$e \in H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)$ $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\wr\wr$

$H^1(I,\partial I)$ $[-1,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$

$\partial[-1,1] = \{-1,1\} \hookrightarrow \mathbb{R}_0$

$(I,\partial I) \hookrightarrow (\mathbb{R},\mathbb{R}_0)$ homot. ekv.

$H_1(I,\partial I) = \cancel{(\Lambda)}\ \mathbb{Z}$

$\rotatebox{90}{$\in$}$

$[id] = \sigma$ a generátor (I irányítása egyért. megadja)

~~(H)~~

$$0 \to \overbrace{\mathrm{Ext}(H_0,\Lambda)}^{0} \to H^1(I,\partial I) \approx \mathrm{Hom}(H_1(I,\partial I),\Lambda)$$

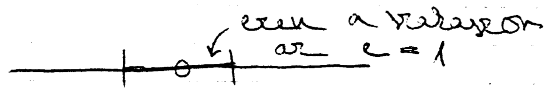
↖ $\mathbb{Z}$ együttható

Általában $(n-1)$-öf. Z tér $\Rightarrow$

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Ext}(H_{n-1}(Z),\Lambda)}_{0} \to H^n(Z) \approx \mathrm{Hom}(H_n(Z),\Lambda)$$

$e \in H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0) \approx H^1(I,\partial I)$ $\qquad e(\sigma) = 1$

$H_1(I,\partial I) \xrightarrow{\approx} H_1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)$



ezen a szakaszon az $e = 1$

e def-ja:

$$H^0(\mathbb{R}_+) \xleftarrow{\approx} H^0(\overset{\mathbb{R}_+\cup\mathbb{R}_-}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}_0}},\mathbb{R}_-) \xrightarrow[\approx]{\delta} H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0) \ni e$$

↑ kivágás

ez felel meg az 1-nek

$\shortparallel$

$1 \in \Lambda$

↗ $(\mathbb{R},\mathbb{R}_0,\mathbb{R}_-)$ térhármas egzakt sorozatából:

$X \supset A \supset B$

$$0 \to C_i(A)/C_i(B) \to C_i(X)/C_i(B) \to \frac{C_i(X,A)}{C_i(B)} = C_i(X)/C_i(A)\Big/C_i(B) \to 0$$

$\shortparallel$ $C_i(X,A)$ $\quad$ ⇖ $C_i(B) \subset C_i(A)$

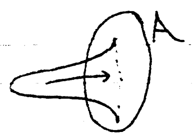
$$\begin{tikzcd}
H_i(A,B) \arrow[r] & H_i(X,B) \arrow[r] & H_i(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr, "\partial"'] & H_{i-1}(A,B) \\
& & & H_{i-1}(A) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

kohom.:

$$H^i(A,B) \leftarrow H^i(X,B) \leftarrow H^i(X,A) \xleftarrow{\delta} H^{i-1}(A,B)$$

$$H^0(\mathbb{R},\mathbb{R}_-) \to H^0(\mathbb{R}_0,\mathbb{R}_-) \xrightarrow[\approx]{\delta} H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0) \to H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_-)$$
$$\underset{0}{\shortparallel} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underset{0}{\shortparallel}$$

$H_i(X,A)=0$, ha az A def retr.-a X-nek

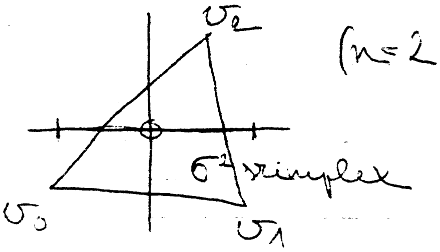


$$C_i(X)/C_i(A)$$

$$\begin{tikzcd} H_i(A,A)=0 \arrow[d, shift left] \arrow[d, Rightarrow, shift left=6] \\ H_i(X,A)=0 \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

$$e^n \in H^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n_0) = \underset{\underset{e}{\cup}}{H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)} \times \dots \times \underset{\underset{e}{\cup}}{H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)}$$

$$H^i(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n_0) \approx H^i(D^n,S^{n-1}) = \begin{cases} \Lambda & i=n \\ 0 & i\neq n \end{cases}$$



(n=2 az ábrán)

$e\times e(\sigma^2)=1$, mert
$[p_1^*(e)\cup p_2^*(e)](\sigma^2)=$

$$= p_1^* e(\sigma^2[v_0,v_1])\cdot p_2^* e(\sigma^2[v_1,v_2]) =$$

$$= \underset{1}{e(p_{1*}\sigma^2[v_0,v_1])}\cdot \underset{1}{e(p_{2*}\sigma^2[v_1,v_2])}$$

$p_1^* e \in H^1((\mathbb{R},\mathbb{R}_0)\times\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\setminus y\text{-tengely})$

$p_2^* e \in H^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\setminus x\text{-tengely})$

$H^i(X,A)\times H^j(Y,B) \to H^{i+j}(X\times Y, A\times Y\cup X\times B)$

$p_1^* e \cup p_2^* e \in H^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$

$$\underset{\underset{e\times e}{\cup}}{H^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2_0)} = \mathrm{Hom}(\overbrace{\underset{\underset{[\sigma^2]}{\cup}}{H_2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2_0)}}^{\mathbb{Z}},\Lambda)$$

$\Rightarrow$ $e\times e$ generátor, mert $e\times e(\sigma^2)=1$ $\Rightarrow$ $[\sigma^2]=1$, hiszen egyébként ha $[\sigma^2] = k \in \mathbb{Z}$, akkor $e \times e(1) = \frac{1}{k}$ ↯.

I. A5. A nyílt $\subset X$

$$\begin{tikzcd}
H^m(X,A) \arrow[r] & H^{m+n}\Big(\underbrace{(X,A)\times(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n_0)}_{(X\times\mathbb{R}^n,\ A\times\mathbb{R}^n \cup X\times\mathbb{R}^n_0)}\Big) & \text{izo.} \\
a \arrow[r, mapsto] & a\times e^n &
\end{tikzcd}$$

Biz A5. Elég $n=1$-re, $a\times e^n = (a\times e^{n-1})\times e$

1) $n=1$ $A=\emptyset$ $a\in H^m X$

$$\begin{tikzcd}
1\in H^0(\mathbb{R}_+) & H^0(\mathbb{R}_0,\mathbb{R}_-) \arrow[l, "\approx"'] \arrow[r, "\delta", "\approx"'] \arrow[d, "a\times"] & H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)\ni e \arrow[d, "a\times"] \\
H^m(X\times\mathbb{R}_+) \arrow[u, leftarrow, "a\times"] \arrow[d, equal] & H^m(X\times(\mathbb{R}_0,\mathbb{R}_-)) \arrow[l, "\approx", "\text{kivágás}"'] \arrow[r, "\approx"'] & H^{m+1}(X\times(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)) \\
a\in H^m(X) & & a\times e
\end{tikzcd}$$

$X\times\mathbb{R}_-$-nek def. retr.-a $X\times\mathbb{R}_-$
+ térhármasok egz. sorozata

Tehát a tényleg az $a\times e$-be megy.

2) $n=1$, $A\neq\emptyset$

$z\in Z^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)$ $[z]=e\in H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)$

$$\begin{tikzcd}
 & & C^{m+1}(X,A) & & \\
0 \arrow[r] & C^m(X,A) \arrow[r] \arrow[ur, "\delta"] \arrow[d, "\times z"] & C^m(X) \arrow[r] \arrow[d, "\times z"] & C^m(A) \arrow[r] \arrow[d, "\times z"] & 0 \\
 & \hat{C}^{m+1}(X\times\mathbb{R};\ X\times\mathbb{R}_0, A\times\mathbb{R}) \arrow[r] & C^{m+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_0) \arrow[r] & C^{m+1}(A\times\mathbb{R}, A\times\mathbb{R}_0) &
\end{tikzcd}$$

mindkettőn eltűnő kolánc   itt egzakt

$$\delta(a\times z) = (\delta a)\times z \pm \cancel{a\times \underbrace{\delta z}_{=0}} \qquad (\delta(\alpha\cup\beta)\text{-t láttuk})$$

$\Rightarrow$ a hosszú egzakt sorozatok között indukálódik leképezés (mert $\times z$ morfizmus a lánckomplexusok rövid egzakt sorozatai között és a hosszú egz sorozat képzése funktoriális.)

$$\begin{tikzcd}
H^m(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\times e"] & H^m(X) \arrow[r] \arrow[d, bend left, "\times e", "\approx"'] & H^m(A) \arrow[r] \arrow[d, "\times e", "\approx"'] & {} \\
H^{m+1}((X,A)\times(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)) \arrow[r] & H^{m+1}(X\times(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)) \arrow[r] & H^{m+1}(A\times(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)) &
\end{tikzcd}$$

Öt lemma $\approx$ →

izo. ← 1.) miatt →

↑ a három sorozatnál kellett, hogy A nyílt

Öt lemma $\Rightarrow$ $H^m(X,A) \longrightarrow H^{m+n}((X,A)\times(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n_0))$ izo.

□

$$\bigoplus_{m+n=k} H^mX \otimes H^nY \longrightarrow H^{\overset{k}{\cancel{m+n}}}(X\times Y) \quad \text{izo.}$$

$$a\otimes b \longmapsto a\times b$$

Biz 1) Y véges CW kompl. Ind Y celláinak száma szerint. $Y = *$ (hf)

E nyílt, max dim cella Y-ban

$Y_1 = Y \setminus E$

ind. felt

$$\times' : \bigoplus_{i+j=n} H^iX \otimes H^jY_1 \xrightarrow{\approx} H^n(X\times Y_1)$$

$$a\otimes b \longmapsto a\times b$$

egzakt marad, mert H^iX torziómentes ↓

az (Y,Y_1) pár egz sorozata $\otimes H^iX$ és összegzve ↙

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i+j=n} H^iX \otimes H^jY \arrow[r] \arrow[d, "\times"] & \bigoplus_{i+j=n} H^iX \otimes H^jY_1 \arrow[r] \arrow[d, "\times'", "\approx"'] & \bigoplus_{i+j=n} H^iX \otimes \underbrace{H^j(Y,Y_1)} \arrow[r] \arrow[d, "\times''"] & \underset{\bigoplus_{i+j=n+1}}{0} \\
H^n(X\times Y) \arrow[r] & H^n(X\times Y_1) \arrow[r] & H^n(X\times Y, X\times Y_1) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

↓ írható $(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k_0)$

$\approx H^n(X\times(E,E_0))$

$(Y, Y\setminus *, Y_1)$ $\xrightarrow[\text{hosszú egz}]{\text{térhármas}}$ $H^j(Y,Y_1) \approx H^j(Y, Y\setminus *)$

$* \in E$

$H^j(Y\setminus *, Y_1) = 0$ mert

Y_1 def retr.-ja $Y\setminus *$ -nak

$$H^j(Y, Y\setminus *) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{kivágás}}}{=} H^j(E, E\setminus *) = H^j(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k_0)$$

$$H^j(Y,Y_1) \xleftarrow{\approx} H^j(Y, Y\setminus *) \xrightarrow{\approx} H^j(E,E_0)$$

$$\begin{tikzcd}
H^n(X\times Y, X\times Y_1) & H^n(X\times Y, X\times(Y\setminus *)) \arrow[l, "\approx"'] \arrow[r, "\approx"] & H^n(X\times E, X\times E_0) \arrow[d, phantom, "\ni"] \\
 & & a\times e_k \\
 & & H^m(X) \ni a \arrow[uu] \arrow[uull, "\times''"] \\
 & & \bigoplus_{i+j=n} H^i X \otimes H^j(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k_0) \arrow[u, "m=n-k,"']
\end{tikzcd}$$

többi tagja $= 0$

$\overset{A.5.}{\Longrightarrow}$ $\times''$ izom $\overset{\text{ötlemma}}{\Longrightarrow}$ $\times$ izom

2) Y ált.

$< r$ dimenzióig igaz, $Y \rightsquigarrow sk_{r+1} Y$ ← r-ig ugyanaz a kohomológiája

~~$(X\times sk_{r+1} Y)$~~ $X\times Y \supset X\times sk_{r+1} Y$ dim $< r$-re izo.

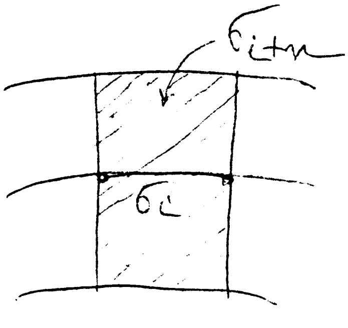
$\square$

Szemléltetés: X $X\times(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)$

X $X\times(D^n, S^{n-1})$

$H^i_i(X) \overset{?}{\approx} H^{i+n}_{i+n}(X\times(D^n,S^{n-1}))$ triv.:

$$\begin{tikzcd}
C_i(X) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\ni"] & {} \\
\sigma_i \arrow[r] \arrow[d] & \sigma_{i+n} \arrow[d] \\
\sigma_{i-1} \arrow[r] & \sigma_{i+n-1}
\end{tikzcd}$$



A nehézség az, hogy a $\times$ létesíti az izo.-t.

$\Delta: X \to X\times X$

$a\cup b \xleftarrow{\Delta^*} \underset{a\times b}{a\otimes b}$

Tehát az $a\cup b$ legelső def-ja ugyanaz, mint a precíz def.

8. előadás

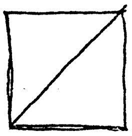
Szorzat duálisa = metszet utsz 1 (nem triv.) kör:

$$X \xrightarrow{\Delta} X \wedge X \longrightarrow K_k \wedge K_l$$

⌜

$$X \times X / X \vee X \qquad A \times B / A \vee B$$

$$A \times \underset{\overset{\frown}{B}}{b} \cup \underset{\overset{\frown}{A}}{a} \times B$$



⌟

$A \subset X \quad \operatorname{codim} A = k$

$B \subset X \quad \operatorname{codim} B = l$

$K_k = K(\mathbb{Z}, k) \qquad H^k(X;\mathbb{Z}) = [X, K_k]$, $\quad f^*\sigma_k \longleftarrow f$

$K_l = K(\mathbb{Z}, l)$

$a \in H^k(X;\mathbb{Z})$, ahol $D_X[A] = a$ ← az A által repr. homol oszt. (→ fund oszt képe) Poincaré-duálisa

$D_X[B] = b \in H^l(X;\mathbb{Z})$

$$X \times X \longrightarrow K_k \times K_l$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (a(x_1), b(x_2))$$

$$X \xrightarrow{\Delta} X \wedge X \xrightarrow{a \otimes b} K_k \wedge K_l \longrightarrow K_{k+l}$$

$\sigma_k \quad \sigma_l$ ← fundamentális osztály

$$H_k(K_k) \overset{\text{Hurewicz}}{\cong} \mathbb{Z} \qquad (\pi_k(K_k) \text{ az első} \neq 0 \text{ homot. csop.})$$

$$0 \to H^k(K_k) \to \operatorname{Hom}(\underbrace{H_k(K_k)}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) \to 0$$

↑ σ_k a generátor

$$a : X \longrightarrow K_k$$

$$a \longleftarrow \overset{\cup\!\!\!\!\!\!\;}{\sigma_k}$$

(a fund osztályt visszahúzva kapjuk a repr. kohomol osztályt)

$$\overline{H}^*(X \wedge Y) = \overline{H}^*(X) \otimes \overline{H}^*(Y)$$

$$H^*(X) = \overset{H^0(X)}{\overset{\parallel}{\mathbb{Z}}} \oplus \overline{H}^*(X)$$

$$H^*(X\times Y) = H^*(X)\otimes H^*(Y) = (\mathbb{Z}\oplus \bar{H}^*(X))\otimes(\mathbb{Z}\oplus\bar{H}^*(Y)) =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}}_{H^0}\oplus\mathbb{Z}\otimes\bar{H}^*(Y)\oplus\bar{H}^*(X)\otimes\mathbb{Z}}_{H^*(X\vee Y)}\oplus\underbrace{\bar{H}^*(X)\otimes\bar{H}^*(Y)}_{\bar{H}^*(X\wedge Y)}$$

$$H^*(X\vee Y) = \bar{H}^*(X)\oplus\bar{H}^*(Y)\oplus\mathbb{Z}$$

Egz. sorozat

$$\bar{H}^*(X\wedge Y) = H^*(X\times Y, X\vee Y)$$

$$H^*(A,B) = H^*(A/B, \underbrace{B/B}_{*}) = \bar{H}^*(A/B)$$

$$\begin{tikzcd}
a\cup b & a\otimes b \arrow[l, "HF."'] & \sigma_k\otimes\sigma_l \arrow[l] & \sigma_{k+l} \arrow[l, "def"'] \\
X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rrr, bend right, "a\cup b"'] & X\wedge X \arrow[r, "a\wedge b", "a\otimes b"'] & K_k\wedge K_l \arrow[r] & K_{k+l}
\end{tikzcd}$$

$$f_1 : X_1\to Y_1 \qquad f_2 : X_2\to Y_2$$

$$f_1\hat{\times}f_2 : X_1\hat{\times}X_2\to Y_1\hat{\times}Y_2$$

$$\bar{H}^*(X_1)\otimes\bar{H}^*(X_2)\xleftarrow{(f_1\wedge f_2)^*}\bar{H}^*(Y_1)\otimes\bar{H}^*(Y_2)$$

$$f_1^*\alpha\otimes f_2^*\beta \longleftarrow\!\shortmid\ \alpha\otimes\beta$$

$$\underset{(\text{HF ált})}{\underline{\mathcal{L}}}\quad \Delta^*\underset{a\times b}{(a\otimes b)} = a\cup b$$

<u>Biz</u>

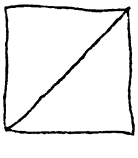
$$X\times Y \qquad p_1 : X\times Y\to X \qquad p_2 : X\times Y\to Y$$

$$a\times b \overset{def}{=} p_1^*a\cup p_2^*b$$

$$X=Y \Rightarrow \exists\,\Delta$$

$$\Delta^*(a\times b) = \Delta^*(p_1^*a\cup p_2^*b) = \Delta^*p_1^*a\cup\Delta^*p_2^*b =$$

$$= \underset{id_X}{\underset{\shortparallel}{(p_1\circ\Delta)^*}}a\cup\underset{id_X}{\underset{\shortparallel}{(p_2\circ\Delta)^*}}b = a\cup b.$$



□

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[drr, bend right, "\text{A,B-re Thom konstr.}"] \arrow[drrr, bend right=40] & X \wedge X \arrow[r] & \cancel{A}\; K_k \wedge K_l \arrow[r] & K_{k+l} \\
 & & M_k \wedge M_l \arrow[u, "u_k \wedge u_l"] \arrow[r] & M_{k+l} \arrow[u, "u_{k+l}"]
\end{tikzcd}$$

$M_k = MSO(k) = T\gamma_k^{SO}$ Thom tér

$$\begin{tikzcd}
\gamma_k^{SO} \arrow[r, "\mathbb{R}^k"] & BSO(k) = \widetilde{G}_k(\mathbb{R}^\infty) \arrow[d, "2"] \\
 & G_k(\mathbb{R}^\infty)
\end{tikzcd}$$

← irányított alterek

$T\gamma_k^{SO} = D(\gamma_k^{SO}) / S(\gamma_k^{SO})$

Thom konstr.: $A^{n-k} \subset X^n$

$\exists \; X^n \xrightarrow{\varphi} T\gamma_k^{SO}$ $\qquad \varphi \pitchfork \widetilde{G}_k$

$\widetilde{G}_k$ (0-szelés) $\qquad \quad \swarrow$

$A = \varphi^{-1}(\widetilde{G}_k)$

($\widetilde{G}_k(\mathbb{R}^\infty)$ ∞ dimenziós, helyette vesszük $\widetilde{G}_k(\mathbb{R}^N)$-et, csak nagy ds. cellákat hagytunk el. Lokálisan $T\gamma_k^{SO,N}$ sokaság, van értelme a transzverzalitásnak)

$\nu(A \subset X)$ = normálnyaláb ≈ csöves környezet

$\downarrow$ klasszifikáló leképezés

$\gamma_k^{SO,N}$

$$\begin{tikzcd}
X^n \arrow[r, "\varphi"] & T\gamma_k^{SO,N} \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
 & \widetilde{G}_k(\mathbb{R}^N)
\end{tikzcd}$$

Def Thom osztály

1) ξ sima vektornyaláb

B^m sima sokaság $\qquad E(\xi) \xrightarrow{\mathbb{R}^k} B$

$\uparrow$

sima sok.

$$u_\xi \in H^k(D(\xi), S(\xi); \underset{\uparrow}{\mathbb{Z}})$$

ha ξ ir. és a B ir.

$\mathbb{Z}_2$ ha ξ tetsz.

D(ξ) sokaság, S(ξ) a pereme. Ekkor van Poincaré-dualitás:

$$u_\xi = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{duális}}}{D}[B], \quad \text{ahol } [B] \in H_{*m}\left(D(\xi); \tfrac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}_2}\right).$$

Megj. u_ξ az (egyik) generátor $H^k(D(\xi), S(\xi))$-ben,

mert $H^k(D(\xi), S(\xi)) \overset{PD}{\cong} H_m(D(\xi)) \overset{\substack{\text{retr.} \\ \downarrow}}{=} H_m(B^m) = \begin{cases} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}_2 \end{cases}$

A fibrum (D^k, S^{k-1}), erre megszorítva

u_ξ(fibrum) $= 1$ (a $\mathbb{Z}$ esetben). (ez egyért. definiálja)

$$\begin{tikzcd}
u_\xi \in H^k(D^k(\xi), S^{k-1}(\xi)) \arrow[d] \arrow[d, "\text{megszorítás}"] \\
\mathbb{Z} \text{ v. } \mathbb{Z}_2 = H^k(D^k, S^{k-1}) & \text{Hom}\left(H_k(D^k, S^{k-1}), \tfrac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}_2}\right) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

a generátort az ir. adja

$$u_k = u_{\gamma_k^{SO,N}}$$

2) def: tetsz. vnyalábra később.

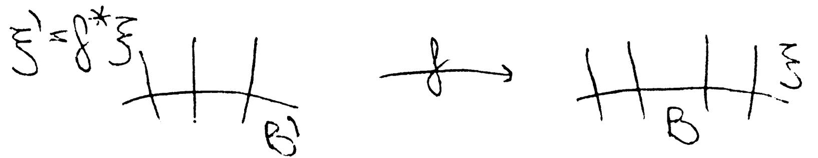
$$H^k(D(\xi), S(\xi)) = H^k(\overset{\text{a faltér}}{T\xi})$$

$$u_\xi \in H^k\left(T\xi; \tfrac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}_2}\right)$$

Megj. u_ξ-t egyért. def-ja, hogy u_ξ(fibrum) $= 1$.

Köv. 1.) A Thom osztály természetes, azaz

$$u(f^*\xi) = f^*u(\xi)$$



, mert

$$u(f^*\xi)([D',S']) = 1$$

$$f^* u(\xi)([D',S']) = u(\xi)(f_*[D',S']) = u(\xi)([D,S]) = 1.$$

Köv. 2) A Thom osztály multiplikatív, azaz

$$u(\xi\times\eta) = u(\xi)\times u(\eta)$$

$$\xi \ \pi_\xi : E(\xi) \xrightarrow{\mathbb{R}^k} B(\xi)$$

$$\eta \ \pi_\eta : E(\eta) \xrightarrow{\mathbb{R}^l} B(\eta)$$

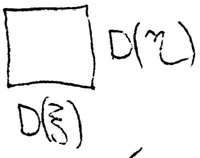
$$\begin{tikzcd} E(\xi\times\eta) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "="] & E(\xi)\times E(\eta) \arrow[dl, "\pi_\xi\times\pi_\eta"] \\ B(\xi)\times B(\eta) & \end{tikzcd}$$

$$u(\xi\times\eta)\in H^{k+l}(D(\xi\times\eta), S(\xi\times\eta))$$

$$u(\xi)\in H^k(D(\xi), S(\xi))$$

$$u(\eta)\in H^l(D(\eta), S(\eta))$$

$$H^*(X,A)\otimes H^*(Y,B)\longrightarrow H^*(X\times Y, A\times Y\cup X\times B)$$



(Biz $\langle u(\xi\times\eta), [D(\xi\times\eta), S(\xi\times\eta)]\rangle = 1$ def szerint

$\langle u(\xi)\times u(\eta), [D(\xi\times\eta), S(\xi\times\eta)]\rangle$)

Biz

$$u_\xi \in H^k(D(\xi), S(\xi)) \qquad (D,S)\overset{j}{\hookrightarrow}(D(\xi),S(\xi))$$

$$\downarrow j^*$$

gener $\in H^k(D,S) = \mathbb{Z}$

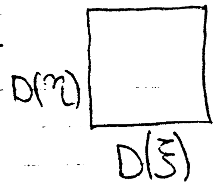
$$u_\xi\times u_\eta \xrightarrow{(j_1\times j_2)^*} \text{gener}_1 \times \text{gener}_2 \in H^{k+l}(D\times D', \partial(D\times D'))$$

$$\underset{\overset{\uparrow}{\xi \text{ fibr.}}}{\overset{\cap}{H^k(D,S)}} \cdot \underset{\overset{\uparrow}{\eta \text{ fibr.}}}{\overset{\cap}{H^l(D',S')}}$$

$$H^k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k_0)\otimes H^l(\mathbb{R}^l,\mathbb{R}^l_0)\longrightarrow H^{k+l}(\mathbb{R}^{k+l},\mathbb{R}^{k+l}_0)$$

$(D^k, S^{k-1})\subset(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k_0)$ láttuk, hogy itt a generátorok szorzata a generátor □

L $T(\xi \times \eta) = T\xi \wedge T\eta$ Biz



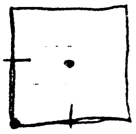
(HF)

□

$$\begin{tikzcd}
\gamma_k^{SO} \arrow[d] & \times & \gamma_l^{SO} \arrow[r] & \gamma_{k+l}^{SO} \arrow[d] \\
BSO(k) & \times & BSO(l) \arrow[r, "\text{klasszifikáló}"', "\text{lek.}"' near end] & BSO(k+l)
\end{tikzcd}$$

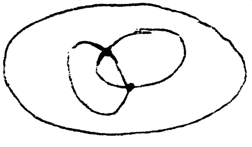
Fibrumonként izo. ⇒ indukál a Thom-terek közt leképezést: $T(\gamma_k^{SO} \times \gamma_l^{SO}) = M_k \wedge M_l$

$$\begin{tikzcd}
M_k \wedge M_l \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cup"] & M_{k+l} \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
BSO(k) \times BSO(l) \arrow[r] & BSO(k+l)
\end{tikzcd}$$



↑ ez messze van az összecsípett értéktől

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}A \subset \\ B \subset\end{matrix}\overset{a\cup b}{X} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rrr, bend right=10, "a\cup b"'] \arrow[drr, "{[A\cap B]}", "{\substack{\text{Thom konstr.}\\ \nu = k\text{-dim} \oplus l\text{-dim}}}"'] \arrow[drrr, bend right=20, "{\substack{[A\cap B]\\ \text{Thom konstr.}\\ \nu = (k+l)\text{-dim}}}"', "\varphi"] & \overset{a\otimes b}{X \times X} \arrow[r] & \overset{\sigma_k \otimes \sigma_l}{K_k \wedge K_l} \arrow[r] & \overset{\sigma_{k+l}}{K_{k+l}} \\
 & & M_k \wedge M_l \arrow[r] \arrow[u, "u_k \wedge u_l"'] & M_{k+l} \arrow[u, "u_{k+l}"']
\end{tikzcd}$$



$$\underbrace{BSO(k) \times BSO(l)}_{} = B[SO(k) \underset{\overset{\cap}{SO(k+l)}}{\oplus} SO(l)]$$ ← univ. a felbontott nyalábok között

univ. bázis azon R^{k+l} fibr. nyalábokra, melyekre a fibrumok fel vannak bontva $R^k \times R^l$ alakban.

$$\underline{BSO(k)} \times BSO(l) \overset{\text{indukált ek}}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} B[SO(k) \oplus SO(l)]$$

a kompozíció saját magát indukálja

az előző komponenst indukálják (a felette levő nyalábot felbontják)

kategóriaelm.: univ. elemek

$\nu(A \cap B)$ felbomlik $\nu(A) \oplus \nu(B)$ alakban ez diagram komm.: $\varphi^*(u_{k+l}) = D_X[A\cap B]$

T csöves környezete $A\cap B$-nek X-ben

$\nu: A\cap B \subset X$ normálnyalábja $\quad T\nu = T/\partial T$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r"] & T/\partial T \arrow[r] & M_{k+l} \\
 & u_\nu \arrow[d, equal] & u_{k+l} \arrow[l] \\
 & D_X[A\cap B] & D_T[A\cap B] \arrow[l, "r^*"']
\end{tikzcd}$$

9. előadás

Karakterisztikus osztályok

$E \to X$ $\quad \mathbb{C}^n$-nyaláb

$R \to X$ $\quad \mathbb{R}^n$-nyaláb

Cél: $E \rightsquigarrow c_0(E), c_1(E), \dots, c_n(E)$ $\qquad \mathbb{C}$

$c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$

Chern osztályok

$R \rightsquigarrow w_0(R), \dots, w_n(R)$ $\qquad \mathbb{R}$

$w_i(R) \in H^i(X;\mathbb{Z}_2)$

Stiefel – Whitney osztályok

$p_i(R) \in H^{4i}(X;\mathbb{Z})$ Pontrjagin-osztály (R ir.) $\quad \mathbb{H}$

$e(R) \in H^n(X;\mathbb{Z})$ Euler-oszt. (R ir.)

Elvárt tulajdonságok:

(1) $c_i(E) = 0$ $i > n$-re és $c_0(E) = 1$

$w_i(R) = 0$ $i > n$-re és $w_0(R) = 1$

(2) $f^*c_i(E) = c_i(f^*E)$ ha

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[d] & E \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

(3) $c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \dots + c_n(E) \in H^*(X;\mathbb{Z})$

Ha $E = E_1 \oplus E_2 \Rightarrow c(E) = c(E_1) \cup c(E_2)$

Whitney szorzat-formula: $c_i(E) = \sum_{j=0}^{i} c_j(E_1) \cup c_{i-j}(E_2)$

$c(E)$: totális Chern-osztály

(4) $\gamma_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}P^\infty$ esetén $c_1(\gamma_{\mathbb{C}})$ generálja $\underset{\cong \mathbb{Z}}{H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})}$-t.

$\gamma_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}P^\infty$ $\quad w_1(\gamma_{\mathbb{R}})$ —"— $\underset{\cong \mathbb{Z}_2}{H^1(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2)}$-t.

($w_1 \neq 0$)

(4') $\gamma_{\mathbb{C}}(1) \to \mathbb{C}P^1 = S^2$

(↑totális tere $\mathbb{C}P^2 \setminus pt$) -re ugyanez

$\gamma_{\mathbb{R}}(1) \to \mathbb{R}P^1 = S^1$

(↑totális tere Möbius-szalag, 1-vektorok: $S^1 \to S^1$)

<u>1. Ötlet</u> $\quad X$ parakompakt, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ v. $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Vect}_n^{\mathbb{F}}(X) \cong [X, Gr_n(\mathbb{F})]$$

spec $\mathrm{Vect}_1^{\mathbb{F}}(X) \cong [X, \mathbb{F}P^\infty]$

$L \to X$ 1-nyaláb $\rightsquigarrow f_L : X \to \mathbb{F}P^\infty$, vegyük

$f_L^*(g) \in H^{\substack{1\\2}}(X; \substack{\mathbb{Z}_2\\ \mathbb{Z}})$ és $g \in H^{\substack{1\\2}}(\mathbb{F}P^\infty; \substack{\mathbb{Z}_2\\ \mathbb{Z}})$ generátor

($\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^\infty$ irányítható, vegyük a poz generátort)

Legyen ez az elem $\substack{c_1(L)\\ w_1(L)}$

[Megj.: $[X, \mathbb{F}P^\infty] \xleftrightarrow{1-1} H^{\substack{1\\2}}(X; \substack{\mathbb{Z}_2\\ \mathbb{Z}})$ ad a fenti leképez,

$\mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1) \qquad \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & S^\infty \arrow[d] & & S^1 \arrow[r] & S^\infty \arrow[d] \\ & \mathbb{R}P^\infty & & & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

(S^∞ ← pontrahúzható)

így $\substack{c_1\\ w_1} : \mathrm{Vect}_1(X) \to H^{\substack{1\\2}}(X; \substack{\mathbb{Z}_2\\ \mathbb{Z}})$ csoportizo.

↑a csoportművelet a nyalábok tenzorszorzása (tenzorszorozzuk az áttérés-mátrixokat)]

<u>Általában</u> $\quad$ Ha $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ 1-nyalábok összege

$$\Rightarrow c(E) = \prod_{i=1}^{n} (1 + c_1(L_i))$$

($TS^2 \neq F_1 \oplus F_2$, hasonlóan TS^4 a komplex esetben)

<u>Tétel</u> $\quad X$ parakompakt és $E \to X$ adott n-nyaláb

$\Rightarrow \exists f : Y \to X$ folytonos, hogy:

– $f^*E = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n$ (ehhez Y = pt is elég volna)

– $f^*: H^*(X; \mathbb{Z}_{(2)}) \to H^*(Y; \mathbb{Z}_{(2)})$ mono.
(Felhasítási elv)

2. ötlet $\mathrm{Vect}_n^{\mathbb{F}}(X) \cong [X, Gr_n(\mathbb{F})]$

Követhető lenne a köv. strat.:

Jelöljünk ki $c_0, c_1, \dots, c_n \in H^*(Gr_n(\mathbb{F}); \frac{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{Z}})$ és

f_E-vel húzzuk vissza.

Legyen $X = \underbrace{\mathbb{F}P^\infty \times \dots \times \mathbb{F}P^\infty}_{n\text{-szer}}$

Ezen él: $\gamma_F \times \dots \times \gamma_F = \oplus pr_i^*(\gamma_F) \to X$ n-nyaláb

$\exists f: X = \overset{n}{\underset{1}{\times}} \mathbb{F}P^\infty \to Gr_n(\mathbb{F})$: $f^*\gamma = \bigoplus_1^n pr_i(\gamma_F)$

$$f^*: H^*(Gr_n(\mathbb{F}); \mathbb{Z}_{(2)}) \to H^*(\overset{n}{\underset{1}{\times}} \mathbb{F}P^\infty; \mathbb{Z}_{(2)}) \overset{\text{Künneth}}{=} \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \dots, x_n]$$

Im f^* ⊂ Szimmetrikus polinomok tere (mert X-en van egy S_n-hatás, a tényezőket permutálhatjuk)

Tétel f^* mono. és Im f^* = {szimm. polinomok tere}

$c_i(\gamma_n)$ = i-edik elemi szimm. polinom.

(Csak a (3)-ik ax. ellenőrzése nem triv.)

Tétel (Leray – Hirsch) X kompakt (van parakomp-ra is)
E → X adott F-fibrumú nyaláb (~~E.R.~~), $E_0 \subset E$ zárt része
$\exists F_0 \subset F$ térpár + $j_b: (F, F_0) \to (p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap E_0)$
homeom.-k ($b \in X$)

Tfh $a_1, \dots, a_n \in H^*(E, E_0; \mathbb{Z}_{(2)})$ olyan homogén elemek, hogy
$j_b^*(a_1), \dots, j_b^*(a_r)$ a $H^*(F, F_0; \mathbb{Z}_{(2)})$ tér szabad bázisa $\forall b \in X$ (mint $\mathbb{Z}$- ill. $\mathbb{Z}_2$ modulusnak).

$\Rightarrow H^*(E, E_0; \mathbb{Z}_{(2)})$ szabad $H^*(X)$-modulus $a_1, \dots, a_r$

generátorokkal.

($Y \to X$ esetén $H^*(Y)$-on $H^*(X)$ hat: visszahúzzuk és összeszorozzuk, $H^*(Y)$ egy $H^*(X)$-modulus)

$$\sum a_i H^*(X)$$

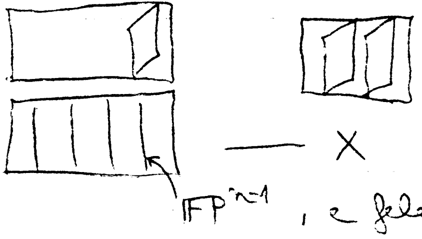
Legyen $E \to X$ $\mathbb{F}^n$-nyaláb, $E_0 = \{$nem 0-vektorok$\}$

$q: E' \to X$ egy új nyaláb: $E' = E_0 / \mathbb{F}^* \leftarrow \mathbb{F} \setminus \{0\}$, ennek fibruma $\mathbb{F}P^{n-1}$ lesz

$$\begin{tikzcd} G = q^*E \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ E' \arrow[r, "q"] & X \end{tikzcd}$$

Kapunk egy $G \to E'$ $\mathbb{F}^n$-nyalábot.

<u>Lemma</u> $G = L \oplus G'$, ahol L 1-nyaláb, G pedig $(n-1)$-nyaláb.



$\mathbb{F}P^{n-1}$, e felett L a taut. nyaláb, G' az ortokompl.

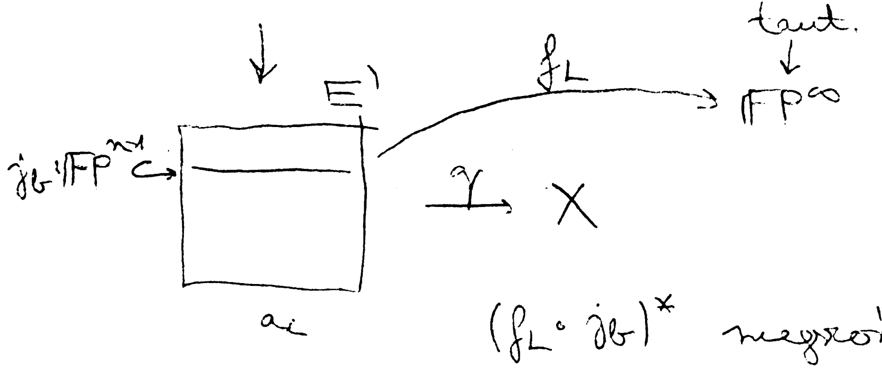
q^* mono, valójában $H^*(E')$ szabad $H^*(X)$-modulus, mert L-H: ~~(⊕)~~ $E' = E_{\text{L-H. tételben}}$, $E_0 = \emptyset$ tehát $F = \mathbb{R}P^{n-1}$, $F_0 = \emptyset$

Legyen $\underset{\overset{\cap}{H^{\frac{2}{1}}(E'; \mathbb{Z}_{(2)})}}{a_i} = (\lambda_L)^i$, $\lambda_L = f_L^*(\overset{\overset{H^{\frac{2}{1}}(\mathbb{F}P^\infty; \mathbb{Z}_{(2)})}{\cup}}{\gamma})$

$i = 0, \ldots, n-1$

$f_L: E' \to \mathbb{F}P^\infty \leftarrow f_L^* \gamma_{\mathbb{F}} = L$

$G = L \oplus G'$



$(f_L \circ j_b)^*$ megszorítás $\Rightarrow$ ~~(j_b^*)~~ $j_b^*(a_1), \ldots)$

$j_t^*(a_{n-1})$ a $H^*(\mathbb{F}P^{n-1})$ szabad generátorai.

$H^*(E; \mathbb{Z}_{(2)})$

$$(\lambda_L^{k})^n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(E)\cdot\lambda_L^{k-i}$$

Ez egyértelműen megadja az $x_i(E) \in H^{2i}(X; \mathbb{Z}_{(2)})$ elemeket.

Def Ha E $\underset{\mathbb{R}^n}{\mathbb{C}^n}$ -nyaláb, akkor $\underset{w_i}{c_i(E)} = \underset{x_i}{x_i(E)}$

Áll

Milyen k-ra $\exists$ $\mathbb{R}P^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$? $k \leq n-1$ elég

Áll Ha $n = 2^r$ és $\mathbb{R}P^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k} \Rightarrow k \geq n-1$.

($w(TS^2) = w(\underline{\mathbb{R}}^2) = 1$, mert $TS^2 \oplus \underline{\mathbb{R}} = \underline{\mathbb{R}}^3$

$w(TS^2 \oplus \underline{\mathbb{R}}) = w(\underline{\mathbb{R}}^3) = 1$

$\overset{||}{w(TS^2)}\cdot 1$ ↖ triv. nyaláb, a pontból húzható vissza így $w = 1$)

„Biz" $k < n-1$ nem lehet

1. lépés $w(\mathbb{R}P^n) \overset{def}{=} w(T\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{n+1}$

$\binom{n+1}{k}a^k$ a tipikus tag $\qquad$ $a \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$

2. lépés $w(\mathbb{R}P^{2^r}) = 1 + a + a^{2^r}$

3. lépés $\mathbb{R}P^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k} \Rightarrow$

$\exists\, x \in H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$: $(1+a+a^{2^r})x = 1$

$\overset{||}{w(\nu)}$ ← normálnyaláb, k-dim, $\overset{1+a+\dots+a^k}{}$ de $k \geq 2^r - 1$ kell legyen, hogy $(1+a+a^{2^r})x = 1$ teljesüljön

Husemoller: Fiber bundles

10. előadás

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[drr, "{[A\cap B]}"'] \arrow[drrr, bend right=30, "\varphi"'] & X\wedge X \arrow[r] \arrow[dr] & K_k\wedge K_l \arrow[r] & K_{k+l} \\
 & & M_k\wedge M_l \arrow[u, "u_k\wedge u_l"'] \arrow[r] & M_{k+l} \arrow[u, "u_{k+l}"']
\end{tikzcd}$$

$\sigma_k\otimes\sigma_l$ $\qquad$ σ_{k+l}

$A, B \subset X$

codim $A = k$

codim $B = l$

$T(A\cap B)/_{\partial T}$ $\quad a = D_X[A] \quad b = D_X[B] \quad \Delta^*(a\otimes b) = a\cup b$

$\boxed{!}$ //

$$\begin{tikzcd}
a\cup b & & \sigma_k\otimes\sigma_l & \sigma_{k+l} \arrow[lll] \\
X^n \arrow[r, "\Delta"] \arrow[ddd, "p"'] \arrow[drr, "{[A]\wedge[B]}"] \arrow[ddrr, "{[A\cap B]}"] \arrow[ddrrr, bend right] \arrow[urrr, bend right=60, "\varphi"'] & X\wedge X \arrow[r, "a\otimes b"] & K_k\wedge K_l \arrow[r] & K_{k+l} \\
D_X[A\cap B] & & \arrow[u, phantom, "*"] M_k\wedge M_l \arrow[u, "\mu_k\wedge\mu_l"] \arrow[r] \arrow[r, phantom, bend left, "\otimes"] & M_{k+l} \arrow[u, "\mu_{k+l}"'] \\
& & & \\
T(A\cap B)/_{\partial T} \arrow[uurr] \arrow[d, equal] & & u_k\otimes u_l \arrow[uulll] \arrow[dll] & u_{k+l} \arrow[l] \\
X/X\setminus\mathring{T} & u_{\nu(A\cap B)} & &
\end{tikzcd}$$

* homot. izom, mert ∀2 irányban az σ_k képe A duálisa

⊗ izom, mert a Thom oszt. multipl.

Maradt: $\quad D_T\overbrace{[A\cap B]}^{E} \xrightarrow{j^*} D_X[A\cap B]$ $\quad$ egymásnak felelnek meg

$$\begin{tikzcd}
D_T[A\cap B] \arrow[r, "j^*"] & D_X[A\cap B] \\
H^{k+l}(T,\partial T) \arrow[u, phantom, "\cap"] & H^{k+l}(X) \arrow[u, phantom, "\cap"] \\
H^{k+l}(X, X\setminus\mathring{T}) \arrow[u, equal] \arrow[ur, "j^*"'] &
\end{tikzcd}$$

$j: (X,\emptyset) \hookrightarrow (X, X\setminus\mathring{T})$

Biz Eml: A Poincaré dual. biz-a (duális felbontás)

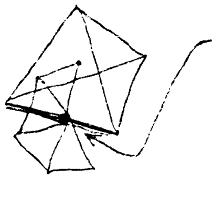
X triang. -ja

$$C_{i+1}(X) \longrightarrow C_i(X) \longrightarrow C_{i-1}(X)$$ szimpl. lánckompl

Klasszikus def:

$$\begin{tikzcd}
& C_i(X) \arrow[d, "D"] & \\
\arrow[r] & C^{n-i}(X) \arrow[r] & C^{n-i+1}(X)
\end{tikzcd}$$

duális felbontás kolánckompl



$\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots$

$\beta_1 \quad \beta_2 \ldots$ baricentrumok

$$D(\partial\sigma) = \delta(D\sigma)$$

(azon szimplexek összege, aminek ő benne van a határában, olyan előjellel, amilyennel a határban szerepel)

Megj. Ez ekv. a modern def-fal:

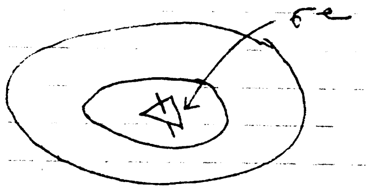
$$\mathrm{Hom}(\to C_{n-i}(X) \to C_{n-i-1}(X) \to \ldots) = \ldots \to C^{n-i}(X) \to \ldots$$

∀ cellához hozzárendeljük azt a fv.-t, ami hozzá 1-et rendel, a többihez 0-t. (ez a metszet)

$E^e \subset X$

↑

rész szimpl. kompl.



$D[E^e]$ = E e-dim szimplexeinek duális celláinak összege

(a duális felbontás cellái)

Ezeken az $(n-e)$-dim cellákon 1-et vesz fel, a többin nullát. Ez egy φ kolánc (a duális felb.)

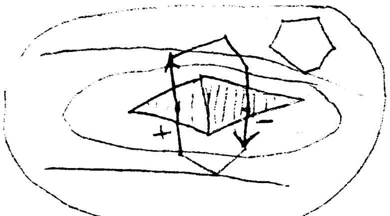
Áll a) φ kociklus

b) $[\varphi] = D[E^e]$

Biz a) $\delta\varphi \overset{?}{=} 0$, azaz $\varphi(\partial\Theta) = 0$ $\forall$ Θ láncra

Elég ezt belátni a Θ cellákra

$n-e+1$ dim cellák a duális felbontásban

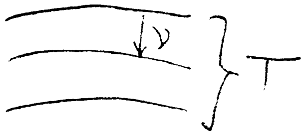


φ(lánc) = előjeles összeg az E-vel alkotott metszéspontoknak

Ez a $\varphi \equiv 0$ $\forall$ T-n kívüli láncon

$\Rightarrow$ φ reprezentál egy $H^*(T,\partial T)$-beli elemet. □

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] & \subset & T/\partial T \arrow[d] & = X/X\setminus \mathring{T} \\
BO(k) & \subset & M_k = MO(k) = T\gamma_k &
\end{tikzcd}$$



$A \subset T$

$\underbrace{D_T[A]}_{u_\nu} \in H^k(T,\partial T)$

$\xi \times \eta$

↓

$B_\xi \times B_\eta$

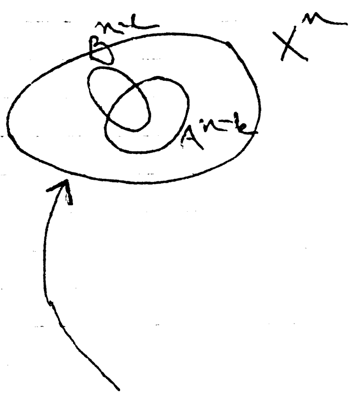
$\xi \to B_\xi$

$\eta \to B_\eta$

$T(\xi \times \eta) = T\xi \wedge T\eta$

□

A biz az univ modell elvén alapul



1 példa erre az elvre:

$$BO(k) \subset MO(k)$$

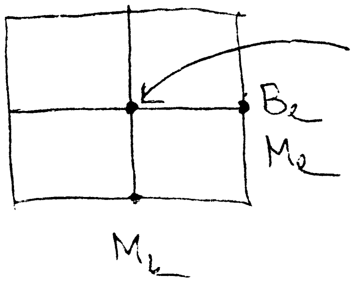
$$A \subset X \nearrow \alpha : \alpha^{-1}(BO(k)) = A$$

(univ példa 1db beágyazott sokaságra)

2 példa a biz-ban:

$$MO(k) \wedge MO(l) \supset MO(k) \times BO(l) \leftarrow B$$

$$BO(k) \times MO(l) \leftarrow A$$



$BO(k) \times BO(l) \leftarrow A \cap B$

Poincaré dual hivatalos biz-a

Sapka szorzás (Cap product)

R 1-elemes gyűrű

$$H^k(X;R) \longrightarrow H_{n-k}(X;R)$$

$$k \geq l$$

$$\cap : \underset{\sigma}{C_k(X;R)} \times \underset{\varphi}{C^l(X;R)} \longrightarrow C_{k-l}(X;R)$$

$\sigma : \Delta^k \to X$ $\quad\quad$ $\Delta^k = [v_0, \dots, v_k]$

$$\sigma \cap \varphi = \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_l]) \cdot \sigma|_{[v_l, \dots, v_k]}$$

L $\quad \partial(\sigma \cap \varphi) = (-1)^l (\partial\sigma \cap \varphi - \sigma \cap \delta\varphi)$

Biz Számolás, lásd Hatcher 248. o. □

Köv.
(HF) ⟶ $H_k(X;R) \times H^l(X;R) \longrightarrow H_{k-l}(X;R)$

$H_k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) \longrightarrow H_{k-l}(X;R)$, mert

$$C_k(X;R)\times C^\ell(X;R)\xrightarrow{\cap} C_{k-\ell}(X;R)$$

$$C_k(A;R)\times C^\ell(X,A;R)\longrightarrow 0$$

Tétel (PD)

X zárt sok. $\quad R = \begin{cases}\text{irányított } \mathbb{Z} \text{ együtth.}\\ \text{tetsz. } \mathbb{Z}_2\end{cases}$

$\exists\,[X]$ fund. osztály

$H^k(X;R)\to H_{n-k}(X;R)$ Ez a PD.

$\alpha\longmapsto [X]\cap\alpha$

Igaz a rel változat is.

L Sapka természetesség

$$f_*(\alpha)\cap\varphi = f_*(\alpha\cap f^*\varphi)$$

$f: X\to Y \quad \alpha\in H_*(X)\,,\ \varphi\in H^*(Y)$

Biz

$$f\sigma\cap\psi = \psi\left(f\sigma|_{[v_0,\dots,v_\ell]}\right)\cdot f\sigma|_{[v_\ell,\dots,v_k]} =$$

σ szing szimpl X-ben $\quad \| \quad f^\cdot\psi\left(\sigma|_{[v_0,\dots,v_\ell]}\right)$

ψ kolánc Y-ban

$$= f_\cdot\left(f^\cdot\psi\left(\sigma|_{[v_0,\dots,v_\ell]}\right)\cdot\sigma|_{[v_\ell,\dots,v_k]}\right)$$

□

Def $\mathbb{R}^n$-ben egy $x\in\mathbb{R}^n$-ben az irányítás $H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{x\})=\mathbb{Z}$-ben egy generátor kiválasztása $(\cong H_{n-1}(S^{n-1}))$

M^n top. sok. $\forall x\in M^n$-ben irányítás

$$H_n(M,M\setminus x)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{kivágás}}}{=}H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus x)=\mathbb{Z}$$

(Globális) irányítás az M-en: „folytonos" kiválasztása a $H_n(M^n,M^n\setminus x)$ generátorainak

$x,y\in B$ golyó $\subset\mathbb{R}^n\subset M^n$

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\approx"] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x) \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus y) & \end{tikzcd}$$

(a kiválasztott generátorok képződjenek egymásba)

Top. sok. irányítható, ha $\exists$ folyt. választás a lok. homol. generátoroknak

<u>11. előadás</u>

$[M]\cap x \qquad D_M : H^k(M) \longrightarrow H_{n-k}(M)$

<u>Áll</u> $f: A \longrightarrow B \supset C$ zárt sima sokaságok ← elég: kompakt az A, B

$f \pitchfork C \qquad \tilde{C} = f^{-1}(C)$

$C \cap \partial B = \emptyset$

$\Rightarrow \underset{\uparrow}{D_A}[\tilde{C}] = f^*(D_B[C])$ $\qquad f:(A,\partial A) \longrightarrow (B,\partial B)$

PD A-ban

<u>Biz</u> $B \supset T \overset{\nu}{\supset} C$

↑ tubular nbhd ↓

$A \supset \tilde{T} \overset{\tilde{\nu}}{\supset} \tilde{C}$

$\nu, \tilde{\nu}$ a normálnyalábja $C, \tilde{C}$-nek

$f^* \underset{\|\text{def}}{u_\nu} = u_{\tilde{\nu}}$ (Thom oszt. term.)

$f^* D_T[C] = D_{\tilde{T}}[\tilde{C}]$

$$\begin{tikzcd} D_A[\tilde{C}] \arrow[r, phantom, "\in"] & H^*(A) & H^*(B) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[r, phantom, "\ni"] & D_B[C] \arrow[lll, bend right] \\ & H^*(A, A\setminus \mathring{\tilde{T}}) \arrow[u] \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "\circ"] & H^*(B, B\setminus \mathring{T}) \arrow[u] \arrow[d, equal] & \\ & H^*(\tilde{T}, \partial\tilde{T}) \arrow[d, phantom, "\ni" rotate=90] & H^*(T, \partial T) \arrow[d, phantom, "\ni" rotate=90] & \\ & u_{\tilde{\nu}} & u_\nu = D_T[C] \arrow[l, "f^*"] & \end{tikzcd}$$

□

<u>Áll</u> $i_A : A \longrightarrow M \overset{i_B}{\supset} B \qquad i_A$ tetsz., $i_A \pitchfork B$

$C = i_A^{-1}(B) \qquad (i_A)_*[C] =$ metszet homol. oszt-a M-ben

$D_A[C] = i_A^*(\underbrace{D_M[B]}_{b})$

Biz. $(i_A)_*[C] = (i_A)_* D_A(i_A^* b) = (i_A)_*([A] \cap i_A^* b) =$

$= (i_A)_*([A]) \cap b = (D_M(a)) \cap b = ([M] \cap a) \cap b =$

a : $D_M a = (i_A)_*[A]$

$= [M] \cap (a \cup b) = D_M(a \cup b)$

↑
szimplexenként =-k

□

Pl. ① $H^*(A'_q ; \mathbb{Z}_2)$

$\alpha_1, \dots, \alpha_q$: $\alpha_i \cup \alpha_j = 0$ $(i \neq j)$, $\alpha_i^2 = 1$

② $H^*(\mathbb{RP}^n ; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/_{x^{n+1}=0}$

$[\mathbb{RP}^{n-1}] \subset [\mathbb{RP}^n]$

$D[\mathbb{RP}^{n-1}] = x \in H^1(\mathbb{RP}^n ; \mathbb{Z}_2)$ $\underbrace{x \cup \dots \cup x}_{n} \neq 0$

(n db hipersík metszete 1 db pont)

③ $H^*(\mathbb{CP}^n ; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[y]/_{y^{n+1}=0}$

Poincaré dual felé

Tl. a) ∃ fund. oszt.

M^n top. sok., $A \subset M^n$ kompakt

$\alpha_x \in H_n(M, M \setminus x ; \overset{\text{ring}}{R}) \approx R$ folyt. $x \in M$ $\Big\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists! \; \alpha_A \in H_n(M, M \setminus A)$

$\downarrow$

$\alpha_x \in H_n(M, M \setminus x)$ $\forall x \in A$

b) $H_i(M, M \setminus A ; R) = 0$ ha $i > n$.

jelölés: $H_n(M, M \setminus A) \rightleftharpoons H_n(M|A)$

$\quad\quad ||$

$H_n(U, U \setminus A)$ $U \supset A$ nyílt

"Folyt"? $D^n \ni x, y$

$$\begin{tikzcd} (M, M\setminus D^n) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (M, M\setminus x) \\ (M, M\setminus y) & \end{tikzcd}$$

$\alpha_y \xleftarrow{\approx} \alpha_x$

Def az irányítható fedést:

$$\widetilde{M} \xrightarrow{2} M$$

generátor ↓

$$\mu_x \in H_n(M, M\setminus x; \mathbb{Z})$$

↑ 2 lehetőség

$$\widetilde{M} = \{\mu_x \mid x \in M\} \qquad D^n \approx U_x \quad x \in M$$

$$\mu_x \xrightarrow{\text{meghat}} \mu_y \ \forall y \in U_x$$

↖ $\widetilde{U}_{\mu_x}$ egy top bázisa $\widetilde{M}$-en

Biz 1.) Tfh A-ra, B-re, $A\cap B$-re $\Rightarrow$ $A\cup B$-re is igaz

$$\begin{tikzcd}
(M, M\setminus(A\cup B)) \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & (M, M\setminus A) & \subset (M, M\setminus(A\cap B)) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
 & (M, M\setminus B) & (M, M\setminus A)\cup(M, M\setminus B)
\end{tikzcd}$$

-vel Mayer-Vietoris:

$$H_{n+1}(M, M\setminus(A\cap B)) \to H_n(M, M\setminus(A\cup B)) \xrightarrow{\Phi} H_n(M|A)\oplus H_n(M|B) \xrightarrow{\Psi} H_n(M|A\cap B)$$

$$\overset{\shortparallel}{0}$$

$$\alpha_{A\cup B} \overset{\hookrightarrow}{\underset{\hookrightarrow}{\longmapsto}} (\alpha_A, \alpha_B)$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha - \beta$$

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M}_R \arrow[r, "R"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & M \arrow[l, bend right, "\text{folyt. szelés}"'] & \alpha \arrow[l, phantom, "\leftrightsquigarrow"] \\
\widetilde{M}\times_{\mathbb{Z}_2} R \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha_A\big|_{A\cap B} = \alpha_{A\cap B}$$ az unicitás miatt.

$$\alpha_B\big|_{A\cap B} = \alpha_{A\cap B}$$

$\Rightarrow \Psi(\alpha_A, \alpha_B) = 0 \Rightarrow \exists!\, \alpha_{A\cup B}$, melyre $\Phi(\alpha_{A\cup B}) = (\alpha_A, \alpha_B)$.

Tehát a) igaz $A\cup B$-re is.

b) rész: 0-val vannak közrefogva

↗ $H_i(M|A\cup B)$ $i>n$.

2) Tfh $A\subset\mathbb{R}^n$-re igaz (más szóval $M=\mathbb{R}^n$-re igaz).

$]\, A\subset M^n$ $\quad \mathbb{R}^n_1, \dots, \mathbb{R}^n_m$ euklid környezetek, $U\supset A$

$$\underset{A_1}{\overset{\cup}{}} \qquad \underset{A_m}{\overset{\cup}{}} \qquad A = \bigcup_{i=1}^m A_i$$

m-szerinti ind-val igaz $\forall A\subset M$-re:

$m=1$-re: $H_*(M|A) = H_*(\mathbb{R}^n|A)$

ind lépés: $(A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})$ és A_m-re 1.):

két kompakt

T. igaz mindkettőre és a metszetre

$\overset{1.)}{\Longrightarrow}$ A-ra is

3.) $A = \Delta^j \subset \mathbb{R}^n$ szimplex $\Rightarrow$ triv:

$$H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Delta^j) \xrightarrow{\cong} H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$$

$i=n$ $\qquad \alpha_\Delta \xrightarrow{\cong} \alpha_x$ $\quad$ + folyt.

$i>n$ $\qquad 0$.

4) $A=K$ szimpl kompl. $\mathbb{R}^n$-ben $\overset{1.)}{\Longrightarrow}$ K-ra is igaz

5.) A kompakt $\subset \mathbb{R}^n$

$\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$ $\qquad z \in \alpha$ relatív ciklus, $[z]=\alpha$

$\partial z \subset \mathbb{R}^n \setminus A \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{távolság}}}{\rho}(\partial z, A) > \delta > 0$ $\quad$ (A és ∂z komp)

Tek. $\mathbb{R}^n$-nek egy triang-ját δ-nál kisebb átmérőjű szimplexekkel

$K = \{\sigma \in \text{triang} \mid \sigma \cap A \neq \emptyset\}$ $\qquad \partial z \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ is telj.

$$\begin{tikzcd}
{[z]_K} \arrow[d] & \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \arrow[d] \\
\alpha = {[z]} & \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)
\end{tikzcd}$$

$i>n \overset{(4)}{\Longrightarrow} [z]_K = 0 \Rightarrow \alpha = [z] = 0.$

$i=n$ $\quad \exists!\, \alpha_K$

$$\begin{tikzcd}
 & \alpha_K \arrow[dl] \arrow[d] \\
\alpha_x & \underline{\underline{\alpha_A}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Unicitása α_A-nak: Elég, hogy $\nexists\, \beta \neq 0 \in H_n(\mathbb{R}^n|A)$

$\forall x \in$ ~~$\mathbb{R}$~~ A-ra $\underbrace{\beta|_x}_{=0} \in H_n(\mathbb{R}^n|x)$.

$\beta = [z] \longrightarrow K \supset A$

$[z]_K \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ $\qquad [z]_K|_x = 0 \quad \forall x \in A$

$\Rightarrow [z]_K = 0 \Rightarrow \beta = 0.$ $\qquad \square$

12. előadás

J. ~~α~~ A kompakt $\subset M^n$

$\alpha_x \in H_n(M, M \setminus x)$ $\forall x \in A$-ra.

$\uparrow$

folytonos vál $\qquad D^n \subset M^n$

$x, y \in D^n$

$$H_n(M^n, M^n \setminus x)$$

$$\| \qquad \approx H_n(D^n, \partial D^n)$$

$$\alpha_x \in H_n(D^n, D^n \setminus x) \approx R$$

$$\alpha_y \in H_n(D^n, D^n \setminus y) \approx R$$

Def M^n tsk R-irányítható (R egységelemes gyűrű), ha kiválasztható folyt. egy invertálható elem $H_n(M^n, M^n \setminus x; R)$ - csoportból $\forall x \in M^n$-re

$\|$

(az M^n tsk x-beli, R-együtthatós lok. homológia csop.)

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M}_R \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[l, bend right] \\ \uparrow & x \end{tikzcd}$$ fedés

$\pi^{-1}(x) = H_n(M^n, M^n \setminus x; R) \approx R$

$D^n \subset M^n$ -ek def-nak körny bázisokat $\widetilde{M}_R$-ben

M R-ir., ha $\exists$ $\underline{s}$ szelés: $s(x) \in R$ invertálható $\forall x \in M$.

$\Rightarrow$ ez a fedés triv. (az inverzzel beszorozzuk).

$$\widetilde{M}_R = \widetilde{M} \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} R = \widetilde{M} \times R \Big/ \begin{matrix}(x,r) \sim (x', -r) \\ \widetilde{\pi}(x) = \widetilde{\pi}(x').\end{matrix} \qquad \widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} M$$

J. állítása: $\exists! \; \alpha_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$: $\underbrace{\alpha_A|_x}_{\alpha_A \text{ képe } H_n(M, M\setminus x; R)\text{-ben}} = \alpha_x$

Def Fund. oszt.

$\mu_A \in H_n(M^n, M^n \setminus A; R)$

$\mu_A|_x$ invertálható elem

Biz.-ből maradt:

$A \subset \mathbb{R}^n$ Volt: K szimpl kompl $\subset \mathbb{R}^n$.

$\uparrow$
tetsz kompakt

Egzisztencia: $D^n \supset A$

$$H_n(D^n, D^n \setminus x) = R \qquad \alpha_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$$

$$\alpha_{D^n} \longleftarrow$$

$$\alpha_{D^n}\big|_A = \alpha_A \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$$

$$\alpha_A\big|_x = \alpha'_A\big|_x = \alpha_x \quad \forall x \in A$$

$$\beta_A = \alpha_A - \alpha'_A\big|_x = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} 0$$

$$\cap$$

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \qquad z \text{ cikl} \qquad \alpha_K\big|_x = \alpha_x$$

$\exists K$ szimpl kompl $A \subset K$ $\partial z \subset \mathbb{R}^n \setminus K$

Megj: A I. szerint csak $x \in A$-ra tudjuk, hogy $\beta_A|_x = 0$. De valójában $[z]_K\big|_x = 0$ $[z]_K \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ $\forall x \in K$-ra „igaz".

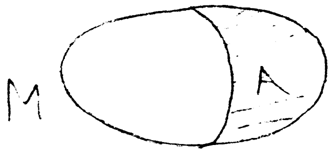
Mert: $K = \{\sigma \mid \sigma \cap A \neq \emptyset\}$

$$H_n(\sigma, \sigma \setminus x) \overset{(*)}{=} H_n(\sigma, \sigma \setminus y)$$

$$x \in A \qquad [z_K]\big|_x = 0$$

$$(*) \Rightarrow [z_K]\big|_y = 0.$$

□



$$\begin{tikzcd}
H_n(M^n) \ni [M] \arrow[r] & {[M^n, M^n \setminus A]} \in H_n(M^n, M^n \setminus A) \arrow[d, equal] \\
{[M]\cap} & H_n(T, \partial T)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H^k(M) \arrow[d, phantom, "\cup"] & H^k(M, M \setminus A) \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
D_M[N] & D_T[N] \in H^k(T, \partial T) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Kompakt tartójú kohomológiák

1. Szimpl

Végtelen (lok. véges) szimpl. kompl. X

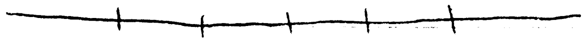
Véges (kompakt) tartójú koláncok $C_c^i(X)$ v. $\Delta_c^i(X)$

$\overset{\uparrow}{\text{compact}}$

Részkoláncкompl

$$H(C_c^i(X), \delta) = H_c^i(X)$$

Pl.

$\mathbb{R}^1$  G Abel-csop.

$$C^1_c(\mathbb{R}^1; G) \xrightarrow[\text{epi}]{\Sigma} G$$

$\nwarrow$ $(\dots 0\,0\,g\,0\,0 \dots)$

$$\| $$

$$Z^1_c(\mathbb{R}^1; G)$$

$\Sigma(\delta\varphi) = 0$ ha $\varphi \in C^0_c(\mathbb{R}^1; G)$

$\delta\varphi(\sigma^1) = \varphi(\partial\sigma^1) = \varphi(\text{vége}) - \varphi(\text{eleje})$ $\quad \sigma^1 = [i, i+1]$

$\varphi(i+1) - \varphi(i)$

$$H^1_c(\mathbb{R}^1; G) \twoheadrightarrow G$$

$\nearrow$

HF. Ez izom.

(Köv. H^i_c nem homot. invariáns $(\mathbb{R}^1 \simeq *)$)

↳ proper map.-re igen (komp ős komp.)

Kompakt tartójú szing. kohomol

X top. tér

$C_c^{i\,(\text{szing})}(X; G) = \{ \varphi \in C^i(X; G) \mid \exists K_\varphi \subset X$ kompakt :

$\sigma : \Delta^i \to X$ szing. szimpl. $\operatorname{im}\sigma \subset X \setminus K_\varphi \Rightarrow \varphi(\sigma) = 0 \}$

$$H(C^i_c(X; G), \delta) = H^i_c(X; G)$$

Másik leírás: $\quad K \subset X, \ K \subset L$

$$H^i(X, X \setminus K) \to H^i(X, X \setminus L)$$

$$\varinjlim_{K\to X} H^i(X, X\setminus K) = H^i_c(X)$$

Direkt limesz

Def irányított halmaz I

Részben rend. halmaz $\forall \alpha,\beta\ \exists \gamma :\ \alpha \leq \gamma,\ \beta \leq \gamma$

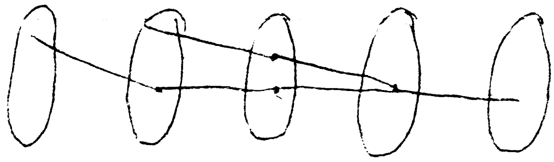
G_α Abel-csop. $\alpha \in I \leftarrow$ ir. halmaz

$\alpha \leq \beta$ $f_{\alpha\beta} : G_\alpha \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} G_\beta$ homom.

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "f_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "f_{\alpha\gamma}"'] & G_\beta \arrow[d, "f_{\beta\gamma}"] \arrow[dl, phantom, "\circ"] \\ & G_\gamma \end{tikzcd}$$

$\varinjlim_I G_\alpha$

(↑ ∞-be futó utak)



$\coprod G_\alpha \Big/ \underset{G_\alpha}{x} \sim \underset{G_\beta}{y} \iff \exists \gamma\ \ \alpha \leq \gamma\ \ \beta \leq \gamma$

$f_{\alpha\gamma}(x) = f_{\beta\gamma}(y)$

Megj. $J \subset I$ kofinális

$\forall \alpha \in I\ \exists \beta \in J :\ \alpha \leq \beta$

$$\varinjlim_J G_\alpha = \varinjlim_I G_\alpha$$

HF $X = \bigcup_I X_\alpha$ $\alpha \in I$ irányított

$\forall K$ kompaktra $\exists \alpha :\ K \subset X_\alpha$

$\alpha \leq \beta \Rightarrow X_\alpha \subset X_\beta$

$\Rightarrow \varinjlim H_i(X_\alpha; G) = H_i(X; G)$

HF p rögz. (prím?)

$\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \dots$ lim = ?

HF $H^i_c(\mathbb{R}^n; G) = H^i(S^n; G)$

HF a H^*_c két def.-ja ekv.

$B \subset A \subset M^n$ top rész

$\mu_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$

$\mu_A|_x \in H_n(M, M \setminus x; R)$

$\uparrow$ ind. elem $x \in A$

$$\begin{tikzcd}
H^k(M, M\setminus A; R) \arrow[r, "\cap \mu_A"] & H_{n-k}(M) \\
H^k(M, M\setminus B; R) \arrow[u, "j^*"] \arrow[r, "\cap \mu_B"] \arrow[ur, phantom, "\circ"] & H_{n-k}(M) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

$x \in H^k(M, M\setminus B; R)$

$j : (M, M \setminus A) \hookrightarrow (M, M \setminus B)$

Kommut:

M R-or.-ható.

$j_*(\mu_A \cap j^* x) = \underset{j_* \mu_A}{\underset{\shortparallel}{\mu_B}} \cap x$

Tétel

$H^k_c(M; R) \xrightarrow{D_M} H_{n-k}(M; R)$

$\uparrow$ izom

M R-or.

$D_M = \varinjlim (\cap \mu_A)$

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[rr] \arrow[dr] & \circ & G_\beta \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Biz

Indukció: Kulcs: $M = U \cup V$ U, V nyíltak M rsz.

L Komm (előjel erejéig):

← Mayer-Vietoris komp kohom.-ra

$$\begin{tikzcd}
H^k_c(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & H^k_c(U) \oplus H^k_c(V) \arrow[r] \arrow[d, "D_U \oplus D_V"] & H^k_c(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cup V}"] & H^{k+1}_c(U\cap V) \arrow[d, "D_{U\cap V}"] \\
H_{n-k}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-k}(U) \oplus H_{n-k}(V) \arrow[r] & H_{n-k}(U\cup V) \arrow[r] & H_{n-k-1}(U\cap V)
\end{tikzcd}$$

(*)

← homol. M-V.

Biz L $K \subset U$, $L \subset V$ compact

$(M, M \setminus (K \cap L))$

$$\begin{tikzcd}
H^k(M \mid K\cap L) \arrow[r] \arrow[d, "\approx (\text{kivágás})"] & H^k(M\mid K) \oplus H^k(M \mid L) \arrow[r] \arrow[d, "\approx (\text{kivágás})"] & H^k(M \mid K\cup L) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dd, "\mu_{K\cup L}\cap"] & {} \\
H^k(U\cap V \mid K\cap L) \arrow[d, "\mu_{K\cap L}\cap"] & H^k(U\mid K) \oplus H^k(V \mid L) \arrow[d, "\mu_K\cap \oplus \mu_L\cap"] & & \\
H_{n-k}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-k}(U) \oplus H_{n-k}(V) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \arrow[r, "\partial"] & {}
\end{tikzcd}$$

Ha ez komm ⇒ (*) is komm (ugyanezek limesze)

A kérdéses négyzet: δ és ∂ szerepel benne

$$\begin{tikzcd}
H^k(M|K\cup L) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mu_{K\cup L}\frown"] & H^{k+1}(M|K\cap L) \arrow[r, "\approx"] & H^{k+1}(U\cap V|K\cap L) \arrow[d, "\mu_{K\cap L}\frown"] \\
H_{n-k}(M) \arrow[rr, "\partial"'] & & H_{n-k-1}(U\cap V)
\end{tikzcd}$$

$A = M\setminus K,\ B = M\setminus L$

A-n és B-n is eltűnik

$$0 \to C^*(M, A+B) \to C^*(M,A)\oplus C^*(M,B) \to C^*(M, A\cap B) \to 0$$

$\varphi \longrightarrow (\varphi, \varphi)$

$\psi_1, \psi_2 \qquad \psi_1 - \psi_2$

határhomom. $\xleftarrow{\delta}$

$\alpha_A \quad \alpha_B \qquad [\alpha] = \alpha_A - \alpha_B$

$[\delta\alpha_A] \longrightarrow \delta\alpha_A \qquad \delta \downarrow$ mert egzi

$\delta\alpha_A \in C^{*+1}(M,A) \qquad 0$

$\Rightarrow \delta\alpha_A = \delta\alpha_B$

13. előadás

HF. 1) $4k+2$ dim zárt, ir. sk ⇒ χ ps.

2) $f: M^n \longrightarrow N^n$

zárt, ir. n-dim sokaságok

$$\begin{tikzcd}
H^i(M) \arrow[d, "D_M"] & H^i(N) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "D_N"] \\
H_{n-i}(M) \arrow[r, "f_*"'] & H_{n-i}(N)
\end{tikzcd}$$

$D_N^{-1} f_* D_M f^*(x) = (\deg f)\cdot x$

(tetsz. együttható)

3) $rk(H^i(M^n; \mathbb{Q})) < rk(H^i(N^n; \mathbb{Q}))$ ∃ ilyen i

$\Rightarrow \deg f = 0$

M, N zárt, ir.

L $U, V \qquad M = U\cup V$

$\downarrow D_{U\cap V} \qquad \downarrow D_U \oplus D_V \qquad \downarrow D_{U\cup V}$

Biz $K \subset U \quad L \subset V \quad A = M \setminus K \quad B = M \setminus L$

$$\begin{tikzcd}
H^k(M,M\setminus(K\cup L)) & & H^{k+1}(M|K\cap L) \\
{[\varphi]} \in H^k(M|K\cup L) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mu_{K\cup L}\cap"] & H^{k+1}(M|K\cap L) \arrow[r, "\text{kivágás}", "\approx"'] & H^{k+1}(U\cap V|K\cap L) \arrow[d, "\mu_{K\cap L}\cap"] \\
H_{n-k}(M) \arrow[rr, "\partial"'] & \text{előjel erejéig kommut.} & H_{n-k-1}(U\cap V)
\end{tikzcd}$$

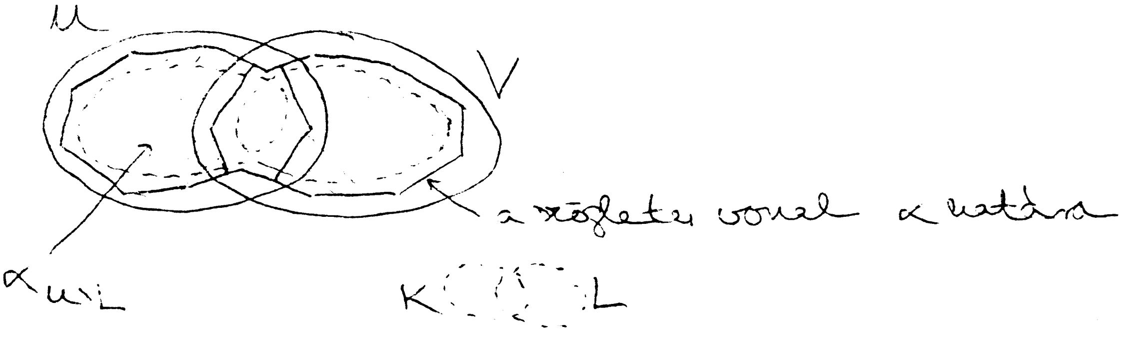
$$\begin{tikzcd}
& C^*(M,A)\cap C^*(M,B) = & & & \\
0 \arrow[r] & C^*(M|A+B) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & C^*(M,A)\oplus C^*(M,B) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & C^*(M,A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
& & \varphi_A \quad \varphi_B & {[\varphi]} \arrow[dll, bend left] & \\
0 \arrow[r] & C^{*+1}(M,A+B) \arrow[r] & C^{*+1}(M,A)\oplus C^{*+1}(M,B) \arrow[r] & C^{*+1}(M,A\cap B) \arrow[r] & 0 \\
& {[\delta\varphi_A]} & \delta\varphi_A = \delta\varphi_B & \delta\varphi = 0 &
\end{tikzcd}$$

∂ leírása:

$$\begin{tikzcd}
C_*(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C_*(U)\oplus C_*(V) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C_*(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
& \alpha_U \quad \alpha_V & {[\alpha]} \arrow[dll, bend left, dashed] & \\
{[\partial\alpha_U]} & \partial\alpha_U = \partial\alpha_V & (\alpha = \alpha_U - \alpha_V) &
\end{tikzcd}$$

$\mu_{K\cup L} \in H_n(M, M\setminus(K\cup L))$

$\mu_{K\cup L} = [\underset{\substack{\uparrow \\ \text{rel. ciklus}}}{\alpha}] \qquad \alpha = \underset{\substack{\cap \\ C_*(U\setminus L)}}{\alpha_{U\setminus L}} + \alpha_{U\cap V} + \alpha_{V\setminus K}$ (kis szimplexek)



$$\begin{tikzcd}
{[\varphi]} \in H^k(M|K\cup L) & {[\varphi]} \arrow[dr] & \\
& {[\alpha\cap\varphi]} \arrow[r, mapsto] & {[\partial(\alpha_{U\setminus L}\cap\varphi)]}, \text{ mert:}
\end{tikzcd}$$

$$\alpha\cap\varphi = \underbrace{\alpha_{U\setminus L}\cap\varphi}_{\in C_*(U)} + \underbrace{(\alpha_{U\cap V}+\alpha_{V\setminus K})\cap\varphi}_{\in C_*(V)}$$

↗ (α_U) $\quad$ (α_V)

a Mayer–Vietoris ∂ határleképezésének képe $\partial(\alpha_{U\setminus L}\cap\varphi)$ def szerint

(a kivágás megszorítást jelent csupán)

$$\begin{tikzcd} {[\varphi]} \arrow[rd] & {[\delta\varphi_A]} \arrow[d, mapsto] \\ & \mu_{K\cap L}\cap[\delta\varphi_A] = [\alpha_{U\cap V}\cap\delta\varphi_A] \end{tikzcd}$$

Miért $\alpha_{U\cap V}$ a $\mu_{K\cap L}$ reprezentánsa?

$\forall x\in K\cap L \quad \mu_{K\cap L}|_x \in H_n(M, M\setminus x)$ generátor

$\Downarrow$

$$\underset{\text{generátor}}{\alpha|_x} = \underbrace{\alpha_{U\setminus L}|_x}_{=0} + \alpha_{U\cap V}|_x + \underbrace{\alpha_{V\setminus K}|_x}_{=0} = \alpha_{U\cap V}|_x$$

↖ mert $U\setminus L\subset M\setminus x$ ha $x\in K\cap L$

$\alpha_{U\setminus L}|_x = 0$ és $\alpha_{V\setminus K}|_x = 0 \quad \forall x\in K\cap L.$

$$[\alpha_{U\cap V}\cap\delta\varphi_A] \overset{??}{=} [\partial\alpha_{U\cap V}\cap\varphi_A]$$

??: $\partial(\alpha_{U\cap V}\cap\varphi_A) = (-1)^k(\partial\alpha_{U\cap V}\cap\varphi_A - \alpha_{U\cap V}\cap\delta\varphi_A)$

$\overset{\uparrow}{\text{határ}}$ $\Longrightarrow$ homol. osztályuk megegyezik

$$[\partial(\alpha_{U\setminus L}\cap\varphi)] \overset{???}{=} \pm[\partial\alpha_{U\cap V}\cap\varphi_A]$$

???: $\partial(\alpha_{U\setminus L}\cap\varphi) = (-1)^k\,\partial\alpha_{U\setminus L}\cap\varphi$ mert $\delta\varphi = 0.$

$\qquad\qquad ||$

$(-1)^k\,\partial\alpha_{U\setminus L}\cap\varphi_A$ mert $\partial\alpha_{U\setminus L}\cap\varphi_B = 0$

↙ és $\varphi = \varphi_A - \varphi_B$

$//$

$(-1)^{k+1}\,\partial\alpha_{U\cap V}\cap\varphi_A$ $\quad$ uis. $\alpha_{U\setminus L}\in C_*(U\setminus L)$

↗

$\varphi_B\in C^*(M,B) = C^*(M, M\setminus L)$

Mert: $\partial\big(\underbrace{\underbrace{\alpha_{U\setminus L}+\alpha_{U\cap V}}_{\mu_K\text{-repr}}}_{\in C_*(M\setminus K)}\big)\cap\varphi_A = 0$ $\quad$ $\mu_K\in H_n(M, M\setminus K)$ $\hookrightarrow \in C^*(M, M\setminus K)$

□

Poincaré dualitás

M^n R-ir. top. sok.

$H^k_c(M;R) \xrightarrow{D_M} H_{n-k}(M;R)$ izom.

Köv. M^n kompakt, peremes

$$H^k_c(\mathring{M};R) \approx H^k(M,\partial M) \xrightarrow{D_M} H_{n-k}(\overset{\text{belseje}}{\mathring{M}}) = H_{n-k}(M)$$

Biz. $M = \mathbb{R}^n = \text{int}\,\Delta^n$

$$\begin{tikzcd} H^k_c(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "D_M", "\cancel{\cap[\Delta^n]}"'] \arrow[d, equal] & H_{n-k}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "="] \\ H^k(\Delta^n,\partial\Delta^n) \arrow[r, "D_{\Delta^n}", "\cap[\Delta^n]"'] & H_{n-k}(\Delta^n) \end{tikzcd}$$

elég $k=n$-re: $[\Delta^n] \in H_n(\Delta^n,\partial\Delta^n)$ (a többi k-ra 0)

$$H^n(\Delta^n,\partial\Delta^n) = \text{Hom}(H_n(\Delta^n,\partial\Delta^n);R)$$

$$\overset{\cup}{[\varphi]} \qquad \langle[\varphi],[\Delta^n]\rangle = 1$$

$k=n$-re az izom: $\underbrace{\langle[\varphi]\cap[\Delta^n]\rangle}\cdot\Delta^0 = [\varphi]\cap[\Delta^n]$

$1\cdot\overset{\uparrow}{\Delta^0}$ generátor H_0-ban

Δ^n utolsó csúcsa

M nyílt $\subset\mathbb{R}^n \Rightarrow D_M$ izom.

$M = \cup U_i$ $\quad U_i$ konvex nyílt $\subset\mathbb{R}^n$

$V_i = \bigcup_{j<i} U_j$ $\qquad$ indukció: $i=1$-re az előző ($U_1\approx\mathbb{R}^n$)

$V_{i+1} = U_i\cup V_i$ $\qquad$ (i-re már tudjuk)

$U_i\cap V_i = \bigcup_{j<i}\underbrace{(U_i\cap U_j)}_{\text{konvex nyílt}}$

indukcióból:

$$\left.\begin{array}{l} D_{V_i} \text{ izom} \\ D_{U_i} \text{ izom} \\ D_{U_i\cap V_i} \text{ izom} \end{array}\right\} \overset{5}{\Rightarrow} D_{V_{i+1}}\text{-re}$$

Izomorfizmusok direkt limesze izom

Ált. $M = \bigcup\limits_{1}^{\infty} U_i$ $\qquad U_1\subset U_2\subset\ldots$

∀ i-re $D_{U_i}: H^k_c(U_i) \to H_{n-k}(U_i)$ izom

$\Rightarrow D_M$ is izom

<u>Á</u> $H^k_c(M) = \varinjlim H^k_c(U_i)$

$$y \longleftarrow x$$

<u>Biz</u> $$H^k_c(U_i) = \varinjlim_{K\subset U_i \text{ komp}} H^k(U_i, U_i\setminus K) = \varinjlim_{K\subset U_i} H^k(M,M\setminus K)$$

$$\overset{\text{kivágás}}{\|} \quad H^k(M,M\setminus K)$$

$$\begin{tikzcd} H^k_c(U_i) = \varinjlim_{K\subset U_i} H^k(M,M\setminus K) \arrow[d] \\ H^k_c(U_{i+1}) = \varinjlim_{K\subset U_{i+1}} H^k(M,M\setminus K) \end{tikzcd}$$

← itt bővebb az indexhalmaz, ezért keletkezik leképezés

Tehát értelmeztük a K-beli limeszt.

$\forall K\ \exists i: K\subset U_i$

$x \in \varinjlim H^k_c(U_i)$

$\exists x' \in H^k_c(U_{i_0})$ repr., $\exists x'' \in H^k(U_{i_0}, U_{i_0}\setminus K_0) \approx \underset{\underset{y''}{\Psi}}{H^k(M, M\setminus K_0)}$

$y = [y'']_{\nwarrow \text{limesz ért.}} \in H^k_c(M)$ $\quad x \mapsto y \quad$ epi

Hasonlóan mono. □

3.) $M = \cup U_i \qquad U_i \subset \mathbb{R}^n$

Elism a 2. lépést elhagyva a konvex részt.

(∀ $\mathbb{R}^n$-beli nyílt konvex nyíltak uniója, így erre már tudjuk a tételt.) □

<u>Megj.</u>

$$\langle \overbrace{\underset{\underset{H_n(M)}{\uparrow}}{[M]} \cap \underset{\underset{H^k(M)}{\Uparrow}}{x}}^{D_M(x)}, \underset{\underset{H^{n-k}(M)}{\cap}}{y} \rangle \overset{\overset{\text{körök szintjén is}}{\downarrow}}{=} \langle [M], x\cup y \rangle$$

<u>Köv:</u> $H^k(M^{2k}; \mathbb{Z})$-n keletkezik ~~forma~~ egy bilin. forma

ha k ps., akkor szimm

ha k ptlan, akkor alternáló $\qquad$ nem elfajuló ± 1 det.-ű

($\mathbb{Z}$ értékű $\Rightarrow$ a H^k torzióját 0-ba viszi) $\quad \uparrow$ $\mathbb{Z}$ felett izo.

$H^k(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(M;\mathbb{Z}) \approx H^k$ (dim M = 2k)

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Ext}(H_{k+1},\mathbb{Z})} \to H^k(M;\mathbb{Z}) \to \underbrace{\mathrm{Hom}(H_k(M;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}^n} \to 0$$

Tors H_{k+1} : $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})=0$
$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_p$

$H^k/_{\mathrm{Tors}} = \mathrm{Hom}(H_k/_{\mathrm{Tors}},\mathbb{Z})$ -n értelmezzük a

bilin. formát.

$x \in H^k$ $\quad x^*: H^k/_{\mathrm{Tors}} \longrightarrow \mathbb{Z}$ (az x rögzítésével adódik)

$$\begin{tikzcd} H^k/_{\mathrm{Tors}} \arrow[d] & \text{repr.} & \mathrm{Hom}(H_k/_{\mathrm{Tors}},\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] & \text{egy elemét} \\ \mathbb{Z} & & H^k/_{\mathrm{Tors}} & \text{szerj.} \end{tikzcd}$$

Def. M^{4k} szignatúrája $\sigma(M^{4k})$

$$H^{2k}(M^{4k}) \otimes H^{2k}(M^{4k}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \otimes y \longmapsto \langle x \cup y, [M] \rangle$$

szimm. bilin. forma indexe

σ kobordizmus-invariáns.

14. előadás

HF. M^n kompakt, peremes, triangulált sok. Komm (± 1)

(M^n)

$$\begin{tikzcd} H^{k-1}(\partial M) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"', "D_{\partial M}"] & H^k(M,\partial M) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"', "D_M"] & H^k(M) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"', "D_M"] & H^k(\partial M) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"', "D_{\partial M}"] & {} \\ H_{n-k}(\partial M) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \arrow[r] & H_{n-k}(M,\partial M) \arrow[r] & H_{n-k-1}(\partial M) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

M^{2k} zárt, ir. sok.

$F^k = H^k(M;\mathbb{Z})$ szabad része $= H^k(M)/_{\mathrm{Tors}}$

$$Q: \underset{\alpha}{F^k} \otimes \underset{\beta}{F^k} \longrightarrow \underset{\langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle}{\mathbb{Z}}$$

Def. A, B R-modulus

$A\times B \to R$ bilin leképezés

Nem elf.: $A \to \mathrm{Hom}(B,R)$ izom

$B \to \mathrm{Hom}(A,R)$ izom

Q mátrixa unimoduláris ($= \pm 1$ det)

$Q: F^k \otimes F^k \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\underbrace{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{\text{bázis}}$ $\beta_1,\dots,\beta_n$

$A=(Q(\alpha_i,\beta_j))$ mtx, $v=\sum c_i\alpha_i$, $w=\sum d_i\beta_i$

$$(c_1 \dots c_n)\, A \begin{pmatrix} d_1\\ \vdots \\ d_n\end{pmatrix} = Q(v,w)$$

$D_M(\alpha_1),\dots,D_M(\alpha_n)$ bázis F_k = szabad rész $H_k(M)$-ben.

$$0\to \underbrace{\mathrm{Ext}(\ ,\mathbb{Z})}_{\text{Tor}} \to H^k(M;\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H_k(M;\mathbb{Z});\mathbb{Z})$$

$(F^k \cong \mathrm{Hom}(F_k,\mathbb{Z}))$

$\beta_1,\dots,\beta_n$ bázis F^k-ban:

$\langle \beta_i, D_M(\alpha_j)\rangle = \delta_{ij}$ ($\mathbb{Z}$-ben a torzió eltűnik)

$\|$

$\langle \beta_i, [M]\cap\alpha_j\rangle = \langle \beta_i\cup\alpha_j,[M]\rangle = \delta_{ij}$

$A = (Q(\alpha_i,\beta_j)) = E$ egységmtx ebben a bázispárban

$A: F^k\longrightarrow F^k$

$A(\beta_i)=\alpha_i$ ($A=(a_{ij})$ a $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$, $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ bázispárban)

$\Rightarrow \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ bázispárban $Q(\alpha_i,\alpha_j)=a_{ij}$

$A\cdot A^{-1}=E \Rightarrow \det A\cdot\det A^{-1}=1$

($\det A = 1$ $\forall$ bázispárban) □

Q geom leírása 4-dim-ban

M^4 zárt, ir., sima sok

$H^2(M;\mathbb{Z})\times H^2(M;\mathbb{Z})\longrightarrow\mathbb{Z}$

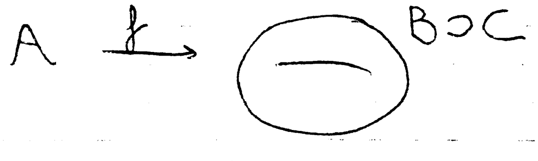
$\alpha \qquad \beta \longmapsto \langle\alpha\cup\beta,[M]\rangle$

α duálisa reprezentálható ~~tót~~ beágy felülettel:

$$H^2(X;\mathbb{Z}) = \overset{f^*\ell \longleftarrow\!\shortmid\ \ell}{[X, K(\mathbb{Z},2)]} = [X, \mathbb{C}P^\infty]$$

$$H^2(M^4;\mathbb{Z}) = [M, \mathbb{C}P^\infty] = [M, \mathbb{C}P^N] \leftarrow \text{itt } \ell = \text{hipersík duálisa}$$

(CW-approx tétel)



$$f^*[D_B(C)] = D_A[f^{-1}(C)]$$

$$\alpha \longmapsto f: M^4 \longrightarrow \mathbb{C}P^N$$

$\Sigma_\alpha = f^{-1}(\mathbb{C}P^{N-1})$ az α-nak megfelelő felület

hipersík $\mathbb{C}P^N$-ben, erre transzv.-á tesszük ~~β~~ f-et, a visszahúzott egy felület

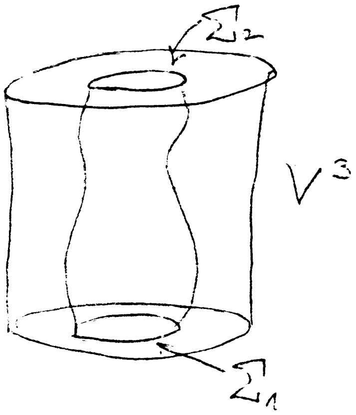
$$D_M(\alpha \cup \beta) = \#_{alg}(\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta)$$

$[\Sigma_1] = [\Sigma_2] \iff \Sigma_1 \subset M^4$

felületek　repr. homol osztály

$\Sigma_2 \subset M^4$ -ben kobord

$M^4 \times [0,1]$-ben. (mint beágy.)



$[M, \mathbb{C}P^N]$

$\boxed{\text{HF}}$

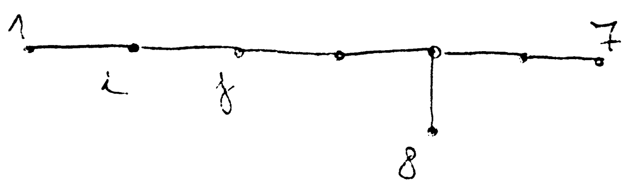
Thom konstr.-nál a Σ_1-nek és Σ_2-nek megfelelő leképezések homotópok

T. (Donaldson)

$$\left.\begin{array}{l} M^4 \text{ 1-öf, zárt, sima} \\ Q_M \text{ definit} \end{array}\right\} \Rightarrow Q_M \underset{\text{ekv.}}{\widetilde{\mathbb{Z}\text{ fölött}}} \pm E \ \left(\begin{array}{c}\text{megf.}\\ \text{bázisban}\end{array}\right)$$

Pl. E_8 mátrix definit, de nem ilyen

E_8



$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & \cdots & & & & & & 8 \\ \hline
1 & 2 & \ddots & & & & & & \\
\vdots & 1 & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
8 & & & 1 & & 1 & & 2 &
\end{array}$$

T. (Freedman)
$\forall$ unimoduláris egész együtthatós szimm. mátrix realizálható, mint egy 1-öf zárt, 4-dim top. sok. kvadr. alakja.

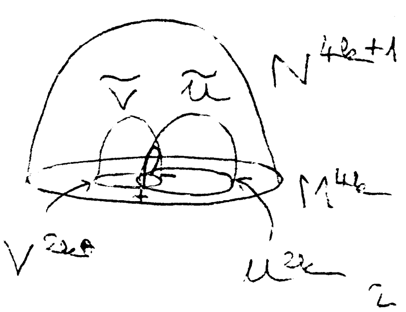
$4 \mid \dim M$

Q_M kvadr. alak szignatúrája: $\sigma(Q_M) = \sigma(M)$
(valós felett diag., +-ok száma − a −-ok száma)

Tétel. $\sigma(M)$ kobord. inv.

∝ $M \underset{\Omega}{\simeq} 0$ (M ir. értelemben 0-kobord.) $\Rightarrow \sigma(M) = 0$.

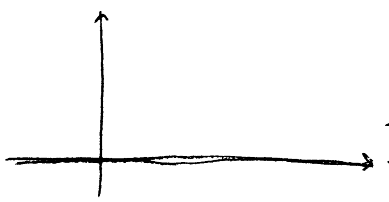
Biz. Szeml. változat



$\#_{alg}(V^{2k} \cap U^{2k}) = 0$, ha
$V^{2k} = \partial \tilde{V}^{2k+1} \subset N^{4k+1}$
$U^{2k} = \partial \tilde{U}^{2k+1} \subset N^{4k+1}$

$\frac{1}{2}\dim H_{2k}(M^{4k}) \overset{?}{\leqq}$ határoló osztályok $= L$
$\mathbb{R}^n = H_{2k}(M^{4k}; \mathbb{R})$

$\sigma \neq 0 \Rightarrow$



$\exists$ félnél nagyobb dim altér, melyre megszorítva Q-t poz. def

Ez metszi L-et, de L-en a kvadr. alak 0 ↯.
$\Rightarrow \sigma = 0$.

$i: M \subset N$ (im∂ a határoló osztályok) R-fölött

$$\begin{tikzcd}
H_{2k+1}(N,M) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H_{2k}(M) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, leftrightarrow, "D_M"] & H_{2k}(N) \arrow[d, leftrightarrow, "D_N"] \\
H^{2k}(N) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "Hom", "\approx"'] & H^{2k}(M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Hom", "\approx"'] & H^{2k+1}(N,M) \\
H_{2k}(N) & H_{2k}(M) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{L}$ im∂ dim-ja $\geq \frac{1}{2}$ dim $H_{2k}(M)$

$\quad\quad ||$

Ker $i_* \approx$ im i^*

Alg. lemma: ker $i_* \approx$ coker i^*

$||$

dim im i^* = b_{2k} - ~~(im i^*)~~ dim im i^*

dim im $i^* = \frac{1}{2} b_{2k}$

$||$

dim ker i_* = dim im∂

Formális biz (Hirzebruch)

$$\begin{tikzcd}
H^{2k}(M) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "D"] & H^{2k}(M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "D"] & H^{2k+1}(N,M) \arrow[d] \\
H_{2k+1}(N,M) \arrow[r] & H_{2k}(M) \arrow[r, "i_*"'] & H_{2k}(N)
\end{tikzcd}$$

$y \longmapsto x$

$H_{2k}(M)/_{\ker i_*} \approx$ im i^*

Áll. $x \in$ im $i^* \Leftrightarrow D(x) \in$ ker i_*

dim im i^* = dim ker i_*

$||$

b_{2k} - dim ker i_* (mert im $i^* \approx$ coker i_*)

Alg. l. $\varphi: A \to B$ (A,B R-vektorterek) lin R-felett

$K \oplus L \quad L \oplus C$

$K = \mathrm{Ker}\,\varphi$ $\quad$ im $\varphi = L$ $\quad$ C = coker φ $\quad$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^r$

$$A^* \xleftarrow{\varphi^*} B^*$$

$$K^* \oplus L^* \longleftarrow L^* \oplus C^*$$

$$C^* = \ker \varphi^* = (\operatorname{coker} \varphi)^*$$

$$K^* = \operatorname{coker} \varphi^* = (\ker \varphi)^*$$

$$\operatorname{im} i^* \underset{\uparrow \atop \text{Mj}}{=} \ker i_* \underset{\uparrow \atop \text{Állg. } \alpha}{=} \operatorname{coker} i^* = b_{2k}(M) - \operatorname{im} i^*$$

(a dim-kat elhagytuk)

cokerdef

$$= \operatorname{im} i^* = \frac{1}{2} b_{2k}$$

$$\ker \sigma = \ker i_* .$$

$\underline{\alpha}$ $\quad Q|_{\operatorname{im} i^*} \equiv 0$

$$0 = \langle (i^* y)^2, [M] \rangle = \langle y^2, \underbrace{i_*[M]}_{=0} \rangle = 0. \qquad i : M \hookrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ N \text{ pereme}}}{N}$$

□

$$\sigma(-M) = -\sigma(M)$$

$$\langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle = Q_M(\alpha \cup \beta)$$

$$\langle \alpha \cup \beta, [-M] \rangle = Q_{-M}(\alpha \cup \beta)$$

$$\sigma(M_1 \cup M_2) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2)$$ (a kohom. gyűrű direkt összeg)

$$M_1 \sim M_2 \iff M_1 \cup -M_2 \sim 0$$

$$\sigma(M_1 \cup -M_2) = \sigma(M_1) - \sigma(M_2) = 0.$$

□

Alexander dualitás

I. K kompakt lok. pontrahúzható, nem üres valódi altér S^n-ben $\Rightarrow$

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus K; \mathbb{Z}) \approx \tilde{H}^{n-i-1}(K; \mathbb{Z})$$

Köv. Jordan t.

M^n top. nem ir. sok. $\underset{\text{top. beágy.}}{\not\hookrightarrow}$ $\mathbb{R}^{n+1}$-be.

Biz a) $i \neq 0$

$$H_i(S^n \setminus K; \mathbb{Z}) \overset{PD}{\approx} H^{n-i}_c(S^n \setminus K) \overset{H^*_c \text{ def-je}}{\approx}$$

$$\approx \varinjlim_{U \searrow K} H^{n-i}(S^n \setminus K, U \setminus K) \overset{\text{kivágás}}{\approx} \cancel{(H^*_c)} \varinjlim H^{n-i}(S^n, U) \approx$$

$i \neq 0, n$

$$\approx \varinjlim H^{n-i-1}(U) \overset{?}{\approx} H^{n-i-1}(K)$$

Ált. top-ból: $\exists$ U_0 környezete K-nak, hogy U_0-nak retraktuma K.

szürj.? $\varinjlim H^*(U) \to H^*(K)$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\rho_U"] & K \arrow[r, hook, "i"] & U \arrow[r, "\rho"] & K \\ U_0 \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

$$H^*(U) \longleftarrow H^*(K)$$

Hasonlóan az inj.

b) $i = 0$

$$H_0(S^n \setminus K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{H}_0(S^n \setminus K; \mathbb{Z}) \qquad \mathbb{Z} \oplus \widetilde{H}_0$$

$$0 \to H^{n-1}(U) \to H^n(S^n, U) \to \underset{\overset{\parallel}{\mathbb{Z}}}{H^n(S^n)}$$

$$\widetilde{H}_0 = \varinjlim H^{n-1}(U)$$

Szűcs 3. félév

15. előadás

IF. $M \times M \times M \supset \Delta_3$

$D_{(M)^3}[\Delta_3] = ?$

Λ együttható csop. test, vagy $H^*(M)$ szabad Λ-modulus

M Λ-ir.ható M ir. vagy $\Lambda = \mathbb{Z}_2$

Válasz: $b_1, \dots, b_r$ bázis $H^*(M)$-ben

$b_1^\#, \dots, b_r^\#$:

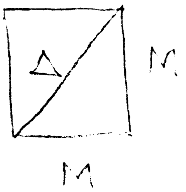
$$\langle b_i \cup b_j^\#, [M] \rangle = \delta_{ij}$$

$$\sum_{i,j} b_i \times (b_i^\# \cup b_j) \times b_j^\# \qquad \dim b_i + \dim b_i^\# = n$$

$\nwarrow$ 2n-dimenziós

Lefschetz tétel (Poincaré-Hopf t.)

Kérdés: $D_{(M)^2}[\Delta] = ? = \underset{H^n(M \times M)}{\overset{}{u''}}$



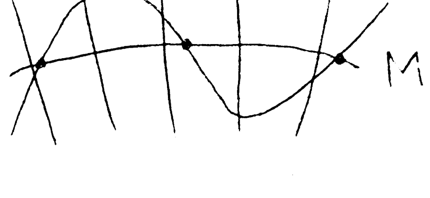
Válasz: $b_1, \dots, b_r$ bázis $H^*(M)$-ben

$b_1^\#, \dots, b_r^\#$ duális bázis

$$u'' = \sum_{i=1}^{r} b_i \times b_i^\# \cdot (-1)^{\dim b_i}$$

Köv. Poincaré-Hopf t.

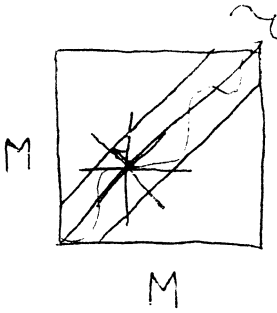
$s : M \longrightarrow TM$ $s \pitchfork$ 0-szelés



Metszési indexszel előjelezzük a metszéspontokat.

$\sum$ index $= \chi(M)$

$f(x) - x$ forgása



$$\sim N_\varepsilon = D_\varepsilon M = (\cancel{TM \oplus} \; \{v \in TM \mid \|v\| \leq \varepsilon\}$$

← normálnyaláb

$$T(M\times M)\big|_\Delta = TM \oplus TM$$

$$(u, v) \longmapsto (u+v, u-v)$$

$$\shortparallel$$

$$\left(\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\right)$$

$$v \longleftrightarrow (v, -v)$$

↑

normálnyaláb ≃ csőszerű körny. (exp miatt)

im $s \subset D_\varepsilon M$ feltehető

$s : M \longrightarrow M\times M \qquad s \cong \Delta \quad , \quad \Delta : M \longrightarrow M\times M$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \longmapsto (x, x)$

$$\sum \text{ind} = [s^{-1}(\Delta)] \in H_0(M)$$

$$\shortparallel$$

$$D_M \underset{\overset{\shortparallel}{\Delta^*}}{s^*} \Big(\underbrace{D_{M\times M}[\Delta]}_{u''} \Big) = D_M\big(\Delta^*(u'')\big)$$

Eml. $\quad \Delta^*(a\times b) = a\cup b \qquad \Delta : X \longrightarrow X\times X$

$$\Delta^*(u'') = \sum (-1)^{\dim b_i} \cdot b_i \cup b_i^\#$$

$H^n(M)$

$\downarrow \cap$

$H_0(M)$

$$\sum \text{ind} = \langle \Delta^*(u''), [M] \rangle \overset{b_i^\# \text{ def.}}{=} \sum (-1)^{\dim b_i} \cdot 1 = $$

$$= \chi(M)$$

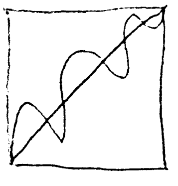
↑

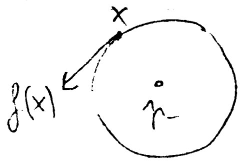
(az egyszerűsítő feltételektől függetlenül)

$$\chi(M) = \sum (-1)^k \dim H^k(M) = \chi(M) \qquad \square$$

T. (Lefschetz) $\quad L(f) = \sum (-1)^i \operatorname{tr} f_{*i}$ = fixpontok alg. száma

$f(x) - x$ forgása az $S_\varepsilon(p)$-n (p fixpont)





$\Gamma : M \longrightarrow M\times M \quad$, im Γ és Δ metszési indexe

$x \longmapsto (f(x), x)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend right, "\Gamma"'] & M\times M \arrow[r, "f\times 1"] & M\times M \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (x,x)$$

$$(u,v) \longmapsto (f(u),v)$$

$\langle \Gamma^*(u''), [M]\rangle =$ fixpontok alg. száma

$(f\times g)^*(a\times b) = f^*a \times g^*b$, uis.

$$\overset{\shortparallel}{p_1^*a \cup p_2^*b}$$

$$A \xrightarrow{f} X$$
$$B \xrightarrow{g} Y$$

$(f\times g)^*(p_1^*a) \cup (f\times g)^*(p_2^*b)$

$$\begin{tikzcd} f\times g : A\times B \arrow[r] \arrow[dr] & X\times Y \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ & X & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "f\times g"] \arrow[d, "q_1"] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & X\times Y \arrow[d, "p_1"] \\ A \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & A\times B \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

$$(f\times g)^* p_1^* = (f\circ q_1)^* = q_1^* f^*$$

$$q_1^* f^* a \cup q_2^* g^* b = f^* a \times g^* b.$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend left, "\Gamma"] & M\times M \arrow[r, "f\times 1"] & M\times M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Gamma^*(u'') & & u'' \arrow[ll] \\ \sum f^*(b_i)\times(b_i^{\#})(-1)^{\dim b_i} \arrow[d, "\Delta^*"] & & \sum b_i \times b_i^{\#} (-1)^{\dim b_i} \arrow[ll, "(f\times 1)^*"'] \\ {} & & \end{tikzcd}$$

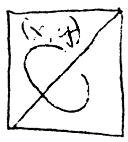
$$\sum(-1)^{i\,\cancel{\dim b_i}}\cdot \operatorname{tr} f_i^*$$
$$\shortparallel$$
$$\sum(-1)^{\dim b_i}\langle \underset{\overset{\shortparallel}{\sum \alpha_j b_j}}{f^* b_i} \cup b_i^{\#}, [M]\rangle = \sum(-1)^{\dim b_i}\cdot \alpha_i$$

$$\operatorname{tr} f_{*i} = \operatorname{tr} f_i^* \qquad \square$$

$f : M \looparrowright N$

$$M\times M \xrightarrow{f\times f} \underset{\overset{\cup}{\Delta_N}}{N\times N}$$

Mi az f kettőspontjainak homol. osztálya?



$f(x)=f(y)$, $x\neq y$

Biz. (Válasz)

Def Slant product v. kiintegrálás

X, Y $\quad \Lambda$ együtth. csop. : $H^*(X,\Lambda)$ szabad Λ-mod

$$\begin{tikzcd} H^{p+q}(X\times Y) \otimes H_q(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & H^p(X) \\ \sum_{i+j=p+q} H^i(X)\otimes H^j(Y) & \end{tikzcd}$$

$$u \qquad \beta \longmapsto u/\beta$$

$$\cup$$

$$H^p(X)\otimes H^q(Y)$$

deRham esetben kiintegráljuk Y irányban az X-ről ill Y-ról felemelt formák $\cup$-szorzatát.

$$(a\otimes b, \beta) \longmapsto a\langle b,\beta\rangle$$

Megj. $H^*(X)$-lineáris a /-szorzás:

$p: X\times Y \longrightarrow X$ proj.

$a\times 1 \xleftarrow{p^*} a\in H^*(X)$

$u\in H^{p+q}(X\times Y)$, $\beta\in H_q(Y)$

$$((a\times 1)\cup u)/_\beta = a\cup(u/\beta)$$

$$u = x\otimes y = x\times y$$

$$u/_\beta = x\cdot\langle y,\beta\rangle \qquad a\cup(u/\beta) = a\cup x\cdot\langle y,\beta\rangle$$

$$[(a\times 1)\cup(x\times y)]/_\beta = [(a\cup x)\times y]/_\beta = a\cup x\cdot\langle y,\beta\rangle \qquad \square$$

L $M\times M$-ben $a\in H^*(M)$; $u'' = D_{M\times M}[\Delta]$

$$(a\times 1)\cup u'' = (1\times a)\cup u''$$

Biz $u'\in H^n(M\times M, M\times M\setminus\Delta) = H^n(N_\varepsilon, N_\varepsilon\setminus\Delta)$

$$\begin{tikzcd} u' \arrow[d, mapsto] & H^n \arrow[d] \\ u'' \in & H^n(M\times M) \end{tikzcd}$$

Thom-tér (golyónyaláb gömbnyaláb

Δ normálny.-ban

u' a Thom-osztálya $\nu(\Delta\subset M\times M)$-nek $\left(\begin{array}{c}\text{a 0-szelés}\\ \text{duálisa}\end{array}\right)$

$a \times 1 = p_1^* a$ ~~és~~ $1 \times a = p_2^* a$

$u' \in H^n(N_\varepsilon, N_\varepsilon \setminus \Delta)$ szorozzuk össze $(p_1|_{N_\varepsilon})^*(a)$

ill $(p_2|_{N_\varepsilon})^*(a)$

$$\begin{tikzcd}
H^*(N_\varepsilon) & \otimes H^*(N_\varepsilon, N_\varepsilon \setminus \Delta) \arrow[r, "\cup"] & H^*(N_\varepsilon, N_\varepsilon \setminus \Delta) \\
H^*(M \times M) \arrow[u] & \otimes H^*(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \arrow[u] \arrow[r, "\cup"] & H^*(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \arrow[u, "\approx"'] \\
a \in H^*(M) \arrow[u, shift left, "p_1^*"] \arrow[u, shift right, "p_2^*"'] \arrow[uu, bend left=60, "q_1^*"] \arrow[uu, bend right=60, "q_2^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

Elég: $\underline{q_1^*(a)} \cup u' = \underline{q_2^*(a)} \cup u'$.

$$q_1 = p_1|_{N_\varepsilon} \underset{\uparrow}{\cong} q_2 = p_2|_{N_\varepsilon}$$

mert $p_1|_\Delta = p_2|_\Delta$ és $N_\varepsilon \underset{\text{def retr.}}{\searrow} \Delta$

$\Rightarrow q_1^*(a) = q_2^*(a)$. □

<u>Á</u> $u''/_{[M]} = 1$

<u>Biz</u> vázlat $u'' = \sum b_i \times c_i$ (ilyen c_i-k $\exists$-nek)

$(1 \times a) \cup u' = (a \times 1) \cup u'$ $u' \leftsquigarrow \sum b_i \times c_i$

$a = \sum (-1)^{\dim a \cdot \dim b_i} \cdot b_i \langle a \cup c_i, [M] \rangle$

] $a = b_j$ $b_j = \ldots$

$\Rightarrow c_i = (-1)^{\dim b_i} \cdot b_i^\#$ $i = 1, \ldots, r$

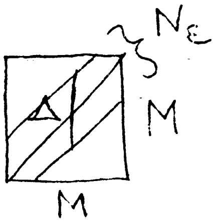
16. előadás

HF: 1) $M^n = \underbrace{F_1 \times \ldots \times F_s}_{\text{nem ir.}} \times \underbrace{G_1 \times \ldots \times G_r}_{\text{ir.}}$ felületek

$\Rightarrow M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+s+1}$ (2 éve Schweitzer volt)

2) $M^n \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

L $u''/[M] = 1$



$u'' = D_{M\times M}[\Delta]$

Biz

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i_x} & M\times M \\ y & \longmapsto & (x,y) \quad x\in M \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} u'' \in H^n(M\times M) \arrow[r, "/{[M]}"] \arrow[d, "i^*"] & H^0(M) \arrow[d, "\approx"] \\ 1\times i_x^*(u'') \in H^n(\{x\}\times M) \arrow[r, "/{[M]}"] & H^0(X) \end{tikzcd}$$

(M öf)

$\underbrace{1\times i_x^*(u'')}$ $= i^*(u'') = p^*(i_x^*(u'')) = 1\times i_x^*(u')$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_x"] & M\times M \\ & x\times M \arrow[ul, "p"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$i = i_x \circ p$

$i^* = p^* \circ i_x^*$

Diagr. $\Rightarrow$ $u''/[M] = [1 \underset{\uparrow}{\times} i_x^*(u'')]/[M] =$

⊗ l. Künneth

$= 1\cdot \langle i_x^*(u'), [M]\rangle = \langle u'', (i_x)_*[M]\rangle$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "\alpha\ \text{[illegible]}"] \arrow[dr, bend left, dashed] & M\times M \arrow[d, "\beta"] & u'' \\ (M, M\setminus x) \arrow[r, "j_x"] & (M\times M, M\times M\setminus\Delta) & u' = u_1(\Delta) \arrow[u, "\beta^*"] \\ (D_\varepsilon(x), D_\varepsilon(x)\setminus x) \arrow[u] \arrow[r, "j"] \arrow[r, phantom, shift left=6, "\leftarrow \text{kivágás} \rightarrow"] & (N_\varepsilon, N_\varepsilon\setminus\Delta) \arrow[u] & u' \end{tikzcd}$$

$\uparrow$ golyó

$\uparrow$ Thom-osztálya a Δ normálnyalábjának

$\langle u'', (i_x)_*[M]\rangle = \langle \beta^*(u'), (i_x)_*[M]\rangle =$

$= \langle u', \beta_*(i_x)_*[M]\rangle = \langle u', (j_x)_*\alpha_*[M]\rangle =$

$$= \langle u', (j_x)_* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lok. homol. gener.}}}{\mu_x} \rangle = \langle \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{u' képe } N_\varepsilon\text{-ban} \\ \text{a kivágásnál} \\ \text{Thom-osztály}}}{u'}, j_*[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fibrum homol.} \\ \text{gener.}}}{D_\varepsilon(x), D_\varepsilon(x)} \setminus \underset{\substack{\nearrow \\ \text{fund. osztály}}}{x}] \rangle = 1$$

a Thom-oszt.
∀ fibrumon 1

□

<u>K2</u> $(1\times a) \cup u'' = (a\times 1)\cup u'' \;\; /[M]$ és

$u'' = \sum b_i \times c_i$ -t kérjük

(Eml.: $u'' = \sum (-1)^{\dim b_i} \cdot b_i \times b_i^*$

$b_1, \dots, b_r \in H^*(M)$ bázis, $\langle b_i \cup b_j^*, [M]\rangle = \delta_{ij}$)

Bal o.:

$$\sum (-1)^{\dim b_i \cdot \dim a} \cdot b_i \overset{\swarrow\,(1\times \overleftrightarrow{a)\cup(b_i}\times c_i)}{\times} (a \cup c_i) \qquad /[M]$$

$$= \sum (-1)^{\dim b_i \cdot \dim a} \cdot b_i \langle a \cup c_i, [M]\rangle$$

Jobb o.: (Kiintegrálás $H^*(X)$-lineáris, azaz
$H^{r+q}(X\times Y) \otimes H_q(Y) \longrightarrow H^r(X)$)

$$\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[d] & a\times 1 \\ X & a \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot \underbrace{\left(u''/[M]\right)}_{\underset{K}{=}1} = a$$

$$a = \sum (-1)^{\dim b_i \cdot \dim a} \cdot b_i \langle a\cup c_i, [M]\rangle$$

Spec. $a = b_j$ esetén:

$$b_j = \sum (-1)^{\dim b_i \dim b_j} \cdot b_i \langle b_j \cup c_i, [M]\rangle$$

$$\xRightarrow[b_i\text{-k bázis}]{} \langle b_j \cup c_i, [M]\rangle = 0 \quad \text{ha } i \neq j$$
$$= (-1)^{\dim b_i} \quad \text{ha } i = j$$

Egyetlen ilyen c_i van, mert a kvadr. alak nemelfajuló. $c_i \mapsto (-1)^{\dim b_i} \cdot b_i^*$ kielégíti az egyenlőségeket

$$\Longrightarrow \quad c_i = (-1)^{\dim b_i} \cdot b_i^* .$$

□

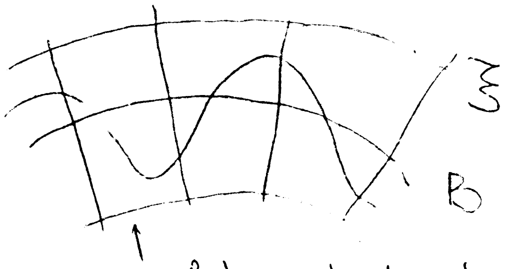
Euler-osztály

Def. $E(\xi) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} B$ ir. vnyaláb ($SO(n)$ strukt. csop.)

$$i : B \hookrightarrow E(\xi)$$

$$e(\xi) = u_\xi\big|_B = i^* u_\xi .$$

Megj. $\exists B$ ir. sok



a korongnyalábot véve $D(\xi)$ már kompakt lesz

Áll. $e(\xi) = D_B\left[s^{-1}(0)\right]$,

ahol $s : B \longrightarrow E(\xi)$

$s \pitchfork 0\text{-szelés} = B$.

Biz.

$B \subset D(\xi) \qquad s : B \longrightarrow D(\xi)$

$$\left[s^{-1}(B)\right] = D_B\, s^* \underbrace{D_{D(\xi)}\left[B\right]}_{U_\xi \text{ def. szerint (Thom-osztály)}},$$

$$D_B\left[s^{-1}(0\text{-szelés})\right] = s^* U_\xi \underset{\substack{\uparrow \\ s \text{ és } i \text{ homotópok}}}{=} i^* U_\xi = e(\xi)$$

□

Spec. $B = M$, $\xi = TM$

$$\langle e(TM), [M] \rangle \underset{\uparrow}{=} \chi(M)$$

szelés = vmező, ennek 0-helyeiben vesszük a forgások összegét

Múltkor: $\langle \Delta^* u'', [M] \rangle = \chi(M)$.

Definiálható a mod 2 Euler-oszt. tetsz. nyalábokra ($= w_{top}(\xi)$).

Lemma. $$\underset{H^{k+l}(B;\mathbb{Z})}{\underset{\cap}{e(\xi^k \oplus \eta^l)}} = \underset{H^{k}(B;\mathbb{Z})}{\underset{\cap}{e(\xi)}} \cup \underset{H^{l}(B;\mathbb{Z})}{\underset{\cap}{e(\eta)}}$$

1. Biz

csak $B =$ sok. esetén

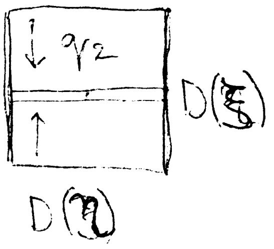
s_ξ szelés ξ-ben, s_η szelés η-ban

$s_{\xi\oplus\eta} = (s_\xi, s_\eta)$

$s_{\xi\oplus\eta}^{-1}(0) = s_\xi^{-1}(0) \cap s_\eta^{-1}(0)$, majd áttérünk a duálisokra □

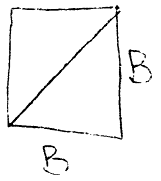
2. Biz A Thom-osztályok multiplikatívak

$U_{\xi\oplus\eta} = q_1^* U_\xi \cup q_2^* U_\eta$



$H^{k+l}(D(\xi\oplus\eta), \partial D(\xi\oplus\eta))$

volt: $U_{\xi\times\eta} = U_\xi \times U_\eta$
↳ ezt $B\times B$ diagonálisán megszorítjuk $(\xi\times\eta|_\Delta = \xi\oplus\eta)$



$(D(\xi), \partial D(\xi))$ ← $q_2 = \xi$-vel ‖ vetítés

$(D(\xi\oplus\eta), \|\eta$ komponens$\| = 1)$

$q_2^* U_\eta \in H^l(D(\xi\oplus\eta), q_2^{-1}(\partial D(\eta)))$

HF ebből az Euler-oszt. multipl.
↳ $U_{\xi\times\eta} = U_\xi \times U_\eta$

$U_{\xi\oplus\eta}|_B = U_\xi|_B \cup U_\eta|_B \Rightarrow e(\xi\oplus\eta) = e(\xi)\cup e(\eta)$ □

Pt

<u>Köv.</u> $TS^{2k} \not\cong \xi^m \oplus \eta^l$, ahol $\dim \xi > 0$
(irányítható -t. ált.) $\dim \eta > 0$

<u>Biz</u> $e(TS^{2k}) = e(\xi) \cup e(\eta) = 0$

az m ill. l-dik kohom. csop.-ok 0-k

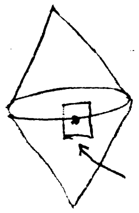
$\chi(S^{2k}) = \langle e(TS^{2k}), [S^{2k}] \rangle = 2$ ↯

Probl.: ξ és η nem felt. ir. (kell, hogy $\underline{e}$ létezzen)

$Vect_n(SX) = [X, SO(n)]$

Spec S^{2k}, ha $X = S^{2k-1}$

$\pi_{2k-1}(SO(n))$

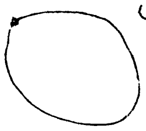


egy pontban feltehető, hogy a lek. O(n)-ben az egységbe megy

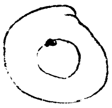
O(n) öf. ⇒ feltehető, hogy SO(n)-be megy a leképezés ✓

<u>Követk.</u>: X útöf. ⇒ SX fölött ∀ nyaláb irányítható.

<u>Megj.</u> Y 1-öf. ⇒ ∀ nyaláb Y fölött ir.-ható



ir. váltó út nincs: behúzzuk egy kis triv. környezetbe



□

<u>Megj.</u> $\xi \xrightarrow{\mathbb{R}^n} B$

$\Lambda^n(\xi) \xrightarrow{\mathbb{R}^1} B$ } ez a kettő pontosan egyszerre irányítható

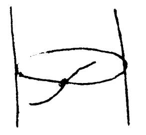
$e_1, \dots, e_n$ $\quad e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in B\, \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$

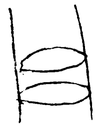
$\Gamma(\Lambda^k(T^*M)) = \Omega^k(M)$

$\Lambda^n(\xi)$-t egy B-beli hurokra megszorítva Möbius-szalag vagy rendes szalag.
Ha B 1-öf. ⇒ csak rendes szalag lehet.

Möbius-szalag ≠ rendes szalag:

a 0-szelést öntranszverzálissá téve 1 ill 0 metszéspont <u>mod 2</u>





$$\xi \longrightarrow w_1(\xi)$$

$$\mathrm{Vect}_1(X) = H^1(X;\mathbb{Z}_2)$$

$$= [X, \mathbb{R}P^\infty]$$

<u>Karakt. osztályok:</u>

<u>Axiómák</u>

1.) $\xi \xrightarrow{\mathbb{R}^n} B$ $\quad w_i(\xi) \in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$ ← Stiefel-Whitney $\quad i=0,1,\dots,n$

($\xi \xrightarrow{\mathbb{C}^n} B$ $\quad c_i(\xi) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ ← Chern

$\xi \xrightarrow{\mathbb{H}^n} B$ $\quad p_i^s(\xi) \in H^{4i}(B;\mathbb{Z})$

↑ szimplektikus Pontrj. oszt.)

$w_0(\xi) = 1$, $c_0(\xi) = 1$

2) Természetesség:

$$\begin{tikzcd} \xi = f^*\xi' \arrow[d] & \xi' \arrow[d] \\ f: B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

$$f^* w_i(\xi') = w_i(f^*\xi') = w_i(\xi)$$

3.) $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \cup w(\eta)$

$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \dots + w_n(\xi)$ $\quad (n = \dim \xi)$

↑ totális S-W. oszt

4.) $\gamma^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$

$w_1(\gamma^1) = x =$ gener. $\in H^1(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2)$-ben

<u>17. előadás</u>

HF 1.) ξ ptlan dim. ir. nyaláb, akkor $2e(\xi) = 0$.

2) $e(\xi)$ „természetes": $e(f^*\xi) = f^* e(\xi)$

$f^*\xi$-n irányítás: úgy, hogy $f^*\xi \to \xi$ ir. tartó legyen

$$\begin{tikzcd} \eta \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \xi \arrow[d] \\ B_\eta \arrow[r, "f"] & B_\xi \end{tikzcd}$$

$f^*(e(\xi)) = \pm e(\eta)$

F ir. tartó v. váltó a fibrumokon.

Megj. Ax ⇒ Unicitás az olyan ξ-kre, melyek vonalnyalábok összegeként állnak elő.

Biz. 1) ξ = vonalnyaláb

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^1 \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f_\xi"] & \mathbb{RP}^\infty \end{tikzcd}$$

f_ξ homot. erejéig egyért.

$w_1(\gamma^1) \overset{④}{=} \overset{\text{gener.}}{x} \in H^1(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2)$

$w_1(\xi) \overset{②}{=} f_\xi^* x$

$i > n$-re $w_i(\xi) = 0$.

2) $\xi = l_1 \oplus \dots \oplus l_n$

$$w(\xi) \overset{③}{=} w(l_1) \cup \dots \cup w(l_n) = (1 + w_1(l_1)) \cup \dots \cup (1 + w_1(l_n))$$

Splitting lemma

Adott $\xi \to B$ nyaláb. Ekkor $\exists$ Y és $p: Y \to B$, melyre

$$\begin{tikzcd} p^*\xi \arrow[r] \arrow[d] & \xi \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

$p^*\xi$ = vonalnyalábok összege

p^* injektív $H^*(B; \mathbb{Z}_2) \to H^*(Y; \mathbb{Z}_2)$

($\exists$ analóg komplex esetben)

Husemoller: Fibre bundles

Stong: Notes on cobordism theory

Komplex esetben: $p^* : H^*(B; \mathbb{Z}) \rightarrowtail H^*(Y; \mathbb{Z})$ inj.

Biz (Felhasadási lemma ⇒ Unicitás)

$$\left.\begin{array}{l} w(p^*\xi) \text{ egyért. (előző Megj.)} \\ p^* w(\xi) \overset{②}{=} w(p^*\xi),\ p^* \text{ inj.} \end{array}\right\} \Rightarrow w(\xi) \text{ egyért.}$$

□

Biz (Felhasadási lemma)

$\mathbb{R}P(\xi) \xrightarrow{\mathbb{R}P^{n-1}} B$ (a ξ fibrumaiban lévő egyenesek)

$\quad \shortparallel$

$S(\xi)/_{(\pm)}$.

$$\begin{tikzcd}
p_1^*\xi = \ell^1 \oplus \eta^{n-1} \arrow[d] & \xi^n \arrow[d] \\
\mathbb{R}P(\xi) \arrow[r, "\mathbb{R}P^{n-1}", "p_1"'] & B
\end{tikzcd}$$

$y \in \mathbb{R}P(\xi)$

$\shortparallel$

ℓ_x $\underbrace{\text{egy egyenes}}$ a ~~egy~~ ξ_x fibrumban, ahol $x = p_1(y) \in B$.

$\xi_x \supset \ell_x$ (ℓ^1: $\forall \overset{\mathbb{R}P(\xi)}{\overset{\cup}{y}}$ feletti fibrumban tek. az y-nak megf. egyenest.)

$\ell^1 = \cup \ell_x \subset p_1^*(\xi_x) = \xi_y \qquad x = p_1(y)$

$\cap$

$p_1^*\xi \qquad \eta = (\ell^1)^\perp \leftarrow$ veszünk egy metrikát

Iterálva ezt kapjuk a $p: Y \to B$ leképezést.

Elég: p_1^* inj.

Leray – Hirsch lemma

$$(E, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nyílt}}}{E_0}) \xrightarrow{(F, F_0)} B$$

Λ együtth., melyre $H^*(F, F_0; \Lambda)$ szabad Λ-modulus $a_1, \dots, a_r$ generátorokkal

$H^*(E, E_0) \ni b_1, \dots, b_r$ elemek

$j_*: (F, F_0) \hookrightarrow (E, E_0) \qquad j^* b_i = a_i$

$\Rightarrow H^*(E, E_0, \Lambda) =$ szabad $H^*(B, \Lambda)$-modulus $b_1, \dots, b_r$ generátorokkal

$\pi: E \to B \qquad x \in H^*(B)$-vel a szorzás $H^*(E, E_0)$-ban a $\pi^* x$-szel a szorzás.

Azaz $\forall\, y \in H^*(E, E_0)$ egyértelműen előáll a köv. alakban: $y \overset{\exists !}{=} \pi^*(x_1) \cdot b_1 + \dots + \pi^*(x_r) b_r$.

$\mathcal{L}-\mathcal{H}. \Rightarrow$ Splittingben p^* inj.:

$\mathbb{RP}(\xi) \xrightarrow{p_1} B$ $\quad p_1^*$ inj.

$E_0 = \emptyset$, $E = \mathbb{RP}(\xi)$, $F = \mathbb{RP}^{n-1}$

$$\underbrace{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}}_{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}}$$

$b_1 = ($ $l^1 \subset p_1^*\xi$-nek megfelelő 1-dim kohom. osztály$)$

$$\begin{tikzcd} & l^1 \arrow[d] & \gamma^1 \arrow[d] \\ \mathbb{RP}^{n-1} \arrow[r, hook, "j"] & \mathbb{RP}(\xi) \arrow[r, "f"] & \mathbb{RP}^\infty \\ & b_1 = f^*x \arrow[d, "j^*"] & x \arrow[l, mapsto] \\ & g & \end{tikzcd}$$

(f homot. erejéig egyért.)

x ← generátor

g ← kanonikus vonalny.-nak megfelelő 1-dim kohom. osztály

$\mathrm{Vect}_1(X) = [X, \mathbb{RP}^\infty] = H^1(X; \mathbb{Z}_2)$

$j^* l^1$ = kanon. vonalnyaláb $\mathbb{RP}^{n-1}$ felett $\Rightarrow j \circ f$ a kanon. vonalnyalábot indukálja $\Rightarrow g = j^*(b_1)$.

$b_1^i \xrightarrow{j^*} g^i$

$1, g, g^2, \dots, g^{n-1}$ $\mathbb{Z}_2$-bázis $H^*(\mathbb{RP}^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$-ben

← $a_\xi = b_1 = f^*x$

Tehát $\mathcal{L}-\mathcal{H} \Rightarrow y \in H^*(\mathbb{RP}(\xi); \mathbb{Z}_2) = H^*(B)\langle 1, a_\xi^1, a_\xi^2, \dots, a_\xi^{n-1} \rangle$

$$y \overset{\exists!}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \pi^*(x_i) \cdot a_\xi^i, \quad x_i \in H^*(B; \mathbb{Z}_2)$$

$\Rightarrow \pi^*$ mono. $\quad \pi^*(x) = \pi^*(x') = y$. □

Egzisztencia

$$a_\xi^n = \sum_{i=1}^{n} \pi^*(\sigma_i) \cdot a_\xi^{n-i}$$ Def $w_i(\xi) \overset{\text{def}}{=} \sigma_i$.

Spec $\xi = l$ 1-dim

$a_\xi = \pi^*(\sigma_1)\cdot 1 \qquad w_1(\xi) = \sigma_1$

$$\left(\begin{array}{l} a_\xi^n = \pi^*(\sigma_1)\cdot a_\xi^{n-1} + \ldots + \pi^*(\sigma_n)\cdot 1 \\ a_\xi^n + \sigma_1 \cdot a_\xi^{n-1} + \ldots + \sigma_n = 0 \quad \text{az } a_\xi \text{ minimálpol-ja} \end{array} \right)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{RP}(L) = B \arrow[d, "\pi = id"] \\ B \end{tikzcd}$$

(∀ fibrum 1 db egyenes ξ-ben)

$a_\xi^1 = w_1(\xi)$ (ez volt a korábbi def.)

↑ $H^1(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}_2)$ generátorának visszahúzottja

Ezek kielégítik az axiómákat:

③ nem trivi: $w(\xi\oplus\eta) = w(\xi)\cup w(\eta)$ (*)

$\xi^n \oplus \eta^m$

$\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta) \supset \mathbb{RP}(\xi), \ \mathbb{RP}(\eta)$

$$U = \mathbb{RP}(\xi\oplus\eta) \setminus \mathbb{RP}(\eta) \xrightarrow{\text{def. retr.}} \mathbb{RP}(\xi)$$
$$V = \mathbb{RP}(\xi\oplus\eta) \setminus \mathbb{RP}(\xi) \searrow \mathbb{RP}(\eta)$$

$$\Theta_\xi = a^n_{\xi\oplus\eta} + \underset{\uparrow \text{modulus}}{w_1(\xi)}\cdot a^{n-1}_{\xi\oplus\eta} + \ldots + w_n(\xi) \in H^*(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta);\mathbb{Z}_2)$$

$$\Theta_\eta = a^m_{\xi\oplus\eta} + w_1(\eta)\cdot a^{m-1}_{\xi\oplus\eta} + \ldots + w_m(\eta)$$

<u>Áll.</u> $\Theta_\xi\cdot\Theta_\eta = 0$ ($\Longleftrightarrow$ (*), mert $a_{\xi\oplus\eta}$ $n+m$-edfokú 1-főegyütthatós pol-ja áll, mely 0, de a min pol egyértelmű $\Rightarrow$ a $w_i(\xi\oplus\eta)$-k megegyeznek a szorzat együtthatóival.)

<u>Biz.</u> áll. $\Theta_\xi|_U = 0$, mert $\Theta_\xi|_{\mathbb{RP}(\xi)} = 0$

($U \searrow \mathbb{RP}(\xi)$, és $a_{\xi\oplus\eta}$ az a_ξ-be megy, hisz a kanon. vonalnyalábból tudtuk def szerint 0.)

← pár egzakt sorozata

$$H^*(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta), U) \longrightarrow H^*(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta)) \longrightarrow H^*(U)$$

$$\Theta^*_\xi \longrightarrow \Theta_\xi \longrightarrow 0$$

$$\Theta^*_\eta \in H^*(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta), V) \longrightarrow \Theta_\eta$$

$$\Theta_\xi \Theta_\eta = 0$$

$$\begin{tikzcd}
\overset{\overset{\Theta_\xi}{\pitchfork}}{H^*(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta))} \otimes \overset{\overset{\Theta_\eta}{\pitchfork}}{H^*(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta))} \arrow[r] & H^*(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta)) \\
\underset{\underset{\Theta^*_\xi}{\cup}}{H^*(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta), U)} \otimes \underset{\underset{\Theta^*_\eta}{\cup}}{H^*(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta), V)} \arrow[u] \arrow[r] & \underset{\underset{0}{\cup}}{H^*(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta), U\cup V)} = 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

↖ a szorzás és a rel. szorzás ugyanúgy megy ⇒ a diagr. komm.

$$\Theta^*_\xi\,\Theta^*_\eta = 0$$

$$\overset{\pitchfork}{H^*}(\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta), \underbrace{U\cup V}_{\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta)}) = 0$$

$$\Theta_\xi\big|_{\mathbb{RP}(\xi)} = a^n_\xi + w_1(\xi)\, a^{n-1}_\xi + \ldots + w_n(\xi) = 0$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{RP}(\xi\oplus\eta) \arrow[d, "\pi_{\xi\oplus\eta}"'] & \supset \mathbb{RP}(\xi) \arrow[dl, "\pi_\xi"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

$\square$

$$H^*(\mathbb{RP}(\xi)) = H^*(B)[a_\xi] \Big/ \Theta_\xi = 0$$

(Tehát a S-W. osztályok $H^*(\mathbb{RP}(\xi))$ gyűrűstruktúráját adják meg.)

$$\overset{\infty\text{-ds Grassman}}{H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)} \xrightarrow{z^*} H^*(\mathbb{RP}^\infty\times\ldots\times\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2)$$

$$\begin{tikzcd}
z: \mathbb{RP}^\infty\times\ldots\times\mathbb{RP}^\infty \arrow[r] & BO(n) \\
\gamma^1\times\ldots\times\gamma^1 \arrow[u] \arrow[r] & \gamma^n \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$$

↖ z indukálja ezt a nyalábot

g^* inj.

$\mathbb{Z}_2[x] = H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$

$x_j = w_1(\pi_j^* \gamma^1)$, π_i: vetítés az i-edikre

$H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_n]$

$g^* w_i(\gamma^n) = \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$, σ_i: elemi szimm. pol.

Tehát im g^* = szimm. polinomok

$$g^* w(\gamma^n) = w(\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1) \overset{\cancel{\text{Bax}}}{=} \cancel{w(\gamma^1)}$$

$$= w(\pi_1^* \gamma^1 \oplus \pi_2^* \gamma^1 \oplus \dots \oplus \pi_n^* \gamma^1) \overset{③}{=}$$

$$\overset{③}{=} w(\pi_1^* \gamma^1) \cup w(\pi_2^* \gamma^1) \cup \dots \cup w(\pi_n^* \gamma^1) \overset{②}{=}$$

$$= \pi_1^* w(\gamma^1) \cup \dots = w(\gamma^1) \times w(\gamma^1) \times \dots \times w(\gamma^1) =$$

$$= (1+x) \times (1+x) \times \dots \times (1+x)$$ (x a generátor)

$$g^* w(\gamma^n) = (1+x) \times (1+x) \times \dots \times (1+x)$$

$g^* w_i(\gamma^n) = \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$

$x_1 = x \times 1 \times \dots \times 1$

$x_2 = 1 \times x \times \dots \times 1$

...

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "p"] & \text{(Splitting L.)} \\
\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty \arrow[r, "g"'] & BO(n) & \gamma^n \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$p^* \gamma^n = l_1 \oplus \dots \oplus l_n$

$p^* = f^* \circ g^*$ inj. (Splitting L.) $\Longrightarrow$ g^* inj.

$$\begin{tikzcd}
\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"', "\text{a tényezők permut.}"] & \gamma^n \\
\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1 \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

im $g^* \subset$ szimm. pol.:

$s^* \circ g^* = g^*$.

az elemi szimmetrikusak $\subset$ im g^* (a S-W. képei)

$\Rightarrow$ im g^* = szimmetrikusak

$g^* w_i(\gamma^n) = \sigma_i(x_1,\dots,x_n)$, g^* inj.

$H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1,\dots,w_n]$.

18. előadás

HF: a) $\xi \to B$ ir., $\exists$ nem nulla szelés $\Rightarrow e(\xi)=0$

b) $e(\xi)=0 \Rightarrow \exists$ nem nulla szelés, ha

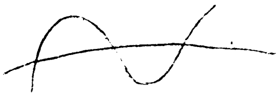
b1) dim ξ = 1 v. 2

b2) $\xi = TM^n$ M^n ir.

c) ált. nem igaz a b).

Karakt. oszt. „szép" def.-ja

$\xi \xrightarrow{\mathbb{R}^n} B$



$w_n(\xi)$ – ua a def (gener. szelés 0-helyeinek duálisa) mod 2.

$w_j(\xi)$ = k db szelés $\Sigma = \{b\in B \mid \mathrm{rk}\{s_1,\dots,s_k\} < k\}$

$w_j = D_B[\Sigma]$ $k = n-j+1$

$\overline{\Sigma^1}(\varepsilon^k,\xi^n) = \Sigma$

↖ ahol az $\varepsilon^k \to \xi^n$ nyaláblek.-nél ≥ 1-et esik a rang

codim $\Sigma^r = r(n-k+r)$

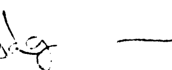
$\Sigma^* \subset HOM(\varepsilon^k,\xi^n)$ $s = (s_1,\dots,s_k)$

$$\begin{tikzcd} HOM(\varepsilon^k,\xi^n) \arrow[d, "L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)"] \\ B \arrow[u, bend left, "\tilde{s}"] \end{tikzcd}$$

$s^{-1}(\Sigma^*) = \Sigma$

$\Downarrow$

codim Σ^* = codim Σ

(Σ^* pszeudo-sokaság )

w_1 geometriai jelentése:

<u>L</u> $w_1(\xi)=0 \iff \xi$ ir.-ható

ℓ vonalnyaláb

a generátort azonosítjuk

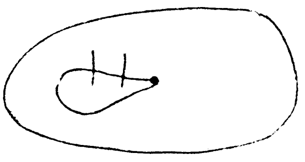
$$\ell \longrightarrow \underset{\underset{w_1(\ell)}{\cup}}{H^1(B;\mathbb{Z}_2)} = \underset{f_\ell}{[B, \mathbb{RP}^\infty]}$$

γ görbe $\subset B$ $\quad \ell|_\gamma$ ↗ triv. $\iff f_\ell(\gamma) \cong 0$ ↘ Möbius-szalag $\iff \not\cong 0$

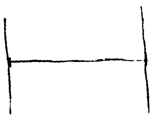
$$w_1(\ell)(\gamma) = \begin{cases} 0 & \ell|_\gamma \text{ triv.} \iff f_\ell(\gamma) \cong 0 \\ 1 & \ell|_\gamma \text{ M.sz.} \iff \not\cong 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Vect}_1(B) \underset{\text{izo.}}{\longleftrightarrow} H^1(B;\mathbb{Z}_2)$$

↑ tenzorszorzás csoport struktúra (egység: triv. nyaláb; inverz: saját maga)



$\ell_1 \otimes \ell_2$



a ragasztó lek.-ek szorzódnak

⇒ Möbius ⊗ Möbius = triv.

Geom leírás $\Rightarrow w_1(\ell_1 \otimes \ell_2) = w_1(\ell_1) + w_1(\ell_2)$

<u>Áll</u> $\xi \xrightarrow{\mathbb{R}^n} B$ $\quad e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ bázis $\Lambda^n \xi$-ben

$$w_1(\xi) = w_1(\Lambda^n \xi)$$

↑ determinánsnyaláb (ξ ragasztó leképezésének det.-a adja a ragasztó lek.-t $\Lambda^n\xi$-en)

<u>Biz</u> (Áll ⇒ L)

<u>Köv</u>: $w_1(\Lambda^n\xi)=0 \iff \xi$ ir. $\quad$ Uis.

$w_1(\Lambda^n\xi)=0 \iff \Lambda^n\xi$ ~~$\cong\Theta$~~) triv. $\iff \xi$ ragasztóleképezésének det-a mindig >0. $\iff \xi$ ir. □

96

Biz **Áll** 1.) $\xi = l_1 \oplus \ldots \oplus l_n$ (~ adódik egy jóldef. bázissorrendet ;

$\Lambda^n \xi = l_1 \otimes l_2 \otimes \ldots \otimes l_n$ $\Lambda^n\xi$ bázisa $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$,

de $l_1 \otimes l_2 \otimes \ldots \otimes l_n$-nek is

$\Downarrow$

$w_1(\Lambda^n \xi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2. gyak. feladat}}}{=} w_1(l_1) + \ldots + w_1(l_n)$ ez a bázisa)

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \ldots + w_n(\xi) \overset{3.\text{áll}}{=} (1 + w_1(l_1))(1 + w_1(l_2)) \ldots$$

$$w(l_1) \cup w(l_2) \cup \ldots$$

$$\Rightarrow w_1(\xi) = w_1(l_1) + \ldots + w_1(l_n)$$

2) ξ tetsz.

Splitting l.:

$$\begin{tikzcd} p^*\xi \arrow[r] \arrow[d] & \xi \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

$p^*\xi = l_1 \oplus \ldots \oplus l_n$

p^* inj.

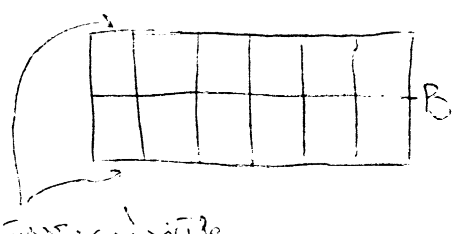
$$w_1(p^*\xi) \overset{1)}{=} w_1(\Lambda^n p^* \xi)$$

$$p^* w_1(\xi) = p^* w_1(\Lambda^n \xi) \overset{p^* \text{ inj}}{\Longrightarrow} w_1(\xi) = w_1(\Lambda^n \xi) \quad \square$$

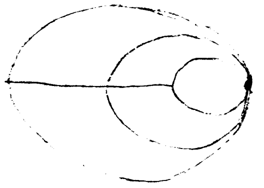
Á $w_n(\xi^n) = u_\xi^{\mathbb{Z}_2}\big|_B$

$u_\xi^{\mathbb{Z}_2}$ mod 2 Thom-osztály : generátor $H^n(T\xi; \mathbb{Z}_2)$-ben

$u_\xi^{\mathbb{Z}_2}\big|_{\text{fibrum} = S^n}$ = generátor



összecsípjük

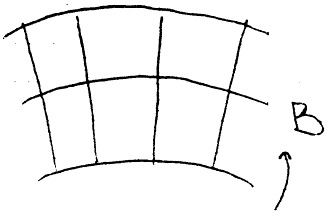


$$\left(\text{Spec } \xi \text{ ir.} \Rightarrow e(\xi) \bmod 2 = w_{top}(\xi) \right)$$

Biz$_Á$ 1.) ξ 1-dim. az $\overset{N-}{\text{univ.}}$ nyaláb : $\xi = \gamma^1 \to \mathbb{R}P^N$

$w_1(\gamma^1) \neq 0$, mert γ^1 nem triv. (γ^1 univ., van nem triv. vonalnyaláb).

$$w_1(\gamma^1) = x \leftarrow \text{gener.} = D_{\mathbb{R}P^N}\left[\mathbb{R}P^{N-1}\right] = U^{\mathbb{Z}_2}_{\gamma^1}\Big|_{\mathbb{R}P^N}$$



$$T\gamma^1_{\mathbb{R}P^{N-1}} = \mathbb{R}P^N \quad \text{(volt)}$$
$$\cup$$
$$\mathbb{R}P^{N-1}, \text{ 0-szelés}$$

a 0-szelés duálisa az U_ξ

$$x = U^{\mathbb{Z}_2}_{\gamma^1_{\mathbb{R}P^{N-1}}} = U^{\mathbb{Z}_2}_{\gamma^1_{\mathbb{R}P^N}}\Big|_{\mathbb{R}P^N} \quad \text{(Thom-oszt. term.)}$$

2) Tetsz. vonalnyalábra: Mindkét oldal term. a $\mathcal{L}$-ban.

3.) Vonalnyalábok összege: Mindkét oldal multipl.

$$U_\xi\big|_B \cup U_\eta\big|_B = U_{\xi\oplus\eta}\big|_B$$

$$w_{top}(\xi\oplus\eta) = w_{top}(\xi) \cup w_{top}(\eta) \qquad \text{(ö.sz)}$$

4.) Splitting lemma $\Rightarrow$ $\forall$-re (mint előbb). □

Alkalmazás

Tétel. $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k} \Rightarrow \overline{w}_k(M) = 0.$

Megj. $w(\nu)$

$\uparrow$ normálnyaláb valamilyen eukl. térbe vett beágy.-ra nem függ a beágyazástól, csak az M sok.-tól.

$M \subset \mathbb{R}^q \qquad T\mathbb{R}^q\big|_M = TM \oplus \nu$

$$1 = w(\text{trivi}) = w(M) \cup w(\nu)$$

$\uparrow$ a trivi nyalábot a pont fölötti nyalábból húzhatjuk vissza

y poz. fokú (fokszámozott gyűrűben) $\qquad \deg y > 0$ ← nem felt. homog.

$$(1+y)^{-1} = 1+y+y^2+\dots\Big|\dots$$

túlcsordul (itt 0)

$$w_1(M) + w_1(\nu) = 0, \quad w_2(M) + w_1(M)\cup w_1(\nu) + w_2(\nu) = 0$$

$$w_1(\nu) = w_1(M)$$
$$\Rightarrow w_2(\nu) = w_2(M) + w_1^2(M)$$

$\overline{w_k}(M) \overset{def}{=} w_k(\nu)$ k-ik normál S-W osztálya M-nek

$\left(w_i(M) \overset{def}{=} w_i(TM) \right)$

Megj. $w_1(M) = \overline{w_1}(M)$

HF Tetsz-en irányítjuk a max dim. szimplexeket.
$\exists\ \Delta_1^{n-1}, \dots, \Delta_j^{n-1} \leftarrow$ azon $(n-1)$-szimplexek, ahol rossz az illeszkedés.

$\bigcup_{i=1}^{j} \Delta_i^{n-1} = z_i$ ciklus Ennek duálisa $w_1(M)$.
(Ahol M-et fel kell vágni, hogy ir.-ható legyen)

$w_1(\text{ir. felület}) = 0$
$w_1(\text{nem ir. felület}) =$ a Möbius-szalagok középvonalainak duálisa

HF $w_2(F^2) \equiv \chi(F^2) \mod 2$ (ir.-hatóra tudjuk)

Biz T. csőszerű körny.

$$\begin{tikzcd}
M^n \subset N_\varepsilon^{n+k} \arrow[d, bend left] & \subset \mathbb{R}^{n+k} \arrow[d, bend left] \\
(N_\varepsilon, N_\varepsilon \setminus M) \arrow[r, hook] & (\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H^k(M) & H^k(N) \arrow[l] & H^k(\mathbb{R}^{n+k}) = 0 \arrow[l] \\
w_k(\gamma) = \overline{w_k}(M) & & \\
& u \in H^k(N, N \setminus M) \arrow[u] \arrow[uul, bend right] \arrow[ul, "K"'] & = H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M) \ni u'_\gamma \arrow[u] \arrow[uull, bend right]
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \overline{w_k}(M) = 0.$ $\square$

Köv. (HF) $M^n = \underbrace{F_1^2 \times \dots \times F_s^2}_{\text{nem ir.}} \times \underbrace{G_1^2 \times \dots \times G_r^2}_{\text{ir.}} \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+s}$

$\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+s+1}$

Tétel $f: M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k} \Rightarrow \overline{w_i}(M)=0$ $i>k$-ra

Biz $\dim \nu = k \xRightarrow{1. ax} w_i(\nu) = 0$ $(i>k)$. □

Megj. Uez a biz adja:

$$M^n \text{ ir. } \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k} \Longrightarrow \underset{\uparrow}{e}(\nu^k) = 0$$

nem csak M-től függ!

Megj. Stiefel-Whitney osztályok stabilak,

<u>e</u> nem stabil:

azaz $w(\xi) = w(\xi \oplus \varepsilon^i)$

$$e(\xi) \neq e(\xi \oplus \varepsilon^i) \underset{\uparrow}{=} 0$$

$\xi \oplus \varepsilon^i$-nek van szelése

$M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^q \not\Rightarrow M^n \looparrowright \mathbb{R}^{q-1}$ ($e(\xi) = 0 \not\Rightarrow \xi$-nek $\exists$ szelése, nem tudjuk a beágyazást összenyomni)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}P^2 \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{R}^4 \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, de $\nexists$ beágy. normálmezővel

$\mathbb{R}^3$ a Boy-felület nem emelhető fel

<u>Leray-Hirsch t.</u>

$b_1, \dots, b_r \in H^*(E, E_0)$, $\{j^* b_i\}$ bázis $H^*(F, F^0)$-ban

$$\Rightarrow \underset{\uparrow}{H^*(E,E_0)} = H^*(B)\langle b_1, \dots, b_r\rangle \qquad \begin{tikzcd} (E,E_0) \arrow[d, "{(F,F_0)}"] \\ B \end{tikzcd}$$

szabad $H^*(B)$-modulus $b_1, \dots, b_r$ generátorokkal

Biz $x_1, \dots, x_r$ változók, $\deg x_i = \deg b_i = n(i)$

$U \subset B$ (ami fölött triv a nyaláb)

$$\begin{tikzcd} K^n(U) \arrow[r, phantom, "\overset{def}{=}"] \arrow[d, "\Theta_U"'] & \bigoplus_{i=1}^{r} H^{n-n(i)}(U) \cdot x_i \arrow[r, phantom, "\ni"] \arrow[d] & \sum c_i x_i \arrow[d, mapsto] \\ L^n(U) \arrow[r, phantom, "="] & H^n(E_U, E_U \cap E_0) \arrow[r, phantom, "\ni"] & \sum p^*(c_i) b_i \end{tikzcd}$$

, $c_i \in H^{n-n(i)}(U)$

, ahol $E_U = p^{-1}(U)$.

Ha az $\mathcal{U}$ fölött trivi $\Rightarrow$ $\Theta_{\mathcal{U}}$ izom (Künneth formula)

$$H^*(E_{\mathcal{U}}, E_{\mathcal{U}} \cap E_0) = H^*(\mathcal{U}) \otimes H^*(F, F_0) \hookleftarrow$$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "id"'] & E \arrow[r, "r"] & F \end{tikzcd}$$

Ha $\mathcal{U}, V$ -re $\left.\begin{array}{l} \Theta_{\mathcal{U}} \text{ izom} \\ \Theta_V \text{ izom} \\ \Theta_{\mathcal{U}\cap V} \text{ izom} \end{array}\right\} \Rightarrow \Theta_{\mathcal{U}\cup V}$ izo.

Mayer – Vietoris + 5-lemma

$$\begin{tikzcd} K^n(\mathcal{U}\cap V) \arrow[d, "\approx"] & K^n(\mathcal{U})\oplus K^n(V) \arrow[l] \arrow[d, "\approx"] & K^n(\mathcal{U}\cup V) \arrow[l] \arrow[d, "?\ \text{öt lemma}"] & K^{n-1}(\mathcal{U}\cap V) \arrow[l] \arrow[d, "\approx"] & \arrow[l] \\ L^n(\mathcal{U}\cap V) & L^n(\mathcal{U})\oplus L^n(V) \arrow[l] & L^n(\mathcal{U}\cup V) \arrow[l] & L^{n-1}(\mathcal{U}\cap V) \arrow[l] & \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Kész, ha B lefedhető véges sok triv. környezettel.

Ált. B-re:

Limesz tetsz. parakomp. B-re. ☐

19. előadás

HF. 1.) n ps. $i_1+\ldots+i_r = n-1$

Bb. $\binom{n}{i_1}\cdots\binom{n}{i_r}$ páros.

a) Alg. biz

b) Top. biz

2) $\dim_{\mathbb{Z}_2} \mathfrak{N}_6 \geq 3$

$\nwarrow$ sokaságok kobord. csop.-ja

Thom izomorfizmus t.

$T: \xi \xrightarrow{\mathbb{R}^n} B$

a) ξ ir. és együtth. $\mathbb{Z}$

b) ξ tetsz. és —"— $\mathbb{Z}_2$

1.) $\exists!\, u_\xi \in H^n(E, E_0)$, $E = E(\xi)$, $E_0 = E(\xi) \setminus 0$-szelés

$$u_\xi\big|_{\text{fibrum} = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)} = \text{gener.}$$

2) $\forall\, y \in H^*(T\xi)$ egyértelműen írható $\overbrace{u_\xi \cup \pi^* x}^{(*)}$ alakban, ahol $x \in H^*(B)$.

Spec.-an $H^i(T\xi) = 0$ ha $i < n$.

Biz 1.) $U \subset B$: $E_U = \pi^{-1}(U)$ = direkt szorzat

$$(E_U, E_U \cap E_0) = U \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)$$

Künneth form.: $H^*(E_U, E_U \cap E_0) = H^*(U) \otimes H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)$

csak n-dim-ban nem 0

$u_1 = 1 \otimes \text{gener.}$ $\quad {}^{\cap}H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)$

$$\Downarrow$$

$$H^i(E_U, E_U \cap E_0) = 0 \quad (i < n)$$

Tfh U és V fölött igaz ~~az 1.~~). a T. \ (*).

$U \cap V$ ——||——

Mayer-Vietoris $\Rightarrow$ $U \cup V$-re is igaz.

$i < n$ $\quad H^i(E_{U\cup V}, E_{U \cup V} \cap E_0) = 0$ $\quad$ (a többi 3 csoport 0)

$$H^i(\cap) \xleftarrow{x-y} H^i(\underset{u_1}{U}) \oplus H^i(\underset{u_2}{V}) \xleftarrow{\text{megszor.}} H^i(\underset{u_3}{U \cup V}) \leftarrow H^{i-1}(\cap)$$

$$\overset{0}{H^i(E, E_0)} = H^i(T\xi)$$

$i = n$ $\quad$ Egyértelműség $\Rightarrow$ u_1, u_2 ~~egymással~~ megszorítása $U \cap V$-re uaz $\Rightarrow$ (u_1, u_2) képe $H^i(\cap)$-ben $= 0$ $\Rightarrow \exists$ ős^{u_3} $H^i(U \cup V)$-ben, s ez egyértelmű, hiszen $H^{i-1}(\cap) = 0$.

Leray-Hirsch t. $\Rightarrow$ (*) $\square$

$$\varphi: H^i(B) \longrightarrow H^{i+n}(T\xi) \qquad \text{Thom izom}$$

$$x \longmapsto \pi^* x \cup u_\xi$$

Áll

T. (Pontrjagin)

$$M^n \underset{\uparrow}{\sim} 0 \Rightarrow \forall \ \underset{\uparrow}{w_I}[M]=0$$

0-kobordáns   karakt. számok

Def $I=(i_1,\dots,i_r)$ $|I|=\sum_{j=1}^{r} i_j$

$|I|=n$

$w_I[M]=\langle w_{i_1}(M)\cup\dots\cup w_{i_r}(M),[M]\rangle$

T. (Thom) $\Leftarrow$

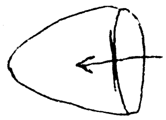
Spec $I=(n)$: $\langle w_n(M),[M]\rangle = \chi(M) \bmod 2$

$(M\sim 0 \Rightarrow \chi(M)\equiv 0 \bmod 2)$

Biz (Pontrj.)

$M^n = \cancel{\partial M}\ \partial N^{n+1}$ $j: M \hookrightarrow N$

$$w_i(M) = w_i(TM) = w_i(TM\oplus\varepsilon^1) = w_i(\underbrace{TN|_M}_{j^*TN}) =$$



$$= j^* w_i(N)$$

$$\underset{\nwarrow}{w_I(M)} = j^* w_I(N)$$

$(w_{i_1}(M)\cup\dots\cup w_{i_r}(M))$

$$w_I[M] = \langle w_I(M),[M]\rangle = \langle j^*w_I(N),[M]\rangle =$$

$$= \langle w_I(N), \underbrace{j_*[M]}_{=0}\rangle = 0$$

([M] az N pereme) □

Átfogalmazás: $M_1\sim M_2 \Rightarrow \forall I$-re $w_I[M_1]=w_I[M_2]$.

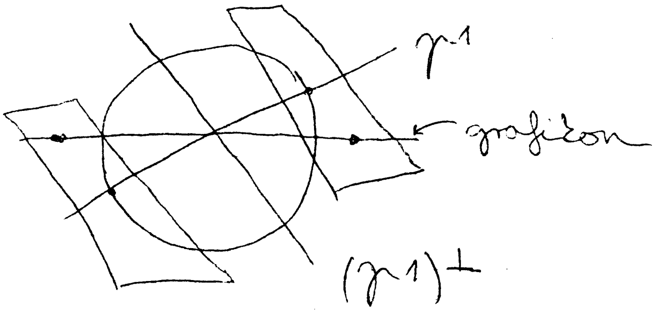
Pl $\mathbb{R}P^2\times\mathbb{R}P^2$ és $\mathbb{R}P^4$ nem kobordánsak

Proj. terek S-W oszt.-i

Á $T\mathbb{R}P^n \oplus \varepsilon^1 = (n+1)\gamma_n^1$ ← kanonikus nyaláb $\mathbb{R}P^n$ fölött

$$(n+1)\gamma^1 = \underbrace{\gamma^1 \oplus \ldots \oplus \gamma^1}_{n+1}$$

<u>Biz.</u> $T\mathbb{R}P^n = \mathrm{HOM}(\gamma^1, (\gamma^1)^\perp)$



számmal szoroz, előjel, bázist bázisba viszi-e

$$T\mathbb{R}P^n \oplus \varepsilon^1 = \mathrm{HOM}(\gamma^1, (\gamma^1)^\perp) \oplus \overbrace{\mathrm{HOM}(\gamma^1, \gamma^1)}^{\varepsilon^1} =$$

$$= \mathrm{HOM}(\gamma^1, \underbrace{(\gamma^1)^\perp \oplus \gamma^1}_{\varepsilon^{n+1}}) = (n+1)\cdot \underbrace{\mathrm{HOM}(\gamma^1, \varepsilon^1)}_{\gamma^1} = (n+1)\gamma^1$$

mert ∃ Riemann-metrika

($\forall \xi$ <u>valós</u> nyalábra $\xi \simeq \mathrm{HOM}(\xi, \varepsilon^1)$) □

$$w(\mathbb{R}P^n) = w((n+1)\gamma^1) = w(\gamma^1)^{n+1} = (1+x)^{n+1}$$

$x \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ gener.

$$w_i(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{i} x^i.$$

<u>L</u> (Ltg.) $\binom{a}{b} \equiv \prod_i \binom{a_i}{b_i} \mod p$, p prím

$$a = \sum a_i p^i, \quad b = \sum b_i p^i.$$

<u>Biz</u> $\mathbb{Z}_p[x]$-ben. $(1+x)^a$-ban x^b együtthatója $\binom{a}{b} \mod p$

$$(1+x)^p = 1 + x^p$$

$$(1+x)^a = (1+x)^{\sum a_i p^i} = \prod_i (1+x^{p^i})^{a_i}$$

x^b együtth $= \prod \binom{a_i}{b_i}$

$(1+x^{p^i})^{a_i}$-ban $x^{b_i p^i}$ együtthatója kell. (együtt. felírás) □

<u>Megj.</u> Pontrj. (és Thom) t.-ben vehetünk $\overline{w}_I$-ket.

$\overline{w}_I[M]=0$ (átírható $w_J[M]$-ek lin komb.-ként)

$w(\mathbb{R}P^4) = (1+x)^5 = 1+\binom{5}{1}x+\binom{5}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+\binom{5}{4}x^4 =$

$= 1+(x+x^4)$

$\overline{w}(\mathbb{R}P^4) = 1+x+x^2+x^3$

$1+(x+x^4)+(x+x^4)^2+(x+x^4)^3+(x+x^4)^4 \quad (x^5=0)$

(Megj.: Whitney t. $\Rightarrow \overline{w}_n(M^n)=0$, hiszen $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$)

$\Rightarrow \mathbb{R}P^4 \not\looparrowright \mathbb{R}^6$, mert $\overline{w}_3(\mathbb{R}P^4)\neq 0$.

$\not\hookrightarrow \mathbb{R}^7$, —||—

Ált.-ban Whitney t. éles: $\forall\, n=2^r$-re

$\mathbb{R}P^n \not\looparrowright \mathbb{R}^{2n-2}$ $(n=2^r)$

$\not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$

Biz. $w(\mathbb{R}P^n) = (1+x)^{\overset{2^r}{\overset{\|}{n+1}}} = \sum\binom{n+1}{i}x^i = 1+x+x^n$

$(n+1)$ 2-es számrsz.-ben: $\overset{r}{1}\ 0 \dots 0\ \overset{0}{1}$

i jegyei: $i_r\ i_{r-1}\ \ i_1\ i_0$

Ha $\binom{n+1}{i}$ ptlan $\Rightarrow i_{r-1}=\dots=i_1=0$ $\quad\binom{0}{0}=1$

$i\le n \Rightarrow$ i_0 lehet 0 v. 1

i_1: 0 1 0

$\overline{w}(\mathbb{R}P^n) = 1+x+\dots+\underbrace{x^{n-1}}_{\overline{w}_{n-1}\neq 0}$

$n=2^r$ □

Tétel (R. Cohen)

$M^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$ $\quad\alpha(n)=$ egyesek száma n diad. felbontásában

Sejtés M^n parallelizálható $\Rightarrow M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{\frac{3}{2}n+c}$

vmilyen c konstanssal

(Hirsch t. ⇒ immertálható 1-kodimenzióval)

$$\overline{w}(\mathbb{RP}^2) = 1+x$$

$$\overline{w}(\mathbb{RP}^2\times\mathbb{RP}^2) = (1+x)\times(1+x) = 1+\underbrace{x\times 1+1\times x}_{\overline{w_1}}+\underbrace{x\times x}_{\overline{w_2}}$$

$(\overline{w_3}(\mathbb{RP}^2\times\mathbb{RP}^2)=0$ mert $\mathbb{RP}^2\times\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^6)$

$$\overline{w}(\mathbb{RP}^4) = 1+x+x^2+x^3$$

$\mathbb{RP}^4 \not\sim \mathbb{RP}^2\times\mathbb{RP}^2$:

$$\overline{w_1}\,\overline{w_3}\quad \begin{matrix}[\mathbb{RP}^4] = \cancel{③}\,1\\ [\mathbb{RP}^2\times\mathbb{RP}^2]=0\end{matrix}$$

$$\mathfrak{N} \supset \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$$

<u>Gysin-sorozat</u> $\pi:\xi\to B$

gömbnyaláb

$$\to H^i(B)\xrightarrow{\cup e} H^{i+n}(B)\longrightarrow H^{i+n}(S(\xi))\longrightarrow H^{i+1+n}(B)$$

Euler oszt., ha ξ ir. ($\mathbb{Z}$ együtth.)

$w_{top}(\xi)$ tetsz ξ-re ($\mathbb{Z}_2$ együtth.)

<u>Biz</u> $D(\xi), S(\xi)$ kohom egz sorozat.

$$\begin{tikzcd}
\pi^*x\cup U_\xi & H^i(D,S) \arrow[r, "i^*"] & H^i(D) \arrow[r] & H^i(S) \arrow[r] & H^{i+1}(D,S)\\
x \arrow[u, mapsto] & H^{i-n}(B) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[u, phantom, "\parallel\ \text{Thom-izom}"'] \arrow[r, "\Psi"] & H^i(B) \arrow[u, "\pi^*", "\parallel"'] \arrow[r] & H^i(S) \arrow[r] & H^{i+1-n}(B)
\end{tikzcd}$$

$$\Psi(x) = (\pi^*)^{-1}i^*\varphi(x) = j^*i^*(\pi^*x\cup U_\xi)=(\pi^*x\cup U_\xi)|_B =$$

$j: B\hookrightarrow D$ $$= x\cup \underbrace{U_\xi|_B}_{e_\xi}$$

□

$\boxed{HF}$

<u>Köv.</u> $H^*(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/_{x^{n+1}=0}$

$\gamma^1\to\mathbb{RP}^n \qquad S(\gamma^1)=S^n$

$H^i(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow[\approx]{\cup w_1 = x} H^{i+1}(\mathbb{R}P^n)$ $\quad i<n$

$H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}_{\cancel{2}}) = \mathbb{Z}[y]/_{y^{n+1}=0}$

$S(\gamma_1) = S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ Hopf-fibr.

$H^*(BSO(n);\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_2,\dots,w_n]$

$BSO(n) \xrightarrow{\Lambda^n\gamma_n} BO(n)$

20. előadás

HF $\mathbb{C}P^2 \sim \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ Biz 1.) karakt. oszt. (mai)
2)* geom

Thom tétel (Buoncristiano – Hacon)

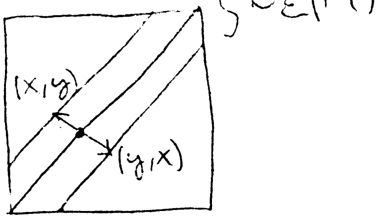
Lemma. $BO(n)$-nek $\exists$ olyan CW-felbontása, $\forall$ cella határa $0 \pmod 2$.

Köv. Az adott cellafelbontásban r-dim cellák száma $= \pi_n(r) =$ partíciók száma $\leq n$ összeadandók sz

$H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1,\dots,w_n]$

Spec eset M^n paral. $\Rightarrow$ 0-kobord
($\uparrow$ triv. nyalábnak $\forall$ karakt. osztálya 0
$\Rightarrow \forall$ karakt. szám 0)

Biz (Spec eset)



$W^{2n} = M \times M \setminus \underbrace{U_\varepsilon(\Delta)}_{\text{nyílt} \to \mathring{D}_\varepsilon(TM)}$

$\uparrow$

ezen $\exists$ involúció $\quad \mathbb{Z}_2$-hatás

$\forall\ \mathbb{Z}_2$-hatás indukálható egy S^N gömbből.

$W^{2n} \xrightarrow{\Phi} S^N$ $\mathbb{Z}_2$ - ekvivariáns

(-1)-gyel szorzás

$\partial W^{2n} = S_\varepsilon(TM) \underset{\uparrow}{=} M \times S^{n-1} \xrightarrow[\text{vetítés}]{\mathbb{Z}_2\text{-ekv.}} S^{n-1}$

M paral.

$\Phi : W^{2n} \to S^N \supset S^{n-1}$ ← Φ választható úgy, hogy ∂W^{2n}-en az előbbi legyen (általánosként terjesztjük ki).

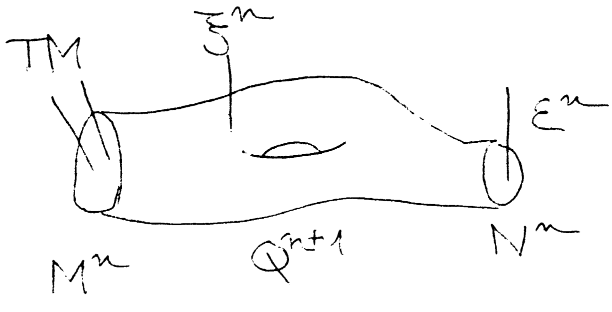
$$\begin{tikzcd} W/\mathbb{Z}_2 \arrow[r, "\Phi/\mathbb{Z}_2"] & \mathbb{R}P^N \supset \mathbb{R}P^{\underbrace{N-n+1}_{q}} \\ \partial W/\mathbb{Z}_2 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

$\Phi/\mathbb{Z}_2 \pitchfork \mathbb{R}P^q$

$\mathbb{R}P^{n-1} \cap \mathbb{R}P^q = \mathbb{R}P^0$ ↖

$(\Phi/\mathbb{Z}_2)^{-1}(\mathbb{R}P^{N-n+1})$ = peremes. Pereme = 1 pont őse, s mivel $\Phi|_{\partial W^{2n}}$ = vetítés, ezért $= M^n$ □

Tfh TM^n kobordáns egy triv nyalábbal: azaz

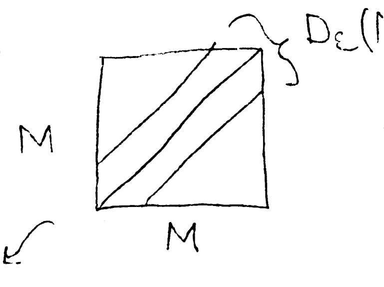


$\exists\, Q^{n+1}$: $\partial Q^{n+1} = M^n \amalg N^n$, $\exists\, \xi^n \to Q^{n+1}$:

$\xi^n|_M = TM$, $\xi^n|_N = \varepsilon^n$

$\Longrightarrow$ M^n 0-kobord.

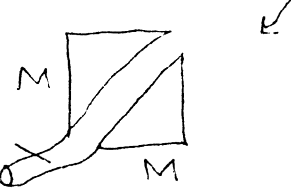
Biz ($\Rightarrow$):



$W^{2n} = M \times M \setminus D_\varepsilon(M) \cup S_\varepsilon(\xi^n)$

$S_\varepsilon(TM)$

$\mathbb{Z}_2$-hatás: sorrendcsere ↑ (-1)-gyel szor. ↑



$$\begin{tikzcd}
W^{2n} \arrow[r] & S^N & \mathbb{Z}_2\text{-ekv.} \\
\partial W \arrow[r, "\text{vetítés}"'] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & S^{n-1} \arrow[u, phantom, "\cup" description] & \\
N \times S^{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
W^{2n}/\mathbb{Z}_2 \arrow[r, "\Phi/\mathbb{Z}_2"] & S^N/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^N \supset \mathbb{R}P^{q = N-n+1} \arrow[dr] & \\
\partial W/\mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & S^{n-1}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r] & \cap = 1\text{ pont} \\
N \times S^{n-1}/\mathbb{Z}_2 & & \mathbb{R}P^0
\end{tikzcd}$$

$(\Phi/\mathbb{Z}_2)^{-1}(\mathbb{R}P^q) =$ peremes sok., pereme $= N$

$M \overset{Q}{\sim} N \sim 0.$ ☐

<u>Thom tétel</u>

M^n zárt sok., $\forall\, w_I[M] = 0 \Rightarrow M \sim 0.$

<u>Biz</u> Elég: ha $\forall\, w_I[M] = 0 \overset{?}{\Rightarrow}$ TM kobord. egy trivi nyalábbal

<u>Biz</u>(?): $\tau_M : M^n \longrightarrow BO(n)$, $(\tau_M)^* \gamma^n = TM$

Kell: τ_M bordáns konstans leképezéssel, azaz $\exists\, Q^{n+1}$, $F : Q^{n+1} \longrightarrow BO(n)$, $\partial Q^{n+1} = M^n \amalg N^n$

$F|_{M^n} = \tau_M$, $F|_N =$ konst.

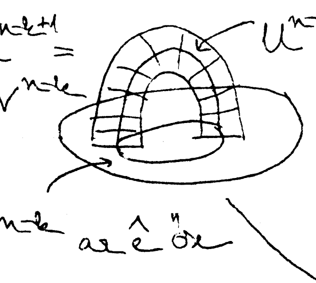
($F^*(\gamma^n)$ adja a kobordizmust a trivi nyalábbal)

$\tau_M(M^n)$ kompakt $\Rightarrow BO(n)$-nek csak véges sok celláját metszi.

<u>"τ_M"-et kikergetjük a cellákból:</u>

(*) <u>Tfh egy max dim cella középpontjának őse 0-kobordáns.</u>

Ekkor kikergetjük a leképezést ebből a cellából.



$\xrightarrow{\tau_M}$ $X^k \subset BO(n)$ ← véges részkomplexus

$\quad\;\cup\!\shortmid$

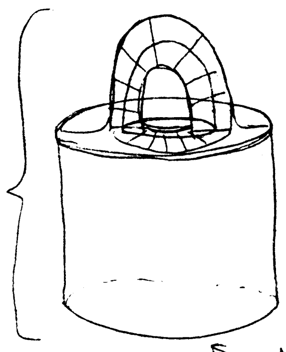
$\hat e \in e^k$ max ds. cella $\qquad \tau_M \pitchfork \hat e$

↑
pont

$\downarrow$

$\hat e \in S^k = X^k / X^k \setminus e^k$

V^{n-k} normálnyalábja triv., mert 1 db pontból indukáltuk ($\hat e$-ból), így e mentén hozzáragaszthatjuk az $U^{n-k+1} \times D^k_\varepsilon$-t.



τ_M-et kiterjesztjük $U \times D_\varepsilon$-ra:

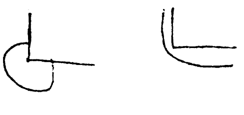
$F: Q \to X^k$

$F|_{M \times [0,1]} = \tau_M \times [0,1]$

$F|_{U \times D^k_\varepsilon}$ = vetítés $D^k_\varepsilon \to \hat e$ körny. e^k-ban

Q felső peremének képe kihagyja $\hat e$-ot

$\Rightarrow$ kifújható e^k-ból. (közben a τ_M elromolhat, de ezt nem használjuk)

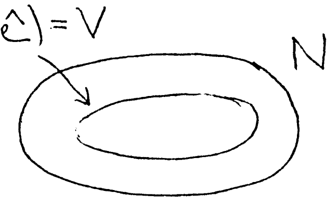
(Q sima sokaság:  kisimítható)

<u>Áll</u> $\forall\ w_I[M] = 0 \Rightarrow (*)$

<u>Biz</u> (Áll)

Indukcióval biz $(*)$-ot, Thom tételt feltesszük n-nél kisebb dim.-ban ($n=1$-re triv.: $S^1 \sim 0$). Elég belátni, hogy $\forall\ w_I[V] = 0$ (V = egy max ds cella középpontjának őse).

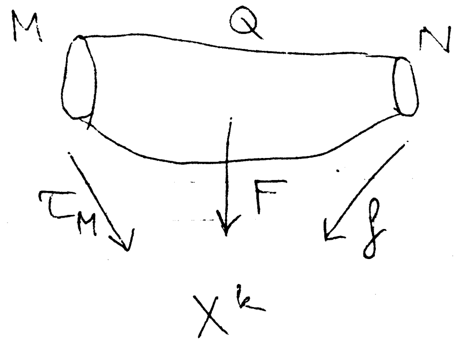
$f^{-1}(\hat e) = V$



$j: V^{n-k} \hookrightarrow N$

$\xrightarrow{f} X^k \subset BO(n)$

$\hat e \in \overset{\cup}{e}$



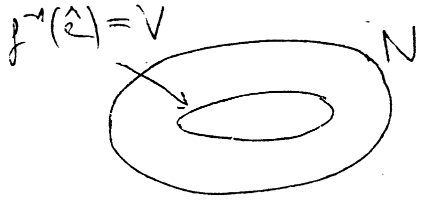
$i_M : M \hookrightarrow Q$

$i_N : N \hookrightarrow Q$

$\tau_M = F \circ i_M$

$f = F \circ i_N$

$(M \sim N \Rightarrow \forall\, w_I[N] = 0$ a Pontrjagin t. miatt$)$



$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, bend right, "\tilde{f}"'] & X^k \subset BO(n) \arrow[d, "p"] \\
 & \hat{e} \in S^k
\end{tikzcd}$$

$\hat{e} \in e^k \subset X^k$

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & x = e^k \\ 0 & x = \text{más cella} \end{cases}$$

Δ kociklus, a Lemma miatt tekinthető kohom osztálynak.

$\tilde{\Delta} \in H^k(S^k)$ generátor (~~Δ duálisa~~) $(\Delta = p^*(\tilde{\Delta}))$

$$\begin{aligned} j_*[V] &= \underbrace{\tilde{f}}^*(\tilde{\Delta}) \cap [N] \\ &= \underbrace{f^* p^*}(\tilde{\Delta}) \cap [N] \\ &= f^*(\Delta) \cap [N] \end{aligned}$$

$$w_I[V] = \langle (\tau_V)^* (\underset{\substack{\cap \\ H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2)}}{w_I}), [V] \rangle =$$

$w_1, \dots, w_n$-ből képzett szorzat

$$\left(w_i^*(V) = (\tau_V)^* w_i(\gamma^n) \right)$$

$= \langle (\tau_N)^*(w_I), j_*[V] \rangle$, mert

$$j^* \underbrace{\underbrace{(\tau_N)^*(w_I)}_{w_I(N)}}_{w_I(V)} \quad \text{mert } \nu(V \subset N) = \text{trivi.}$$

$$j^*(\tau_N)^*(w_I) = w_I(TN|_V) = w_I(TV \oplus \varepsilon^k)$$

$$w_I[V] = \langle (\tau_N)^*(w_I), f^*(\Delta) \cap [N] \rangle =$$

$$= \langle \underbrace{(\tau_N)^*(w_I)}_{\| \leftarrow \nu(N \subset Q) \text{ trivi}} \cup f^*(\Delta), [N] \rangle =$$

$$= \langle \overbrace{(i_N)^*(\tau_Q)^*(w_I)} \cup i_N^* F^*(\Delta), [N] \rangle =$$

$$= \langle \qquad , \underbrace{(i_N)_*[N]}_{= (i_M)_*[M]} \rangle =$$

Q homológia tétele $\rightarrow$

$$= \langle (i_M)^*\big((\tau_Q)^*(w_I) \cup F^*(\Delta)\big), [M] \rangle =$$

$$= \langle (\tau_M)^*(w_I) \cup (\tau_M)^*(\Delta), [M] \rangle =$$

$\uparrow$

$\tau_M = i_M \circ \tau_Q$

$$= \langle w_I \cup \Delta, \underbrace{(\tau_M)_*[M]}_{=0} \rangle$$

$\tau_M : M \to BO(n)$

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n]$$

$$H^n(\qquad) = \{w_I \mid |I| = n\}$$

Feltétel: $\forall\ (\tau_M)^*(w_I) = 0$

$\Leftrightarrow\ 0 = \langle (\tau_M)^*(w_I), [M] \rangle = \langle w_I, (\tau_M)_*[M] \rangle$

$\forall I$-ra $\Leftrightarrow (\tau_M)_*[M] = 0.$ □

21. előadás

HF. 1) a) $\mathbb{CP}^{2k}$ nem 0-kobord. ir. ért.-ben

b) $N \cdot \mathbb{CP}^{2k}$ —||—
← diszj. unió

2) $\mathbb{CP}^{2k+1}$ 0-kobord. ir. ált.

3.) $\mathbb{CP}^{2k}$-n $\nexists$ ir. váltó diffeom

Chern oszt., Pontrj. oszt., Egz. gömbök

1) Chern-oszt. ax.-i: $\xi \xrightarrow{\mathbb{C}^n} B$

1.) $c_i \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ $i=0,\dots,n$
$\overset{\shortparallel}{c_i(\xi)}$
$c_0(\xi)=1$

2) Természetes:

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mathbb{C}^n"] & \eta \arrow[d, "\mathbb{C}^n"] \\ B_1 \arrow[r, "\overline{\Phi}"] & B_2 \end{tikzcd}$$

Φ $\mathbb{C}$-lin

$$\overline{\Phi}^* c_i(\eta) = c_i(\xi)$$

3.) $c(\xi) = \sum_{i=0}^{n} c_i(\xi)$

Whitney összeg formula: $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cup c(\eta)$

4.) $c_1\left(\gamma^1_{\mathbb{C}}\big|_{\mathbb{CP}^1}\right) = y \in H^2(\mathbb{CP}^1;\mathbb{Z})$
↑ pozitív generátor

Megj. 1) Ezek egyért. meghat. a Chern-osztályokat.

Biz Felhasítási lemma. □

2) Konstrukció:

$$H^*(\underset{\uparrow}{\mathbb{CP}}(\xi);\mathbb{Z}) = H^*(B)\langle 1, a_\xi^1, \dots, a_\xi^{n-1}\rangle$$

komplex projektivizált ← Leray-Hirsch

→ $a_\xi \in H^2(\mathbb{CP}(\xi);\mathbb{Z})$

a $\mathbb{CP}(\xi)$-hez tart. vonalnyalábot klasszifikálja:

$$\ell \in \mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(X) = [X, \mathbb{CP}^\infty] = [X, K(\mathbb{Z},2)]$$
$$\updownarrow$$
$$c_1(\ell) \in H^2(X;\mathbb{Z})$$

$\xi = l_1 \oplus \dots \oplus l_n$

$c(\xi) = \underbrace{(1+\overbrace{c_1(l_1)}^{y_1})}_{c(l_1)} \cdot \ldots \cdot (1+\overbrace{c_1(l_n)}^{y_n})$ $\qquad c_i = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elemi szimm. pol.}}}{\sigma_i}(y_1, \dots, y_n)$

Ezután splitting lemmával tetsz. nyalábra.

Elég az univ. nyaláb Chern-osztályait megadni (utána természetességgel kiterj. ∀ nyalábra).

$\mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty \xrightarrow{\vartheta} BU(n)$

$H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Künneth}}}{=} \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n] \longleftarrow H^*(BU(n);\mathbb{Z})$

$y_i \in H^2(\,;\mathbb{Z})$

$\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n \longleftarrow c_1, \dots, c_n$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty \arrow[r, "\vartheta"] & BU(n) \end{tikzcd}$$

Kör. $H^*(BU(n);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$

Új változók elemi szimm. pol.-i.

Megj. $c_n(\xi) = e(\xi)$

Biz. Analóg $w_{top}(\xi) = U_\xi^{\mathbb{Z}_2}\big|_B$

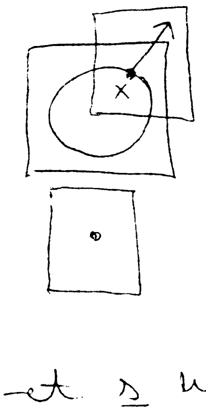
Gysin sorozat: $S(\xi) \xrightarrow{\pi_0} B$ (ξ mint $\overset{\text{valós } 2n\text{-dis}}{\text{ir. nyaláb}}$)

$H^i(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup e(\xi)} H^{i+2n}(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+2n}(S(\xi);\mathbb{Z}) \longrightarrow$

$\longrightarrow H^{i+1}(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup e(\xi)}$

$$\begin{tikzcd} \varepsilon^1 \oplus \eta = \pi_0^* \xi \arrow[d] \arrow[r] & \xi \arrow[d] \\ S(\xi) \arrow[u, bend left, "s \neq 0 \text{ szelés}"] \arrow[r, "\pi_0"] & B \end{tikzcd}$$

$S(\xi) \ni x$



$s(x) = x$

η $(n-1)$-nyaláb $\qquad$ (ε^1-et $\underline{s}$ határozza meg)

$c_{n-1}(\eta) = e(\eta)$ $\qquad c_{n-1}(\eta) \in H^{2n-2}(S(\xi))$

Gysin-sorozat $i=-2$ esetén:

π_0^* izom: $H^{2n-2}(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\approx} H^{2n-2}(S(\xi);\mathbb{Z})$

$$c_{n-1}(\xi) \overset{def}{=} (\pi_0^*)^{-1}(c_{n-1}(\eta))$$

$\uparrow$ ez már definiált $(c_{n-1}(\eta) = e(\eta))$

Ezt iterálva $\forall\, c_i(\xi)$-t def.-hatjuk.

S-W oszt.-nak is léteznek hasonló def-juk:

1.) $w_{top}(\xi) = U_{\xi}^{\mathbb{Z}_2}|_B$

2.) Gysin-sorozat

$$H^i(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{i+n}(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(S(\xi);\mathbb{Z}_2) \to$$
$$\to H^{i+1}(B;\mathbb{Z}_2)$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_0^*\xi = \varepsilon^1 \oplus \eta^{n-1} \arrow[d] & \xi \arrow[d] \\
S(\xi) \arrow[r, "\pi_0"] & B
\end{tikzcd}$$

$i=-1$ esetén $H^i(B;\mathbb{Z}_2)=0$, de $H^{i+1}(B;\mathbb{Z}_2) = \underset{\neq 0}{H^0(B;\mathbb{Z}_2)}$!

$$\overset{\overset{0}{\|}}{H^{-1}}(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{n-1}(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{n-1}(S(\xi);\mathbb{Z}_2) \to$$
$$\to H^0(B;\mathbb{Z}_2)$$

π_0^* nem felt. izo.

HF <u>Áll</u> $w_{top}(\xi) \neq 0 \Rightarrow \pi_0^*$ izo.

Tehát ekkor def-ható $w_{n-1}(\xi)$ mint előbb.

HF <u>Megj.</u> Az univ. nyalábra γ^n-re $w_n(\gamma^n) \neq 0$.

Tehát itt def-ható $w_{n-1}(\gamma^n)$.

Gysin-sorozat természetessége $\Rightarrow w_{n-1}(\eta) \in \operatorname{im} \pi_0^*$.

<u>Áll</u> $c_k(\omega) = (-1)^k c_k(\overline{\omega})$, ahol ω komplex nyaláb

$\nwarrow$ konjugált nyaláb (az i-vel szorzás operátorát (-1)-gyel szorozzuk)

<u>Biz</u> Splitting lemma:

Vonalnyalábra $c_1(\ell) = e(\ell) \underset{\Uparrow}{=} -e(\bar{\ell}) = -c_1(\bar{\ell})$

$$U_{-\xi} = -U_\xi$$

$\omega = \ell_1 \oplus \dots \oplus \ell_n$ $\quad (1+y_1)\cdot\ldots\cdot(1+y_n) = c(\omega)$

$\bar{\omega} = \bar{\ell}_1 \oplus \dots \oplus \bar{\ell}_n$ $\quad (1-y_1)\cdot\ldots\cdot(1-y_n) = c(\bar{\omega})$ □

Def Pontrjagin osztályok:

$$\xi \xrightarrow{\mathbb{R}^n} B$$

$$p_i(\xi) \overset{def}{=} (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C})$$

Def $\xi \otimes \mathbb{C} = \underset{(x,y)}{\xi \oplus \xi}$, $I(x,y) = (-y,x)$

↑ i-vel szorzás op-a

Megj. $\overline{\xi \otimes \mathbb{C}} \approx \xi \otimes \mathbb{C}$ HF

⌜ $c_1(\overline{\gamma^1_{\mathbb{C}}}) = -c_1(\gamma^1_{\mathbb{C}})$, $c_1(\gamma^1_{\mathbb{C}}) = y \neq 0 \Rightarrow \overline{\gamma^1_{\mathbb{C}}} \not\approx \gamma^1_{\mathbb{C}}$

↑ komplex izo.

$S^3 \to S^2 \qquad \eta \xrightarrow{\mathbb{C}} S^2 = \mathbb{C}P^1$ ⌟

Köv. $2c_{2i+1}(\xi \otimes \mathbb{C}) = 0$

Köv. $2\big(p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)\big) = 0$

$p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + p_2(\xi) + \dots \qquad p_i(\xi) \in H^{4i}(B;\mathbb{Z})$

Biz. $(\xi \oplus \eta) \oplus (\xi \oplus \eta) \approx (\xi \oplus \xi) \oplus (\eta \oplus \eta)$

$(\xi \oplus \eta) \otimes \mathbb{C} \approx (\xi \otimes \mathbb{C}) \oplus (\eta \otimes \mathbb{C})$

Chern oszt. 3. ax. + előző köv. □

7. Áll. $\omega_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \approx \omega \oplus \bar{\omega}$

↑ elhagyjuk ω-ról a komplex struktúrát

Biz. $\omega_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \omega^+ \oplus \omega^-$

$\underset{(x,y)}{\omega_{\mathbb{R}} \oplus \omega_{\mathbb{R}}} \qquad \overset{\|}{\{(z,iz)\}} \quad \overset{\|}{\{(z,-iz)\}}$

$$\begin{tikzcd} \omega^+ = \{(z, iz)\} & & \omega^- \ni (z, -iz) \\ \omega \ni z \arrow[u, "{(z,iz)}"] & & \omega \ni z \arrow[u] \end{tikzcd}$$

azonosítás α

$I(\omega^+) = \omega^+$ $\qquad I|_{\omega^+} \xleftrightarrow{\alpha} (-i)|_\omega$

$I(\omega^-) = \omega^-$

$(I(x,y) = (-y, x))$

$$\begin{tikzcd} \overset{\omega^+}{\overset{\cup}{(z, iz)}} \arrow[r, "I"] & (-iz, z) \\ \omega \ni z \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, mapsto, "-i"] & -iz \in \omega \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Tehát $\omega^+ = \overline{\omega}$, $\omega^- = \omega$. □

8.) $p(\mathbb{C}P^n) = (1 + y^2)^{n+1}$ $\qquad y \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ gen

$y = c_1(\overline{\gamma^1_{\mathbb{C}}})$

L $\quad T\mathbb{C}P^n \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triv komplex} \\ \text{1-nyaláb}}}{\varepsilon^1} \cong HOM(\gamma^1|_{\mathbb{C}P^n}, \varepsilon^{n+1})$

Biz mint valósban $\Uparrow$

$T\mathbb{C}P^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tavalyról}}}{=} HOM(\gamma^1|_{\mathbb{C}P^n}, (\gamma^1|_{\mathbb{C}P^n})^\perp)$ □

Köv. $T\mathbb{C}P^n \oplus \varepsilon^1 = (n+1)\overline{\gamma^1}|_{\mathbb{C}P^n}$

$$\overset{\|}{HOM(\gamma^1|_{\mathbb{C}P^n}, \varepsilon^1)}$$

Á.t. $\xi \xrightarrow{\mathbb{C}^n} B \qquad HOM(\xi, \varepsilon^1) = \overline{\xi}$

Biz $\exists$ hermitikus metrika $\qquad (u, v)$

$v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komplex antilin}}}{\longmapsto} \langle \ , v \rangle$ □

$$c(\mathbb{C}P^n) = (1+y)^{n+1}$$

$\| \text{def}$

$c(T\mathbb{C}P^n)$

$$p(\mathbb{C}P^n) \overset{\text{def}}{=} p(T\mathbb{C}P^n)$$

$$p_i(\mathbb{C}P^n) = (-1)^i c_{2i}\Big(\underbrace{T\mathbb{C}P^n \otimes \mathbb{C}}_{T\mathbb{C}P^n \oplus \overline{T\mathbb{C}P^n}\ \cancel{\oplus}}\Big)$$

$$c\left(T\mathbb{C}P^n \oplus \overline{T\mathbb{C}P^n}\right) = (1+y)^{n+1} \cdot (1-y)^{n+1} = (1-y^2)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad p(\mathbb{C}P^n) = (1+y^2)^{n+1}$$ □

Áll. A Pontrjagin számok irányított kobord. invariánsok.

Def M^{4k} irányított sok., $I=\{i_1,\dots,i_r\}$: $\sum_{j=1}^{r} i_j = k$

$$p_I(M) = p_{i_1}(M) \cup \dots \cup p_{i_r}(M)$$

$$p_I[M] = \langle p_I(M), [M] \rangle .$$

Biz. Áll. ld. S-W. osztályoknál. □

22. előadás

$$p(\mathbb{C}P^n) = (1+y^2)^{n+1}$$

Szignatúra formula (Hirzebruch)
(4-dimenzióban Rohlin)

$$\sigma(M^8) = \frac{7p_2[M^8] - p_1^2[M^8]}{45}$$

↑ zárt, ir.

Tétel (Biz majd) a) rk $\Omega_8 = 2$ ← ir. kobord. csop.

b) $\Omega_* \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\big[[\mathbb{C}P^2], [\mathbb{C}P^4], [\mathbb{C}P^6], \dots\big]$

↑ Gradált gyűrű az összes kobord. osztályból:

$$[M^n] + [N^n] = [M \amalg N]$$

$$[M^n] \times [N^k] = [M^n \times N^k]$$

b) $\Rightarrow$ a): $[\mathbb{C}P^2] \times [\mathbb{C}P^2]$, $[\mathbb{C}P^4]$

Megj. $\Omega_8 \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (nincs torzió)
↳ ha van, csak másodrendű le-

int (2 tavaly).

Biz (Szign form)

p_1^2, p_2 lin. fken homom.-t adnak $\Omega_8 \longrightarrow \mathbb{Z}$:

$$[M^8] \in \Omega_8 \longmapsto \begin{array}{l} p_1^2[M^8] \in \mathbb{Z} \\ p_2[M^8] \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$\sigma : \Omega_8 \longrightarrow \mathbb{Z}$ homom. de $\Omega_8 = 2 \Rightarrow$ kifejezhető p_1^2, p_2 által. Együtthatók: $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$-re és $\mathbb{CP}^4$-re felírjuk a szign formulát ismeretlen együtthatókkal

$\mathbb{CP}^4$:
$$p(\mathbb{CP}^4) = (1+y^2)^5 = 1 + \underbrace{5y^2}_{p_1} + \underbrace{10y^4}_{p_2}$$
$$y \in H^2(\mathbb{CP}^4; \mathbb{Z})$$

$p_2[\mathbb{CP}^4] = 10$
$p_1^2[\mathbb{CP}^4] = 25$

$\mathbb{CP}^2$: $\quad p(\mathbb{CP}^2) = (1+y^2)^3 = 1 + 3y^2$

$\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$: $\quad p(\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2) \underset{\uparrow}{=} p(\mathbb{CP}^2) \times p(\mathbb{CP}^2) =$

$H^*(\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2; \mathbb{Z})$-ben nincs másodrendű elem, de ha volna, akkor $\langle \ , [M] \rangle$-nél eltűnne

$$= (1+3y^2) \times (1+3y^2) = 1 \times 1 + \underbrace{3y^2 \times 1 + 1 \times 3y^2}_{p_1} + \underbrace{9\, y^2 \times y^2}_{p_2}$$

$p_2[\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2] = 9$

$$p_1^2[\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2] = \underset{\overset{\shortparallel}{\cancel{9y^4 \times 1} + \cancel{1 \times 9y^4} + 2(3y^2 \times 3y^2)}}{(3y^2 \times 1 + 1 \times 3y^2)^2}[\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2] = 18$$

$9y^4 \times 1 = 0$

nincs előjel, mert ps. dim-ak

	$\mathbb{CP}^4$	$\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$
p_2	10	9
p_1^2	25	18

det $= -45$

det $\neq 0$ $\Rightarrow$ 1) $[\mathbb{C}P^4]$, $[\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2]$ ftlenek $\mathbb{Q}$ fölött

2) p_2, p_1^2 ftlen homomorfizmusok.

$\exists \alpha, \beta$:

$$\sigma(M^8) = \alpha\, p_2[M^8] + \beta\, p_1^2[M^8] \quad \forall M^8 \text{ ir.}$$

$$M^8 = \mathbb{C}P^4, \ \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$$

$$\sigma(\mathbb{C}P^4) = 1$$

$$\underset{H^4}{\overset{}{(x}},\underset{H^4}{y)} \longmapsto \langle x \cup y, [M^8] \rangle$$

$H^4(\mathbb{C}P^4; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = \langle y^2 \rangle$, a keresett mtx: (1)

$\sigma(\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2) = 1$ (σ gyűrűhomom. is)

$H^*(\mathbb{C}P^2) = \mathbb{Z}[y]/_{y^3=0}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}[y_1, y_2]/_{y_1^3=0,\, y_2^3=0}$

y_1^2, y_2^2, $y_1 y_2$ $\qquad$ $y_1 = y \times 1$, $y_2 = 1 \times y$

$y^2 \times 1$, $1 \times y^2$, $y \times y$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & y^2\times 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1\times y^2 \\ 0 & 0 & 1 & y\times y \\ y^2 * 1 & 1\times y^2 & y\times y & \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 2xy \\ u^2 - v^2 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{7}{45}, \quad \beta = -\frac{1}{45}$$

<u>HF:</u> Rohlin tétele 4-dim-ban felhasználva, hogy $\Omega_4 = \mathbb{Z}$.

<u>Tétel.</u> $\exists$ 7-dim egz gömb. (Milnor, 1956.)

azaz $\exists$ Σ^7 zárt 1-öf sokr., melyre Σ^7 homeom. S^7-tel, de nem diffeomorf.

<u>Biz</u> $\measuredangle$ $\exists$ $\xi^4 \xrightarrow{\mathbb{R}^4} S^4$. ($S^4$ 1-öf, 1-öf fölött $\forall$ nyaláb

ir.-ható $\Rightarrow \exists\, e(\xi))$ $\quad e(\xi^4) = u$ (= gener.)

$$p(\xi^4) = 6u$$

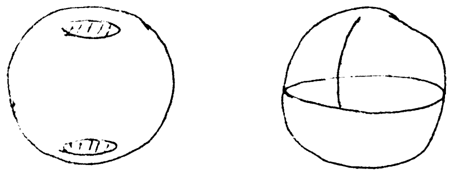
$\underline{\alpha} \Rightarrow \underline{I}$.

<u>Áll.</u> $S(\xi^4)$ egz. gömb.

a) $S(\xi^4)$ homeom S^7

b) $S(\xi^4)$ nem diffeom. S^7.

a) Elég: $S(\xi^4) \simeq S^7$ (Smale t. szerint $n \geq 5$-re n-dim homot. gömb homeom. S^n)



(h-kobord tétel)

Whitehead t. szerint elég:

$\exists f : S^7 \longrightarrow S(\xi^4)$: f_*^π izom

$+ S(\xi^4)$ 1-öf

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\overset{\swarrow \text{fibrum}}{S^3}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \underbrace{\pi_1(S(\xi^4))} \arrow[r] & \pi_1(S^4) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r, Rightarrow] & 0 & 0 \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Gysin $\Rightarrow H^*(S(\xi^4)) \approx H^*(S^7)$

$e(\xi^4) = u$

$$H^i(S^4) \xrightarrow{\cup u} H^{i+4}(S^4) \longrightarrow H^{i+4}(S(\xi^4)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{i+1}(S^4) \xrightarrow{\cup u} H^{i+5}(S^4) \longrightarrow \dots$$

$i = 0$: $\cup u : H^0(S^4) \to H^4(S^4)$ izo. , $H^1(S^4) = 0$

$\Rightarrow H^4(S^4) \xrightarrow{0} H^4(S(\xi^4)) \quad 0$

$\Rightarrow H^4(S(\xi^4)) = 0.$

$i = -1 \Rightarrow H^3(S(\xi^4)) = 0$

$i = 3 \Rightarrow H^7(S(\xi^4)) = \mathbb{Z}$ (persze $S(\xi^4)$ 7-sokaság)

$H^*(S(\xi^4)) \approx H^*(S^7)$

$H_*(S(\xi^4)) \approx H_*(S^7)$

Hurewicz t. ⇒ $\pi_7(S(\xi)) \approx H_7(S(\xi)) = \mathbb{Z}$

$S^7 \xrightarrow{f} S(\xi)$ gener. $\uparrow$ f_* izom ∀ homot. csop.
∀ homol. csop.

⇒ f homot. ekv. ⇒ $S^7 \simeq S(\xi)$.

Tehát $S(\xi^4)$ homeomorf S^7-tel

b) Nem diffeom

Tfh diffeo. $M^8 = D(\xi^4) \cup D^8$ ← diffható csk.
$S(\xi^4) \approx S^7$

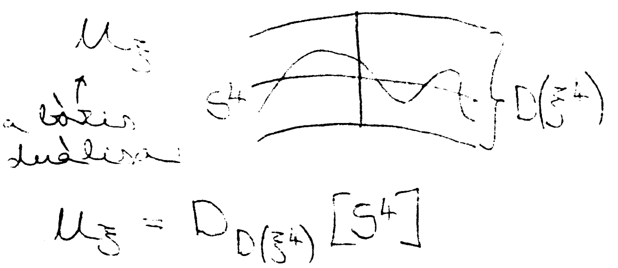
$$\sigma(M^8) = \frac{7p_2[M^8] - p_1^2[M^8]}{45}.$$

$H^*(M^8) = ?$

$M^8 \cong T\xi^4$ (az odaragasztott D^8-at pontra húzzuk)

$$H^i(M^8) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 4, 8 \\ 0 & i \neq \dots \end{cases}$$

Thom-izom. t. miatt (red. kohom.! ezért jön be a 0)



$U_\xi = D_{D(\xi^4)}[S^4]$

$\varphi: H^i(B) \longrightarrow H^{i+4}(T\xi)$

$x \longmapsto \pi^* x \cup U_\xi$

$H^0(S^4) \longrightarrow H^4(T\xi)$ ← gener

$1 \longmapsto 1 \cup U_\xi = U_\xi$

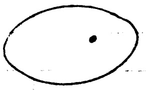
$U_\xi \cup U_\xi$: a bázist önmagára transzv-á toljuk és nézzük a metszéspontok számát. Ez éppen az Euler-osztály, ami $= u$, a generátor (1 db metszéspont)

⇒ $\sigma(M^8) = 1$ (1×1-es mtx.-ból).

$p_1[M^8] = ?$

$$\begin{tikzcd} H^4(M^8) \arrow[r, "\approx"] & H^4(D(\xi^4)) \\ & M^8 \setminus pt. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(D^8)



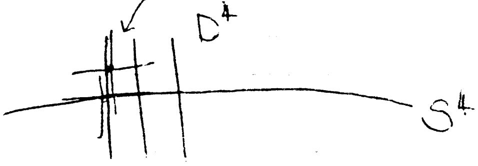
$$\overbrace{H^4(M^8, D(\xi^4))}^{S^8} \longrightarrow H^4(M^8) \xrightarrow[i^*]{\approx} H^4(D(\xi^4)) \longrightarrow$$

megszorítás

$$\longrightarrow \underbrace{H^5(M^8, D(\xi^4))}_{M^8/D(\xi^4) = S^8} \qquad p_1(M^8) \longmapsto p_1(TD(\xi^4))$$

$$TD(\xi^4) = \pi^* \xi^4 \oplus \pi^* TS^4$$

$$\pi : D(\xi^4) \xrightarrow{D^4} S^4$$


az érintőtér felbomlik

$$p_1(TD(\xi^4)) = p_1(\pi^* \xi^4) + p_1(\pi^* TS^4)$$

$$p(\alpha \oplus \beta) = \underbrace{(1 + p_1 + p_2 + \dots)}_{p(\alpha)} \underbrace{(1 + p_1' + \dots)}_{p(\beta)} = 1 + p_1 + p_1' + \dots$$

nincsenek másodrendű tagok

$$p_1(\pi^* TS^4) = 0$$, mert S^4 stabilan parallelizálható (stabilan triv.)

$$\pi^* p_1(\xi^4) = \pi^* 6u$$

$$\Rightarrow p_1(TD(\xi^4)) = \pi^* 6u \quad \Rightarrow p_1(M^8) = 6 \cdot \text{gener.}$$

u_ξ

$$p_1^2[M^8] = 36 \qquad (u_\xi \cup u_\xi = 1)$$

$$1 = \sigma(M^8) = \frac{7 p_2[M^8] - 36}{45}$$, nincs ilyen $p_2[M^8]$ $\lightning$. $\square$

(Tehát M^8 nem látható el sima struktúrával)

M^8 top. sok., nem látható el diffható struktúrával.

$\Theta_7 = \mathbb{Z}_{28}$ ← 7-dis egy gömbök az öf. unióval,
↳ homeom, de nem diffeom S^7-tel

0-elem a standard S^7.

Biz.:
$$e(TS^4) = 2\cdot u$$
$$p_1(TS^4) = 0$$

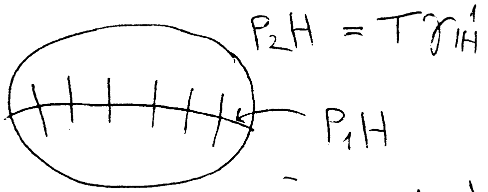
$\gamma^1_{\mathbb{H}} \longrightarrow S^4 = P_1\mathbb{H}$ ($\mathbb{H}^2$-ben az egyenesek kanon. kvaternióvonalából)

$e(\gamma_{\mathbb{H}}) = u$

$S(\gamma^1_{\mathbb{H}}) = S^7$ (Hopf-fibr.) $\longrightarrow P_1\mathbb{H} = S^4$

Gysin $\Rightarrow$ $e(\gamma^1_{\mathbb{H}}) = \pm u \leftarrow$ gener.

$P_2H \supset P_1H$:



Önmetszés poz., mert komplex sokaságok mindig +1 metszési indexűek (kvaternió spec. komplex): pl. két bázissal

23. előadás

<u>Á</u> $\exists\, \xi^4 \xrightarrow{\mathbb{R}^4} S^4$ $\quad e(\xi^4) = u$ (= generátor) $\quad$ (J. lsd $\Big\} \Rightarrow S(\xi^4)$ egz gömb)

$p_1(\xi^4) = 6u$

<u>Biz</u> $e(TS^4) = 2u \qquad p_1(TS^4) = 0$

$e(\gamma^1_{\mathbb{H}}) = u \qquad p_1(\gamma^1_{\mathbb{H}}) \overset{?}{=} -2u$

$$p_1(\gamma^1_{\mathbb{H}}) = -c_2\left((\gamma^1_{\mathbb{H}})_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}\right) = -c_2\left((\gamma^1_{\mathbb{H}})_{\mathbb{C}} \oplus \overline{(\gamma^1_{\mathbb{H}})_{\mathbb{C}}}\right) = -2u$$

$$\omega \otimes \mathbb{C} \approx \omega \oplus \overline{\omega}$$

$e(\gamma^1_{\mathbb{H}}) = c_2(\gamma^1_{\mathbb{H}}) = u \qquad c_i(\overline{\omega}) = (-1)^i c_i(\omega)$

$c(\gamma^1_{\mathbb{H}}) = 1+u \qquad c(\overline{\gamma^1_{\mathbb{H}}}) = 1+u \qquad \left(c_1(\gamma^1_{\mathbb{H}}) \in H^2(S^4) = 0\right)$

$$c\left(\gamma^1_{\mathbb{H}} \oplus \overline{\gamma^1_{\mathbb{H}}}\right) = 1 + \underbrace{2u}_{c_2}$$

$$\mathrm{Vect}_4(S^4) = \pi_4(BSO(4))$$

$$\begin{tikzcd} {[f] \in \pi_4(BSO(4))} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\substack{\text{Hurewicz} \\ \text{homom}}"'] & \mathbb{Z} \\ H_4(BSO(4)) \arrow[ur, "{\langle e, \rangle}"'] & \end{tikzcd}$$

homom.

$f_*[S^4] \in H_4(BSO(4))$

η nyaláb $\longmapsto \langle e(\eta), [S^4] \rangle =$

$= \langle e(f^*\gamma^4), [S^4] \rangle =$

$= \langle e(\gamma^4), f_*[S^4] \rangle$

$\pi_i(X) \longrightarrow H_i(X)$ $\boxed{f \mid g}$ Hurewicz homom

$p_1, e: \pi_4(BSO(4)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ két homom.

$$\overset{\Psi}{f_\tau} \quad \overset{\Psi}{f_\gamma} \qquad \gamma = \gamma_{\mathbb{H}}^1, \ \tau = TS^4$$

$\xi = x f_\tau + y f_\gamma$ értelmes, ahol $x, y \in \mathbb{Z}$

↖ nyaláb

$$\left.\begin{array}{l} e(\xi) = 1 \\ p_1(\xi) = 6 \end{array}\right\} \rightsquigarrow$$ egyenletrsz x, y-ra

megoldható $\mathbb{Z}$-ben: $x = 2, y = -3$ □

<u>Chern-oszt. def.-ja</u>

$$H^*(\mathbb{CP}(\xi); \mathbb{Z}) = H^*(B)\langle 1, a_\xi^1, \ldots, a_\xi^{n-1} \rangle$$

$$\xi \xrightarrow{\mathbb{C}^n} B \qquad a_\xi$$

$$\mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(X) = [X, \underset{\overset{\|}{K(\mathbb{Z},2)}}{\mathbb{CP}^\infty}] = H^2(X; \mathbb{Z})$$ ↙ vonalnyaláb esetén c_1 a $\mathbb{CP}(\xi)$-nek ott megfelelő kohom osztály

$$a_\xi^n - c_1(\xi) a_\xi^{n-1} + c_2(\xi) a_\xi^{n-2} - \ldots \pm c_n(\xi) = 0$$

(előjelek: $a_\xi - c_1(\xi) = 0$, hiszen $\gamma_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{CP}(\gamma_{\mathbb{C}}^1)$

$\Rightarrow a_\xi$ a $\gamma_{\mathbb{C}}^1$-nek felel meg)

<u>HF megj.</u> $e(\xi) = 0$, de $\nexists$ szelés:

$$\pi_4(\underbrace{SO(3)}_{\mathbb{RP}^3}) = \mathbb{Z}_2$$

$S^3 \longrightarrow \mathbb{RP}^3$ 2-rétű fedés $\Rightarrow \pi_4$-ben izo.

$[f] \in \pi_4(SO(3)) = \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$.

A $\mathbb{Z}_2$ nemtriv. $[f]$ elemével ragasztva S^5 két félgömbjét kapunk egy nem triv. $\xi^3 \to S^5$ nyalábot.

$H^3(S^5) = 0 \Rightarrow e(\xi^3) = 0$.

Tfh $\xi^3 = \eta^2 \oplus \varepsilon^1$ esetén az

$[f]$ rag. leképez. $\in \mathrm{im}(\overbrace{\pi_4(SO(2))}^{0} \longrightarrow \pi_4(SO(3))) = 0$

volna $\left(SO(2)=S^1 \Rightarrow \pi_4(SO(2))=0\right)$. □

S-W oszt-ok mint obstrukciók

Eml: $\pi_i(V_k(\mathbb{R}^n)) = 0 \quad i<n-k$

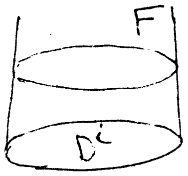
$= \mathbb{Z} \quad i=n-k$ ps. vagy $k=1$

$= \mathbb{Z}_2 \quad n-k$ ptlan és $k\neq 1$

$$\xi \xrightarrow{\mathbb{R}^n} B \quad \rightsquigarrow \quad V_k(\xi) \xrightarrow{V_k(\mathbb{R}^n)} B$$

↑ ennek egy szelése k flen szelése ξ-nek

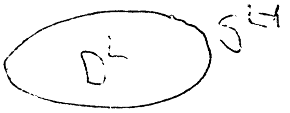
sk$_{n-k}$(B) fölött ∃ szelése a $V_k(\xi)$-nek (cellánként terjesztjük ki)



$$\begin{tikzcd} S^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & F \\ D^i \arrow[ru] & \end{tikzcd}$$

∃ szelése sk$_{n-k+1}$ B fölött $\Longleftrightarrow$ $\sigma' \in H^{n-k+1}(B, \pi_{n-k}(V_k(\mathbb{R}^n)))$ obstrukcióra $\sigma'=0$.

↑ csavart együtthatós kohomol.



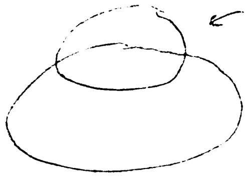
$S^{i-1}\to F$ már adott

$\pi_{i-1}(F)$-beli elem ∀ D^i cellához,

ez egy kólánc, sőt kociklus (l. tavaly),

ennek tek. a kohom. osztályát.

Ez helyes, ha ξ ir.



← itt direktszorzatra bontjuk a nyalábot, de lehet, hogy körbeérve nem ugyanazt a felbontást kapjuk

$(\pi_1(B)$ hat $\pi_i(F)$-en$)$

Def Itt a csavart együtth. kohom a köv.-t jelentik:

$$\begin{tikzcd} \tilde{B} \arrow[r, "2"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & B \\ S(\Lambda^n\xi^n) \arrow[ru, "S^0"] & \end{tikzcd} \qquad \Lambda^n\xi^n \xrightarrow{\overbrace{\Lambda^n\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^1}} B$$

$\mathrm{Hom}(C_*(\tilde{B}), \mathbb{Z})$

$\Delta \in B$ <u>kis</u> szimplex $\longmapsto$ $\tilde{B}$-ban 2 db szimplex

(ha $\tilde{B}$ szimplexpárjaihoz uazt. rendeljük: megad B-beli koláncot)

$\tilde{B}$-on, így $C_*(\tilde{B})$-on $\mathbb{Z}_2$-hatás

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ekvivariáns}}}{\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}_2}}(C_*(\tilde{B}), \mathbb{Z}) = C^*(B; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{csavart együtth}}}{\mathbb{Z}})$$ kolánc kompl

$$\{\alpha \mid \alpha(T\sigma) = -\alpha(\sigma)\}$$

$T: \tilde{B} \to \tilde{B}$ involúció

$T: C_*(\tilde{B}) \to C_*(\tilde{B})$

$$H^*(C^*(B;\mathbb{Z}), \delta) = H^*(B; \mathbb{Z})$$

$\tilde{B} \to B$ fedéshez tartozó csavart együtth kohomol.

Tek. $\pi_{n-k}(V_k(\mathbb{R}^n)) \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2$ epimorfizmust.

$$\sigma = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a kohomol-on indukált lek.}}}{g_*}(\sigma') \in H^{n-k+1}(B; \mathbb{Z}_2)$$

<u>Áll</u> $\sigma = w_{n-k+1}(\xi)$

<u>Biz</u> Obstr. természetes: $\sigma(f^*\xi') = f^*\sigma(\xi')$

w is természetes

$\Rightarrow$ Elég belátni az univ. nyalábra.

$$\sigma(\gamma^n) \in H^{n-k+1}(BO(n); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n]\big|_{n-k+1}$$

$$\sigma(\gamma^n) = \underset{\substack{\uparrow \\ (n-k+1)\text{-edfokú homog. pol.}}}{g}(w_1, \dots, w_{n-k+1}) = g'(w_1, \dots, w_{n-k}) + \lambda w_{n-k+1}$$

$\lambda = 0$ vagy $1 \in \mathbb{Z}_2$

$$\begin{tikzcd} \gamma^{n-k} \oplus \varepsilon^k \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^n \arrow[d] \\ BO(n-k) \arrow[r] & BO(n) \end{tikzcd}$$

indukált lek.

$$\sigma(\gamma^{n-k} \oplus \varepsilon^k) = 0 = g(w_1, \dots, w_{n-k})$$

$\exists$ k ftlen szelés

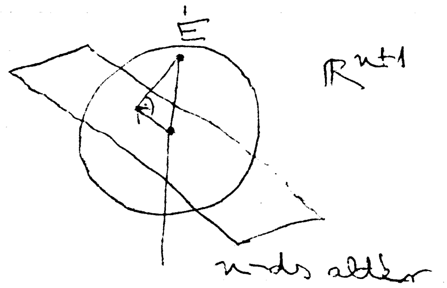
$w_{n-k+1}(\gamma^{n-k}) = 0$

pol. $\underset{\Longrightarrow}{\text{gyűrű}}$ $g' = 0$.

a) $k=1$ esetén: γ^n Mutatunk egy nyalábot, ahol $\sigma \neq 0$ $(\Rightarrow \lambda = 1)$.

$$\xi^n = \gamma^n|_{G_n(\mathbb{R}^{n+1})}$$

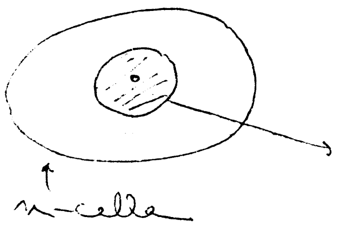
$$BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty) \supset G_n(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}P^n$$



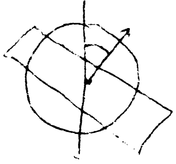
É vetülete az n-dS altérre: egy ⊥ szelése ξ^n-nek

A függőleges egyenes ∃ az $\mathbb{R}P^n$ egyetlen n-cellájának a belső pontja

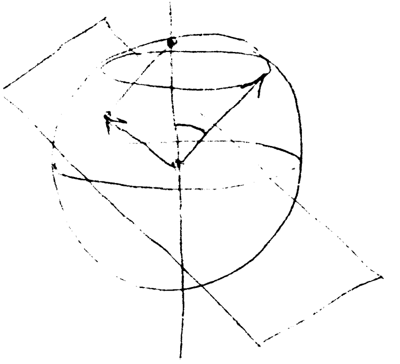
Az egyetlen n-cellán $\neq 0$ lesz az obstr. kolánc

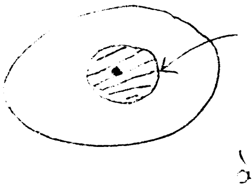


azon alterek, melyek a függőlegessel adott szöget zárnak be



A nem ~~függőleges~~ vízszintes normálvektorú síkokat levetítve a vízsz. síkra triviálizáljuk a nyalábot az n-cella fölött.





a gömb peremén végigfutva a szelés az ellentétes ponton fut végig.

$k=1 \Rightarrow V_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$.

egyéb k: Milnor-Stasheff

b) k tetsz.: $\xi^n = \gamma^{n-k+1} \oplus \varepsilon^{k-1}$

$$\downarrow$$

$$BO(n-k+1)$$

$\sigma = \sigma$ (γ^{n-k+1}-ben ∃ 1 db szelés)

HF befejezni.