$Z^r_{pq} = \operatorname{im}\left[j_* : h_{p+q}(X^p, X^{p-r}) \to h_{p+q}(X^p, X^{p-1})\right]$

Spectral sequence

Switzer Ch. 15.

$B^r_{pq} = \operatorname{im}\left[\Delta : h_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) \to h_{p+q}(X^p, X^{p-1})\right]$

$F_{pq} = \operatorname{im}\left[i_* : h_{p+q}(X^p) \to h_{p+q}(X)\right]$

$$\left.\begin{array}{l} Z^1_{pq} = h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\ B^1_{pq} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow E^1_{pq} = h_{p+q}(X^p, X^{p-1})$$

L: $0 = B^1_{pq} \subset B^2_{pq} \subset \dots \subset B^\infty_{pq} \subset Z^\infty_{pq} \subset \dots \subset Z^{r+1}_{pq} \subset Z^r_{pq} \subset \dots \subset Z^1_{pq} = h_{p+q}(X^p, X^{p-1})$

Def: $E^r_{pq} = Z^r_{pq} / B^r_{pq}$ $\qquad E^\infty_{pq}$

L: $Z^r_{pq} / Z^{r+1}_{pq} \cong B^{r+1}_{p-r, q+r-1} / B^r_{p-r, q+r-1}$

Proof:

$$\begin{tikzcd}
 & h_{p+q}(X^p, X^{p-r-1}) \arrow[d] \arrow[dr, "j_{1*}"] & \\
h_{p+q}(X^{p-1}, X^{p-r}) \arrow[r] \arrow[dr, "\Delta_1"'] & h_{p+q}(X^p, X^{p-r}) \arrow[r, "j_{2*}"'] \arrow[d, "\Delta_2"] & h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\
 & h_{p+q-1}(X^{p-r}, X^{p-r-1}) &
\end{tikzcd}$$

Def: $d^r : E^r_{pq} \to E^r_{p-r, q+r-1}$

$$\begin{tikzcd}
Z^r_{pq} / B^r_{pq} \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & Z^r_{pq} / Z^{r+1}_{pq} \cong B^{r+1}_{p-r, q+r-1} / B^r_{p-r, q+r-1} \arrow[r, tail] & Z^r_{p-r, q+r-1} / B^r_{p-r, q+r-1} \arrow[d, equal] \\
E^r_{pq} \arrow[rr, "d^r"] & & E^r_{p-r, q+r-1}
\end{tikzcd}$$

or: $\operatorname{Ker} d^r = Z^{r+1}_{pq} / B^r_{pq}$ $\qquad \operatorname{im} d^r = B^{r+1}_{p-r, q+r-1} / B^r_{p-r, q+r-1}$

$\Rightarrow \operatorname{im} d^r \subset \operatorname{Ker} d^r$ $\qquad \operatorname{Ker} d^r / \operatorname{im} d^r = Z^{r+1}_{pq} / B^{r+1}_{pq} = E^{r+1}_{pq}$

L: $\bar{F}_{pq} / \bar{F}_{p+1, q+1} \cong E^\infty_{pq}$ $\quad$ Proof

$$\begin{tikzcd}
 & h_{p+q+1}(X, X^p) \arrow[d] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
h_{p+q}(X^{p-1}) \arrow[r] \arrow[dr, "i_1"'] & h_{p+q}(X^p) \arrow[r] \arrow[d, "i_2"] & h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\
 & h_{p+q}(X) &
\end{tikzcd}$$

Szűcs 4. félév

1. előadás

HF

1.) $\pi_1(M^3) \neq \mathbb{Z}^4$

2.) a) M^n stab. paral $\Rightarrow$ M^n-en $\exists$ annyi vmező, mint S^n-en.

b) M^{2k} stab. paral és $\exists$ rajta vmező $\Rightarrow$ paral.

(Kell: Hopf t.) $[M^n, S^n] = \mathbb{Z}$ a deg miatt

3.) a)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] & * \text{ ← utak tere, ↙ kontrtér} \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] \\ BSO(n) \arrow[r, "w_2"'] & K(\mathbb{Z}_2,2) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ X 3-öf.

$(X = BSpin(n)$ ← SO(n) univ. fedése $)$

b) M^4 ir., $w_2(M^4) = 0$ $\Rightarrow$ M^4 majdnem paral

↑ $M^4 \setminus \{pt\}$ paral.

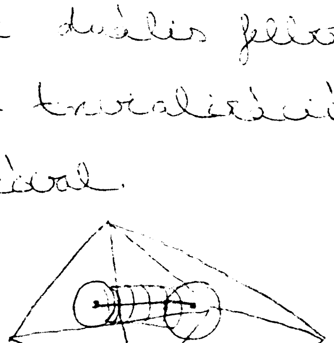
Tétel. M^3 irányított, zárt $\Rightarrow$ M^3 paral.

Köv $\forall\, M^3$ ir. $\hookrightarrow \mathbb{R}^4$

HF 4.) $\mathbb{R}P^3 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$ (Schweitzer volt)

Köv $\Omega_3 = 0$

Biz.: Elfogadjuk: M^3 triangulálható.
A duális felbontás cellái környezetén adjuk meg a trivializációt a cellák dim-ja szerinti indukcióval.



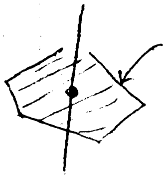
A duális flb. 1-vázának egy környezetében triv.-juk.
(A max dim cellák középpontjának környezetén egyértelmű a triv.)

$\gamma \in \pi_1(SO(3))$ $\quad \gamma \neq 0$ $\quad \gamma : [0,1] \to SO(3)$

1-cella felett 2-féle kiterjesztés (egy $\gamma \in \pi_1(SO(3))$)

elemmel megszorozhatjuk a trivializációt).

Felfújjuk: az eredeti triang. 1-vázának kis környezetének komplementumán van triviál.



(a duális 2-cellán van triviál, mert ő egy körlap, ennek a peremén összehasonlítva a megfelelő trivializációval kapunk $\pi_1(SO(3))$-beli elemet)

∀ e kettős-cellára a duális felb.-ban

$$\begin{tikzcd} e \arrow[d] \\ \sigma_e \in \pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2 \end{tikzcd}$$

$\hat{e}$ = e duális éle $\quad E = \{\hat{e} \mid \sigma_e \neq 0\}$

áll: E $\mathbb{Z}_2$-együtth. ciklus (gráf, melynek ∀ csúcs ps. ~~másod~~fokú)

Köv. 1.) az obstrukcióelméletből. (az asszo. SO(3)-nyalábnak keressük szelését)

$E \xrightarrow{F} B \qquad [\sigma] \in H^{i+1}(B; \pi_i(F))$

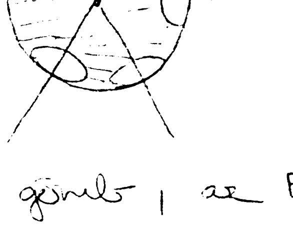
$\sigma \in C^{i+1}(B; \pi_i(F))$ kociklus (ennek duálisa az E)

Nálunk: $B = M^3$, $F = SO(3)$

$E = TM^3$-mal asszo. SO(3)-nyaláb

$i = 1$

2) Másik biz.:



E egy csúcs körüli gömb, az E éleinél kilyukasztjuk, a komplementumon van triviál:

$S^2 \setminus (D^2_1 \cup D^2_2 \cup \dots \cup D^2_k) \longrightarrow SO(3)$

$H_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ összesen nullhomológ ⇒ k ps.

(A glob. trivializációt összehasonlítva a $\overset{\text{cellákon levő}}{\text{lokálisakkal}}$ kapunk SO(3)-beli elemet).

Megj. Ha $E = \emptyset \Rightarrow$ Van trivial.

Mert: 2-váz körül megvan a trivial (duális fblb.)

$\pi_2(SO(3)) = 0$ (a 3-cellán van trivial, a peremen összehasonlítjuk őket).

Ha E 0-homológ $\Rightarrow$ Elérhető, hogy $E = \emptyset$

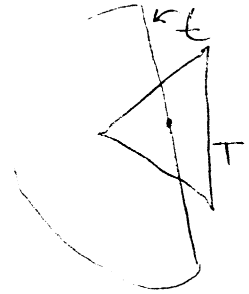
$\underbrace{T_1, \dots, T_n}$, $\partial(\cup T_i) = E$

az eredeti Δ-elés Δ-ei.

$\underline{L}$ T egy Δ az eredeti triang.

$t = \partial T$ t-n megváltó a $\pi_1(SO(3))$ nem triv. elemével a trivializációt.

E változása: $\neg(E \cap \partial T) = E_{új} \cap \partial T$



$t_1, \dots, t_n$-en megváltoztatva a $\pi_1(SO(3))$-beli elemet $E_{új} = \emptyset$.

Tfh E nem null-homológ. $\overset{\neq 0}{[E]} \in H_1(M^3, \mathbb{Z}_2)$

Áll PD $\Rightarrow \exists$ 2-dim beágyazott zárt felület M^3-ban, mely 1 pontban metszi E-t.

Biz áll PD: $\forall \underset{\neq 0}{x} \in H^k(M^n; \mathbb{Z}_2)\ \exists! y \in H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_2)$, melyre $x \cup y =$ gener. $\left(\begin{array}{l} PD(x) = x \cap [M] = e_1, \dots, e_t \in H_{n-k} \text{ bázis} \\ H^{n-k} = (H_{n-k})^* \text{ (test)},\ y(e_1) = 1,\ \langle y, e_i \rangle = 0,\ i > 1 \end{array}\right)$

Kell: $\forall \alpha$ 2-dim $\mathbb{Z}_2$-együtth. homol. osztály M^3-ban-nal beágyazott felülettel

$$D\alpha : M^3 \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty \supset \overset{\text{im } D\alpha \ \cap}{\mathbb{R}P^N} \supset \mathbb{R}P^{N-1}$$

$(D\alpha)^{-1}(\mathbb{R}P^{N-1}) = F^2 \subset M^3$

F^2 α-t reprezentálja

$D\alpha = (D\alpha)^* \ell \longleftarrow \ell$

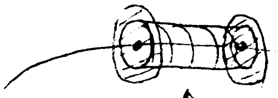
$D\alpha : M^3 \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty \supset \mathbb{R}P^{\infty-1}$ ← képezik duálisa ℓ

$D[E] = \overset{\neq 0}{x} \in H^2(M^3;\mathbb{Z}_2)$

$\overset{PD}{\Rightarrow}$ $\exists!$ $y \in H^1(M^3;\mathbb{Z}_2)$ melyre $x \cup y =$ gener.

$\alpha = Dy \in H_2(M^3;\mathbb{Z}_2)$ $\alpha = [F^2]$ $F^2 \cap E$ = ptlan sok pont

Elérhető, hogy $F^2 \cap E = 1$ pont.



nincs köztük E-nek olyan

E-n két szomsz. metszéspont

egy csövet beragasztunk F-be, ezzel a művelettel F homol. osztálya nem változik, 2-vel kevesebb metszéspont.

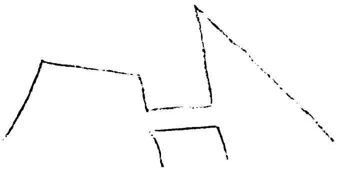
Ha E 1 db kör, akkor ezzel elérjük, hogy $F^2 \cap E = 1$ pont

Elérhető, hogy E 1 db kör

a) E körökké tehető

a felosztást finomítjuk

b) E egy-é tehető :



□

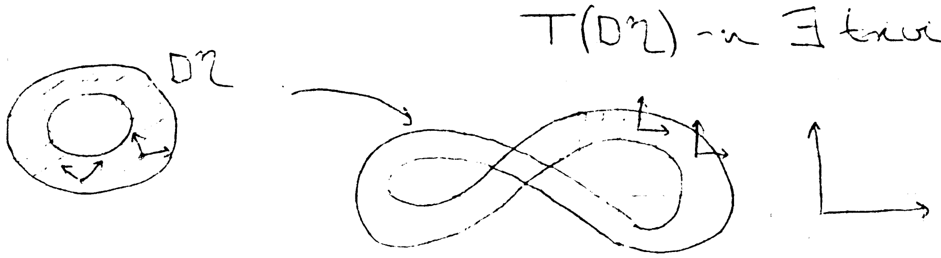
$$\begin{tikzcd} F^2 \arrow[r, hook] & M^3 \\ \gamma \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & E \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

$\nu(F^2 \hookrightarrow M^3)$ $D\nu$ = csöves környezet M^3-ban

$\eta(F^2 \looparrowright \mathbb{R}^3)$ $D\eta \looparrowright \mathbb{R}^3$

↙ immerzió

$T(D\eta)$-n $\exists$ trivial



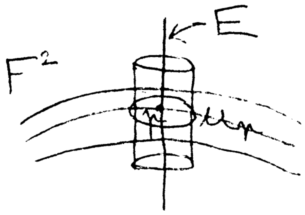
$\nu \approx \eta$:

Egy γ hurok irányításváltó F^2-n $\Leftrightarrow$ η-n ir. váltó

$\Leftrightarrow$ ν-n —||—

($TF^2 \oplus \overset{\nu}{\eta}$ irányítható, mert M^3 és $\mathbb{R}^3$ is ir.)

$T|_{D\nu}$-n van egy triviál. ($D\eta$ - ból jön, $D\eta \approx D\nu$)



Másik triviál. $T|_{\widetilde{D\nu}}$-on

$\widetilde{D\nu} = (F^2 \setminus U_p)$ ösz

Mert $M^3 \setminus E$-n volt triviál

$\partial U_p \longrightarrow SO(3)$ a nem trivi. elem

$F^2 \setminus U_p \longrightarrow SO(3) \Rightarrow \partial U_p \to SO(3)$ 0-homológ ↯

↖ a két triviál. eltérése

□

M^n paral. $\looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{tikzcd} TM \oplus \nu^k \arrow[r, phantom, "="] \arrow[dr] & \varepsilon^{n+k} \arrow[d] \arrow[r, Rightarrow, "", "k\geq 1"'] & M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k} \\ & \mathbb{R}^{n+k} & \end{tikzcd}$$

(Hirsch t.)

$TM \rightarrowtail \mathbb{R}^{n+k}$

2) $\Omega_3 = 0$ (Rohlin t.) $\mathfrak{N}_3 = 0$

<u>Megj.</u> $\Omega_3 \xrightarrow{0} \mathfrak{N}_3$

<u>Biz.</u> 1.) $M^3_{ir.} \hookrightarrow \mathbb{R}^5 \Rightarrow M^3$ 0-kobord.

($M^n_{ir.} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2} \Rightarrow M^n$ 0-kobord. ha $n > 0$)

Thom konstr. $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$

$S^{n+2} \longrightarrow MSO(2) = \mathbb{C}P^\infty = K(Z, 2)$

$BSO(2) = BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$

$\mathbb{C}P^n$ feletti kan. nyaláb Thom-tere $= \mathbb{C}P^{n+1}$

$\Rightarrow f \cong 0$ (ha $n > 0$) $\Rightarrow$ $M^n \underset{\Omega}{\sim} 0$.

$M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^6$ Norm. nyaláb = trivi. !

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] & * \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] \\ \nu : M^3 \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & BSO(3) \arrow[r, "w_2"] & K(\mathbb{Z}_2, 2) \end{tikzcd}$$

X 3-öf

Ha ν felemelhető, akkor tér: X 3-öf, így a $\dashrightarrow$ a 0-vázba kergethető, a $\dashrightarrow\downarrow$ kompozíció 0-homotóp

$\Rightarrow$ ν 0-homotóp $\nu(M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^6)$ triv.

TM^3 triv. $\Rightarrow$ $w_2(M^3) = 0 \overset{\text{szorzatform.}}{\Rightarrow} w_2(\nu) = 0$, így

$M^3 \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2,2)$ 0-homotóp

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr] \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] & & * \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] \\
\nu: M^3 \arrow[ur, dashed] \arrow[r] \arrow[urrr, bend left] \arrow[rrr, bend right, "\cong 0"'] & BSO(3) \arrow[rr, "w_2"] & & K(\mathbb{Z}_2,2)
\end{tikzcd}$$

$*$ = utak tere

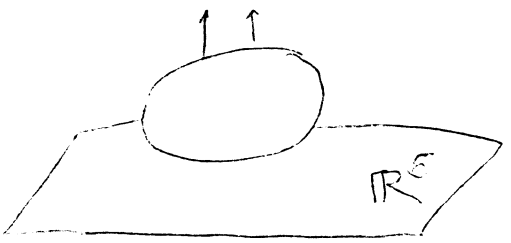
Serre-fibr. $\Rightarrow$ $\exists$ ilyen felemelés

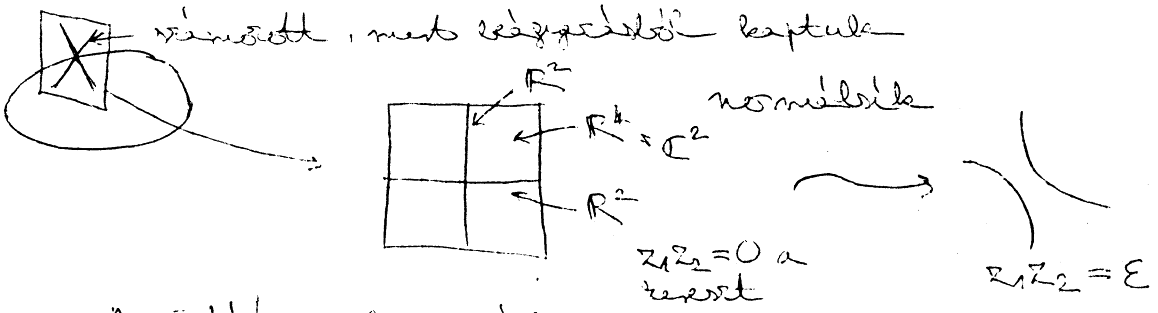
$X = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in BSO(3),\ \beta \in *$ és képeik egyenlőek $K(\mathbb{Z}_2,2)$-ben$\}$

$\dashrightarrow$: az $M^3 \to BSO(3)$ és $M^3 \to *$ leképezésektől párba (vagy: pullback univ.)

$$\begin{tikzcd}
M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^6 \arrow[r] & \mathbb{R}^5 \\
M^3 \arrow[ur, bend right, "\text{imm.}"'] &
\end{tikzcd}$$

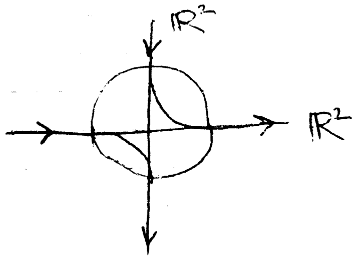
Kiegyenesítés l: egy normálvektort függőlegessé tesszük





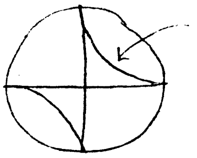
A kettőspontokat elimináljuk, e közben a szabad osztály nem vált. és beágyazást kapunk ⇒ M^3 0-kobord.

(komplex ⇒ az ir. rendben van)



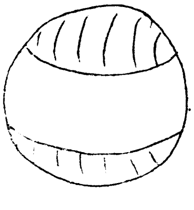
Ezt S^1-gyel szorozva kapjuk az átépítést.

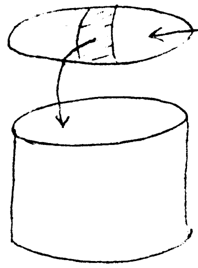
Miért lesz az új sok. kobord. az eredetivel ?



$S^2 \times S^1 = \partial(D^3 \times S^1)$

↑ kettőzője





$D^3 \times S^1$

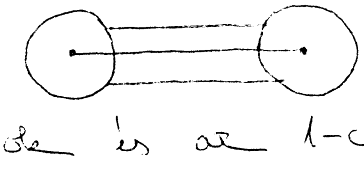
$M^3 \times [0,1]$

2. előadás

Kirby: Top. of 4-manifolds

<u>Spin struktúra</u> egy n-dim irányítható sokaságon: Trivializációja az érintőnyalábnak a 2-váz fölött.

Irányítható sok. ⇒ 1-váz fölött triv.-ható



$\pi_0(SO(n)) = 1$

(csúcsok és az 1-cella fölött az ir.-sal kompat. triv. : elérhető, hogy az 1-cella triv. a csúcsokban az ott megadott legyen.)

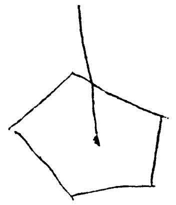
Spin sok.: Ha valamelyik 1-váz fölötti triv. kiterjed a 2-vázra (+ 2-vázra a kiterj. egyértelmű (ha az 1-vázon adott))

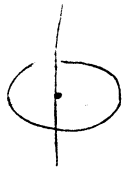
$\pi_2(SO(n)) = 0$: $SO(n) \xrightarrow{SO(n-1)} S^{n-1}$

(∀ Lie-csop. π_2-je $= 0$)

Spin strukt. = 1 konkrét triviál.

E^{n-2}
↑
l. múltkor





$$[E^{n-2}] = Dw_2(M^n)$$

$$\mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{2} SO(n) \text{ fedés}$$
↖ Lie-csop.

Ir. sk. $\Longrightarrow$

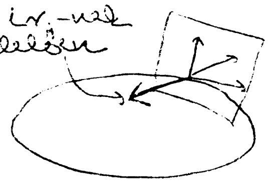
(Spin sk. $\Longleftrightarrow$ $w_2(M^n) = 0$)

$\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ TM^n struktúra csop.-nak választható Spin(n)

($g_{ij} = g_{ik} \cdot g_{kj}$ átmenő mátrixokra von. feltétel teljesüljön a Spin(n)-be felemeltekre) ∀ pontban 2 lehetőség

Tétel $\pi_{n+2}(S^n) \approx \mathbb{Z}_2$ ha $n \geqq 2$ (l. jegyzet)

Biz $\pi_{n+1}(S^n) : \mathbb{Z}_2$, $n \geqq 3$ Eml.:

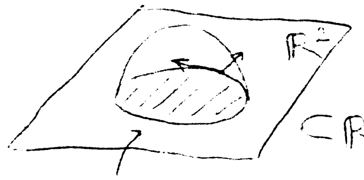


$$S^{n+1} \longrightarrow S^n$$

• reg. érték őse
(ottani bázis → c-n keretezés)

$$H_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$$

az $\mathbb{R}^{n+1}$-beli bázison bázissal összehasonlítva a keretet → $[c \longrightarrow SO(n)] + \#(c)$ ← c komponenseinek száma
$r(c)$



$$SO(2) \subset SO(n)$$

$$\pi_1(SO(2)) \longrightarrow \pi_1(SO(n))$$
$$\mathbb{Z} \longrightarrow\!\!\!\!\to \mathbb{Z}_2$$

$\pi_{n+2}(S^n)$: $S^{n+2} \longrightarrow S^n$

keretezés (framing)

(M^2, u)

δ kvadr. lekép. $H_1(M^2; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$

$\mathrm{Arf}(\delta) \in \mathbb{Z}_2$ létesíti az izom.-t $\pi_{n+2}(S^n) \approx \mathbb{Z}_2$

<u>Algebra</u> V $\mathbb{Z}_2$-feletti vektortér

$\langle , \rangle \leftarrow$ nem elfajuló $\mathbb{Z}_2$-értékű skalár szorzás

(pl. $H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$ a metszetformával)

$q : V \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ kvadr. leképezés, ha

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + \langle x, y \rangle$$

$$\mathrm{Arf}(q) = \sum_{i=1}^{n} q(x_i)\, q(y_i) \in \mathbb{Z}_2$$

V-ben szimplektikus bázis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (x_i, y_j) = \delta_{ij}$$

$$(x_i, x_j) = (y_i, y_j) = 0$$

(V-n van nemelf. $\mathbb{Z}_2$-ért. sk. szorz. $\Rightarrow$ V ps. dim)

(x_i: parallelek, y_j: meridiánok)

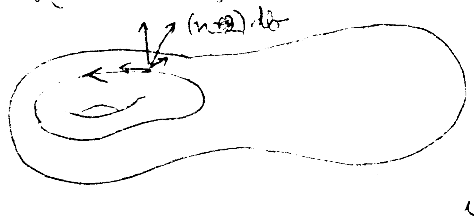
<u>Áll.</u> $\mathrm{Arf}(q)$ jól def.

<u>Geom.</u> $V = H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$

$\langle , \rangle =$ görbék metszete

Def.-unk δ kvadr. lekép.-t $H_1(M^2; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$

C egy ir. görbe M^2-n:



n db normálvektor C mentén + a görbe érintő vektora + a felületi normálvektor (C irányított)

$$h_C : C \longrightarrow SO(n+2)$$
$$x \longmapsto (u(x), \nu_x(C \subset M^2), \tau_x(C))$$

$$\beta(h_C) = [h_C] \in H_1(SO(n+2))$$

$$\delta(C) = \beta(h_C) + \underset{\nearrow}{r}(C) + d(\underset{\nwarrow}{C})$$

C komp.-nek száma

C kettőspont.-nak száma

C immertált görbe

(∀ homol. oszt. repr. így)

Áll-ás: 1.) $\sigma(C)$ homol. inv.

$$\sigma : H_1(M^2; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

2.) σ kvadr. leképez.

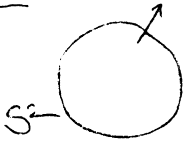
3.) $Arf(\sigma)$ tükrözött kobord. inv.

4.) $Arf(\sigma)$ tud nem 0 lenni

5.) $Arf(\sigma) = 0 \Rightarrow M^2$-t lehet építeni tükrözött gömbbé $\Rightarrow$ M homot. oszt. 0.

Áll $(S^2, \underset{\text{tük}}{\mathcal{U}}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ 0-kobord.

Biz



$\subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{n+2}$

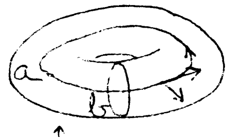
izotóp a standard gömbbel ($n \geq 2$)

$\pi_2(SO(n)) = 0$, ennek az eleme a két tükrözés (a standard és a megadott) közti áttérés

L a kanon. tük 0-kobord.: kidomborítjuk a középső golyót □

Áll $(T^2, \mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ $\underset{\downarrow}{\pi^s}(2)$ tük kobord. oszt.

Biz



paralell és meridián szimplektikus bázis

$[(T^2, \mathcal{U})] = 0 \Leftrightarrow Arf$ inv $= 0$

$\sigma(C) = \beta(h_C) + w(C) + \nu(C) \in \pi^s(1)$

stabil kobord osztály

$\pi^s(k) = \pi_{n+k}(S^n)$, $n \geq k+2$

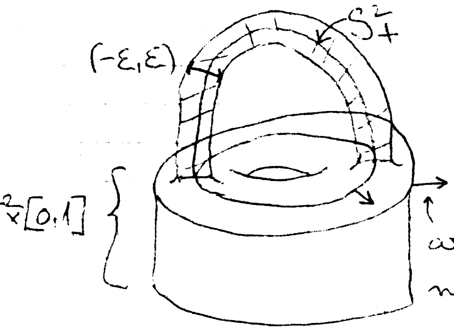
$Arf(T^2, \mathcal{U}) = \sigma(a) \cdot \sigma(b) = 0 \Leftrightarrow \sigma(a) = 0$ v. $\sigma(b) = 0$

(tetsz. tük. felületnek van Arf inv.-a)

(pl. $\sigma(a) = 0$ esetén a felület tükrözéséhez hozzávéve $\nu(a \subset T^2)$-t kapunk egy $\pi^s(1)$-beli kobord oszt.-t).

Fotóspirával elérhető: T^2 standard módon beágy.

Kell: kobord. (mutatott) $(T^2, \mathcal{U})$ és S^2 között, de előbb láttuk, hogy S^2 tetsz. tüskézéssel 0-kobord.



$\subset \mathbb{R}^4_+$

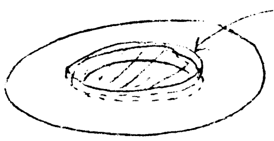
↑ Feltehető: az $\mathbb{R}^3$-ban az első tüske a standard normálvektor (a többi tüske tetsz.)

S^2_+-t ragasztunk a-ra, megvastagítjuk

$T^2 \subset \mathbb{R}^3$ standard

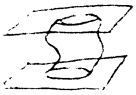
$M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4_+$

$$M^3 = \begin{array}{c} T^2\times[0,1] \\ \cap \\ \mathbb{R}^3\times[0,1] \\ \cap \\ \mathbb{R}^4_+ \end{array} \cup S^2_+\times(-\varepsilon,\varepsilon) \qquad \partial S^2_+ = a\times\{1\}$$



belülre ragasztva $S^2_+\times(-\varepsilon,\varepsilon)$-t a felső peremet kapjuk, ami S^2.

(A felső perem nincs egy síkban, de nagy dim-ban vagyunk)



)

a tüskézetlen 0-kobord. ⇒ a tüskézés kiterjed az S^2-re. □

Arf-inv. = 0

$\Updownarrow$

ps sok olyan T^2 van, amire ≠ 0

a ≠ 0 Arf-invariánsúak párosként eliminálhatók.

3. előadás

Arf.-inv. invar. def-ja:

V $\mathbb{Z}_2$-vtér, $\langle , \rangle$

$q: V \to \mathbb{Z}_2$ kvadr. leképezés

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + \langle x,y \rangle \qquad (*)$$

L a) $\dim_{\mathbb{Z}_2} V = 2$ esetén két db q lehet!

$H^{0,0} = (V, q_0)$ $\quad$ q_0-ban 3 db 0

$H^{1,1} = (V, q_1)$ $\quad$ q_1-ben 1 db 0

ptl. sok 1 $\qquad \Leftarrow 1$

$0, x, y, x+y \qquad \langle x,y\rangle = 1 \qquad q(x+y) = q(x) + q(y) + \langle x,y\rangle$

$q(0) = 0 \quad (x = y = 0 \quad *$-ba$)$

b) V tetsz, q tetsz

$$(V,q) = \bigoplus_{i=1}^{n} H^{0,0} \text{ vagy } \bigoplus_{i=1}^{n-1} H^{0,0} \oplus H^{1,1}$$

← ortog. direktösszeg, a q-k összeadódnak

Def $\mathrm{Arf}(V,q) = \# H^{1,1}$

Biz L(b) $\quad x_1, \dots, x_k$ bázis V-ben

$x_1 \quad y$ - az x_1 duálisa

$y(x_1) = \langle y, x_1\rangle = 1$

$y(x_i) = \langle y, x_i\rangle = 0 \quad i = 2, \dots, k.$

$x_1, y \Longrightarrow y \neq x_1$ (mert $\langle y, x_1\rangle \neq 0$)

Megj: $(*) \Rightarrow \forall x \in V$-re $\langle x,x\rangle = 0$ $\quad$ ($*$-ba $x = y$)

$$0 = q(0) = \underbrace{2q(x)}_{0} + \langle x,x\rangle$$

$H = \{y, x_1\} = H^{0,0}$ vagy $H^{1,1}$ $\quad q|_H$-val ellátva.

$H^{\perp}$-ra ismételve: $\langle , \rangle|_{H^{\perp}}$ nemelf.

$(V,q) = l H^{0,0} \oplus m H^{1,1}$ $\quad$ (köv. $\dim V$ ps.)

Segéd L $\quad H^{0,0} \oplus H^{0,0} \approx H^{1,1} \oplus H^{1,1}$

Biz $(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \longrightarrow x_1 + y_1 + x_2, \quad x_1 + y_2 + x_2$

$x_1 + y_1 + y_2, \quad y_1 + y_2 + x_2$ $\qquad$ HF□

(ebben a bázisban látszik, hogy a régi def-t kapjuk)

5.!) **Áll** $\pi_{n+2}(S^n) \leq \mathbb{Z}_2$

stabil $(\pi_{n+1}(S^n))$

Biz $n = 2 \qquad \pi_4(S^2) \underset{\Uparrow}{\approx} \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$

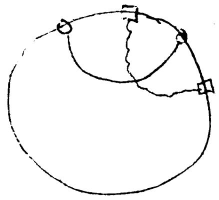
$$S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$$

<u>EHP</u> $\pi_4(S^2) \xrightarrow{S} \pi_5(S^3) \xrightarrow{H} \pi_4(S^4) = \mathbb{Z}$

$H = 0$ (Hopf inv.)

<u>Emb:</u> $S^5 \rightarrow S^3$

⋮



$H : \pi_{2k+1}(S^{k+1}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ $= 0$, ha k ps.

$\Rightarrow \pi_5(S^3) \twoheadleftarrow \mathbb{Z}_2$

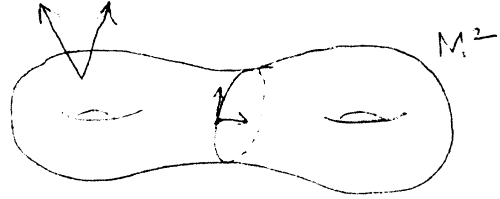
$n = 4$: $S : \pi_5(S^3) \longrightarrow \pi_6(S^4) \overset{\longrightarrow}{\approx}$

Epi Freudenthal

□

Arf inv. kobord. inv. és tud $\neq 0$ lenni.

<u>L</u> $\mathrm{Arf}(M^2, \overset{\mathcal{U}}{\overbrace{\mathcal{U}_1 \dots \mathcal{U}_n}})$ kobord. inv.



$\subset \mathbb{R}^{n+2}$

$h_C : C \rightarrow SO(n+2)$ (standard bázissal keretezve)

$\sigma(C) = \beta(h_C) + r(C) + s(C) \in \mathbb{Z}_2$

$\beta(h_C) \in H_1(SO(n+2))$, $r(C)$: C komp. száma, $s(C)$: kettősp.

$\sigma : H_1(M^2; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ kvadr. $\rightsquigarrow \mathrm{Arf}(\sigma)$

$\mathrm{Arf}(M^2, \mathcal{U}) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Arf}(\sigma)$

<u>Megj.</u> Ha C j és beágyazott $(s(C) = 0,\ r(C) = 1) \Rightarrow$

$\sigma(C) = 0 \Leftrightarrow (C, \underbrace{\mathcal{U}|_C, \nu(C \subset M^2)}_{(n+1) \text{ db trivializálása a } C\text{-nek}})$ null-kobord.

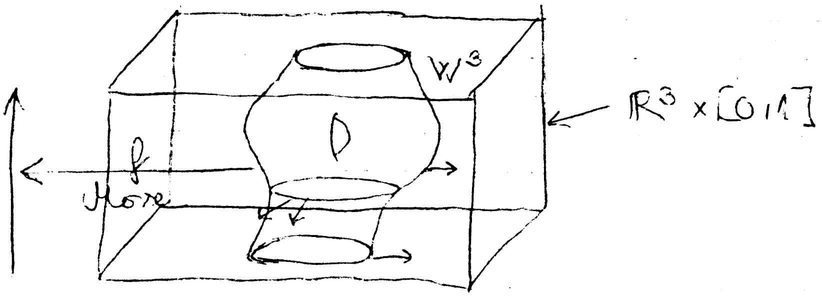
Uis. $\sigma(C) = \beta(h_C) + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta(h_C) \neq 0 \in H_1(\underbrace{SO(n+2)}_{SO}) \Leftrightarrow$

$C, V) \sim 0$.

$+2) \xrightarrow{SO(n+1)} S^{n+1}$ -ből $\pi_1(SO(n+1)) \approx \pi_1(SO(n+2))$, mindegy hogy $\subset$ érintővektorát hozzávesszük-e a tükrözéshez).

Biz.: $W^3 \subset \mathbb{R}^3 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^4$ feltehető (n nagy, ∀2 beágy. izotóp)

$$\partial W^3 = \underset{\mu_0}{M_0} \amalg \underset{\mu_1}{M_1} \subset \mathbb{R}^3$$



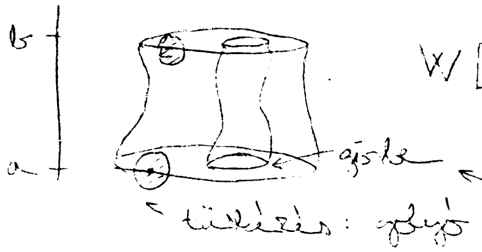
(a többi tükör $\mathbb{R}^4$-en ⊥, hiszen az 1. tükör benne van a nagy dim. miatt tükör ↔ normál körny)

Kell: $\mathrm{Arf}(M_0, \mu_0) = \mathrm{Arf}(M_1, \mu_1)$

∀ nem krit. $t \in [0,1]$ értékre $M_t = f^{-1}(t)$

μ_t tükrözése (W^3 tükrözését M_t síkjára vetítjük) ← a többi tükör marad

Kell. Átlépve krit. értéken nem vált. $\mathrm{Arf}(M_t^2, \mu_t)$.



$W[a,b] \times D^N \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ nincs krit. pontja

Ha nincs krit. pont: diffeom ← a két σ értéke ua.

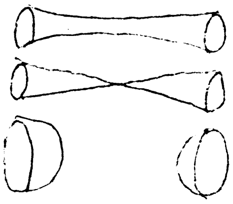
Átlépve 0-ind. krit. ponton:

Nem vált $H_1(M^2; Z_2)$ (S^2 jelent meg).

σ nem vált (a vmelyik főg. változnak a görbe mentén). Arf nem vált.

3-indexűnél ua. visszafelé.

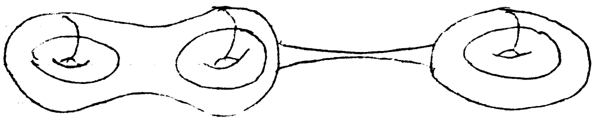
Csak azt kell belátni, hogy 1-indexűn átlépve nem vált Arf.



$-\underline{\underline{x}}^2 + y^2 + z^2$

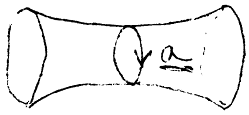
← egy cső hozzáragad.

Ha a cső két kül. komp-t köt össze ⇒ nem vált H_1.

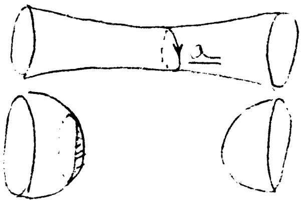


a bázis repr.-ható a csőtől diszj. görbékkel ⇒ σ nem vált.

Ha a cső két vége 1 komp.-én van az M^2-nek:
Két új görbe jön be: $\underline{a}$ – a cső középvonala
$\underline{b}$ – $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 1$
$\underline{b} \underset{\nwarrow \langle , \rangle}{\perp}$ a többire



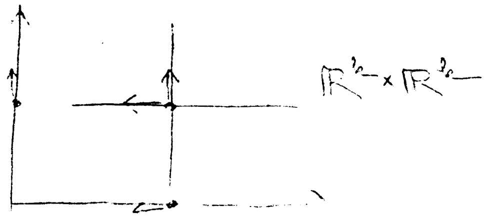
$\text{Arf}_{\text{új}} = \text{Arf}_{\text{régi}} + \sigma(a)\sigma(b)$
Észrevétel: $\sigma(a) = 0$
mert ez a krit. érték alatt
határol a felületen



(+ Megj.: 0-kobord., $r = 1$, $s = 0$ ⇒ $\sigma(\underline{a}) = 0$)
És σ homeo. inv.

□

Áll. $\exists\, (M^2, U)$, melyre $\text{Arf}(M^2, U) \neq 0$.
Biz. $C^1 \subset \mathbb{R}^k$, V tükrözés u.h. $(C^1, V) \not\sim 0$
(ilyen van, l. $\pi_{k-1}(S^{k-1})$)
$C^1 \times C^1 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$
(x, y) tükrözés



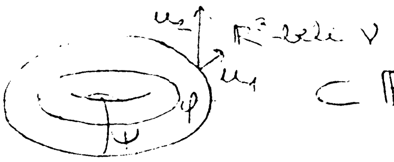
$SO(k-1) \subset SO(2k-2)$ π_1-ben izo.

$$A \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & E \end{array}\right)$$

$\text{Arf} = \sigma(a)\sigma(b) = 1$

□

Biz. (Pontrj.)



$\subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$.
$\uparrow$ 4. koord. ir.: triv. tüske u_2

Kaptuk T^2 $\forall$ normálterének bázisát. (u_1, u_2)
$v_1 = \cos(\varphi - \Psi)u_1 + \sin(\varphi - \Psi)u_2$

$v_2 = -\sin(\varphi-\psi)u_1 + \cos(\varphi-\psi)u_2$

HF: $\operatorname{tr} f = 1$.

□

Áll σ homol. inv.

Biz $\sigma(c_1+c_2) = \sigma(c_1)+\sigma(c_2)+\langle c_1,c_2\rangle$

$\sigma(c_1) = \beta(h_{c_1}) + r(c_1) + s(c_1)$

$r(c_1+c_2) = r(c_1)+r(c_2)$

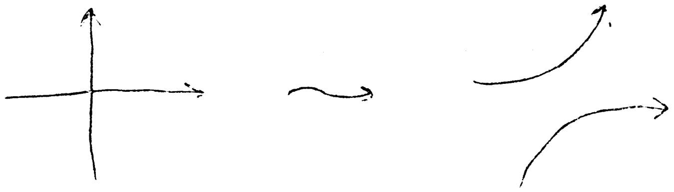
$s(c_1+c_2) = s(c_1)+s(c_2)+\langle c_1,c_2\rangle$

$c_1 \longrightarrow SO$ $\quad\beta(h_{c_1+c_2}) \neq \beta(h_{c_1}) + \beta(h_{c_2})$
$c_2 \longrightarrow SO$

Volt: C beágy. null-homol. ⇒ $\sigma(C) = 0$.

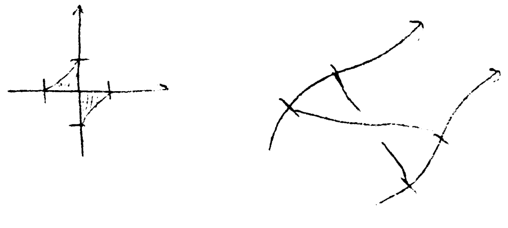
C nem beágy., de null-homológ ⇒

σ megvált. -a nélkül átépíthető 0-homológ beágyazottá:

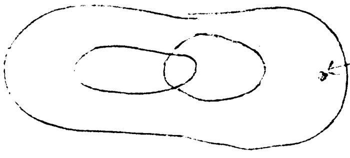


Nem vált. a σ: $\left.\begin{array}{l} r \text{ 1-gyel } \sim\!\sim\text{nő}\sim\!\sim \text{ változ.} \\ s \text{ 1-gyel csökk.} \end{array}\right\}$ $r+s$ áll. mod $\mathbb{Z}_2$

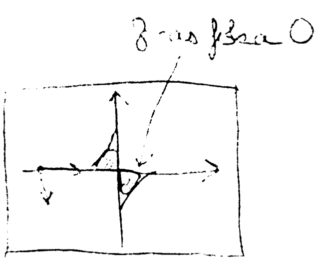
r:



β nem vált.:



kilyukasztva a felület síkba teríthető



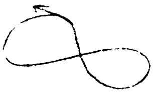
$c_1 \longrightarrow SO(2) = S^1$

$c_2 \longrightarrow SO(2) = S^1$

$\dfrac{\in SO(2)}{\in SO(k)}$

$SO(2)\times SO(k) \subset SO(k+2)$
$\uparrow$
ez a komp. a 8 mentén a ∥ miatt 0-homológ.

A két fibr. a 8-ason kívül



érintőfibra 0
SO(2)-komp. 0

4. előadás

HF. 1) ξ irányítható $\Rightarrow p_k(\xi) \equiv w_{2k}^2(\xi) \mod 2$

2) a) $\mathrm{Imm}(n,k) \approx \pi^s_{n+k}(MO(k))$ ↑ kobord. osztályok $\quad T\gamma_k \quad \pi_{n+k+N}(S^N MO(k))$ ↙ szuszpenzió

b) $\mathrm{Imm}^{SO}(n,k) \approx \pi^s_{n+k}(MSO(k))$

$k=1: \quad \mathrm{Imm}^{SO}(n,1) \approx \pi^s_{n+1}(\underbrace{MSO(1)}_{S^1}) = \pi^s(n)$

(1-dim vr. irányítható triv., $BSO(1) = \{pt\}$)

$\pi^s(2) = \mathrm{Imm}^{SO}(2,1) \approx \mathbb{Z}_2$

$\pi^s(2) = \mathbb{Z}_2 \qquad (M^2, U)$

$\sigma: H_1(M^2;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$

σ def: $\sigma(C) = \beta(h_C) + \tau(C) + s(C)$

↑ $\in H_1(SO)$ ↑ csavar ↑ kettősp.

? σ homol. inv.

σ kvadr. fv.: $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) + \langle x,y \rangle$

$(H_1(M^2;\mathbb{Z}_2), \sigma) \longrightarrow \mathrm{Arf}(\sigma)$ jól def.

Arf kobord. inv.

$(M^2, U) \rightsquigarrow \sigma \rightsquigarrow \mathrm{Arf}(\sigma) \qquad \mathrm{Arf}(M^2,U) \overset{def}{=} \mathrm{Arf}(\sigma)$

$\mathrm{Arf} \not\equiv 0$

5.) EHP $\Rightarrow \pi^s(2) \leq \mathbb{Z}_2$ □ (Pontrj.)

5'.) (Novikov) ha $\mathrm{Arf}(M^2,U) = 0 \Rightarrow$ le lehet operálni a füleket.

$\sum \sigma(a_i)\sigma(b_i) = 0$

$\Downarrow$

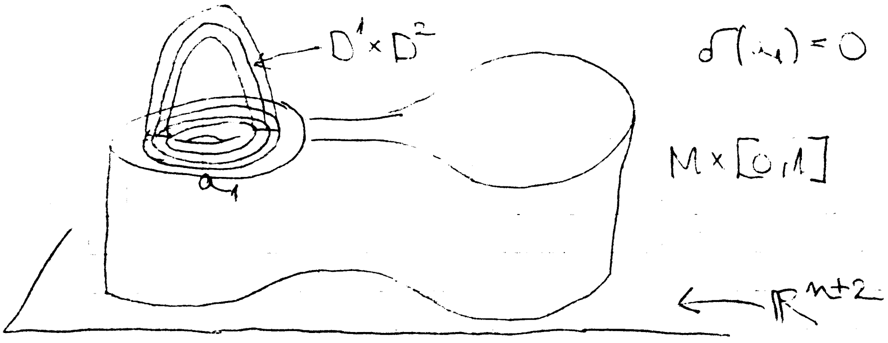
Van olyan bázis, amiben $\forall$ összeadandó 0.

(összeadandó $\longleftrightarrow$ fül)

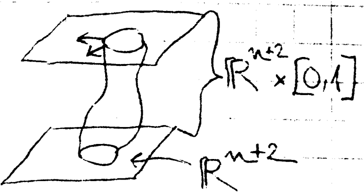
$a_1, b_1 \quad a_2, b_2$ pl. itt 1-es tag ↓

$\sigma(a_1)\sigma(b_1) = \sigma(a_2)\sigma(b_2) = 1$

$a_1', b_1' \quad a_2', b_2'$ -ben mindkettő $= 0$



$\sigma(a_1)=0 \Rightarrow$ a tüskézés kiterjed a fogantyúra



Probl: a felső perem nincs egy síkban (a tüskékkel együtt)

izotópia: alsó perem fix, felső perem egy síkba, kiterjed az egész tér izotópiája ⇒ a tüskéket is mozgatja

Követk.: $(M^2, \mathcal{U})$ $\sigma(a_1)=0$

a_1 egy szimpl. bázis egy eleme

$(M^2,\mathcal{U}) \sim (N^2,V)$, $g(N^2) < g(M^2)$

$\sigma(M^2,\mathcal{U}) = 0 \Rightarrow (M^2,\mathcal{U}) \sim (S^2,V) \sim \emptyset$

(az $M^2\times[0,1]$ stabil normálnyalábjának trivializációját (van tüskézés) terjeszthetjük ki a fogantyúra, mert $\sigma(a_1)=0$).

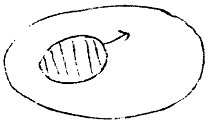
σ homol. inv.?

$C_1 \sim C_2$ $\sigma(C_1) \overset{?}{=} \sigma(C_2)$

$\sigma(\underbrace{C_1+C_2}_{C_1+C_2\sim 0}) \overset{?}{=} 0$ $\sigma(C_1+C_2) = \sigma(C_1)+\sigma(C_2)+(\overset{0,\ M^2 \text{ ir.}}{C_1,C_2})$

$C\sim 0$ kell: $\sigma(C) \overset{?}{=} 0$

a) C beágyazott ✓



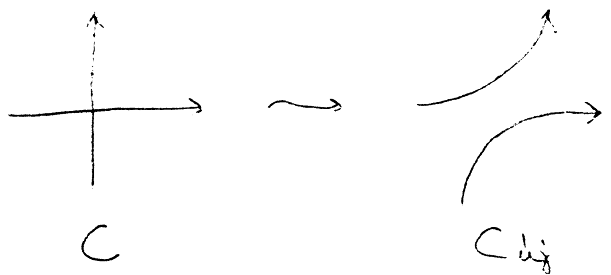
$\sigma(C) = (C, \overset{\text{tüsk.}}{\overline{\nu(C\subset M^2)}}, \mathcal{U}|_C)$

koord. rsz. $=0$ (ld a felületet, amit határol)

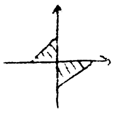
b) C immerzált

Át lehet építeni C-t a kettőspontoknál úgy, hogy

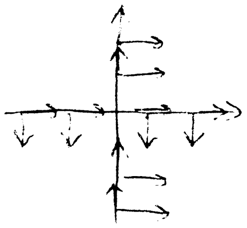
$C_{új} \sim C$, $\sigma(C_{új}) = \sigma(C) \xRightarrow{a)} \sigma(C)=0$.



$C_{új} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homológ}}}{\sim} C$



r+1 mod 2 nem vált. Elég: $\beta(h_{C_{új}}) = \beta(h_C)$

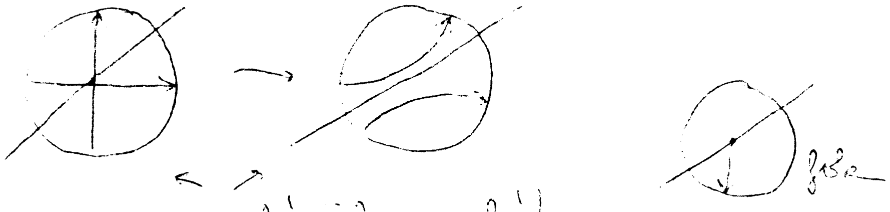


felületet kilyukasztjuk $\overset{\text{ezért}}{\Longrightarrow}$ síkba rögzíthető, kiterjed az egész térre (a többiek síkba mennek, ill. rá ⊥-ek)

σ nem változik (folyt.-an mozgattuk)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] & SO(2) \times SO(k) \subset SO(k+2) \\ C_{új} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

SO(2)-ben homol.: normál lekép.-ek fokai megegyeznek, mert



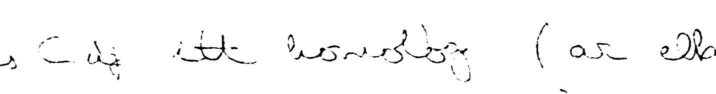
ezen kívül a két foka megegyezik

fok megválasztott pontra S^1-en ∄ ős a kettősp. körny.-ben

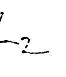
$M^2 \setminus D^2 \longrightarrow SO(k)$

C és C új itt homológ (az elhagyott pont nincs a kettőspont körny.-ben) □

Def: $\pi^{1}(2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$



← ennek a környezete csavarodik, ha a végét megfordítjuk



I. $\mathrm{Imm}(2,1) \approx \mathbb{Z}_8$

I. a) $\pi^s(3) = \mathbb{Z}_{24}$ (Rohlin)

b) M^4 spin $\Rightarrow \sigma(M^4)$ osztható 16-tal

$(w_1 = w_2 = 0)$

1.) $\pi_1(M^3) = \mathbb{Z}^4$

Útm.: $M^3 \cup D^3_1 \cup D^3_2 \cup \dots \cup D^4_1 \cup \dots = K(\mathbb{Z}^4,1) = S^1\times S^1\times S^1\times S^1$

megöljük cellák ragasztásával a π_1-nél magasabb homotópiáikat

---

$M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow$ a) $H_n(M^n) = \mathbb{Z}$

Univ. együtth. $\Rightarrow$ b) $\mathrm{Tors}\, H_{n-1}(M^n;\mathbb{Z}) = 0$

$H_2(\mathbb{R}P^3,\mathbb{Z}) \approx H^1(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$

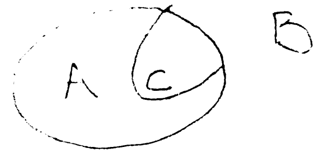
$H_1(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$

Útm.: $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$

1.) Mayer-Vietoris $\Rightarrow \mathbb{R}P^2 \sim 0$ A-ban vagy B-ben

HF

C-nek pereme



2.) C választható összefüggőnek:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrd, "f"'] & \supset & \partial A = \mathbb{R}P^3 \arrow[d, "D{[}\mathbb{R}P^2{]}"] \\
 & & \mathbb{R}P^N \supset \mathbb{R}P^{N-1}
\end{tikzcd}$$

kiterjed, mert $\mathbb{R}P^3$ 0-homológ A-ban (a pereme)

$f^{-1}(\mathbb{R}P^{N-1})$ pereme $\mathbb{R}P^2$ ↯ $\mathbb{R}P^2$ nem perem.

3.) Kieg.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r] \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2{,}1)"] & * \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2{,}1)"] \\
 & BSO(n) \arrow[r] & K(\mathbb{Z}_2,2) \\
BSpin(n) \arrow[ruu, "\cong"] \arrow[ru, "\cancel{\cong}"']
\end{tikzcd}$$

$X \cong$ ~~BStn~~ $BSpin(n)$

$X \cong BSpin(n) \longrightarrow BSO(n)$

$P(a \rightsquigarrow A)$ pontrahúzh.

$\downarrow \Omega(A,a)$

$A \ni a$

$\mathrm{Spin}(n) * \mathrm{Spin}(n) * \ldots \Big/ \mathrm{Spin}(n)$

5. előadás

$\ulcorner$ $\mathbb{R}P^3 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$: $\quad X \hookrightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow H^{n-1}(X;\mathbb{Z}), H^{n-2}(X;\mathbb{Z})$ torzmentes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X^n), \mathbb{Z}) \arrow[r] & H^n(X;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Tors}\, H_{n-1}(X) \arrow[r] & \mathbb{Z} & & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p$$
$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$$
$\lrcorner$

Tétel

$\mathrm{Imm}(2,1) \approx \mathbb{Z}_8$ (Pinkall 1985 Topology, Wells 1966. Topology)

Mj

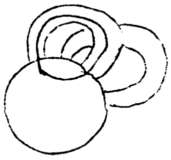
$\Pi^s(2) \approx \mathrm{Imm}^{SO}(2,1)$ (Összenyomási t.)

$\delta : H_1(M^2; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ meghat. $f : M^2_{ir.} \looparrowright$ ~~(A)~~ $\mathbb{R}^3$

reg. homot. erejéig

$\delta(M^2, u)$

$g : M^2 \setminus D^2 \looparrowright \mathbb{R}^2$



standard : st

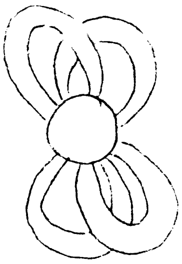
(Vát : $\forall g$ kiterjed egyértelműen $\bar{g} : M^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ immerzióvá.)

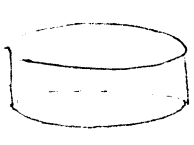
$f : M^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \delta(a) =$ eltérés $st|_a$ és $f|_a$ között

$a \in H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$

$\uparrow$ beágyazott görbével repr.

$S^1 \to SO(3)$



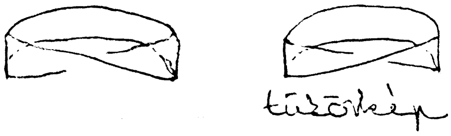


Biz I. $\quad q : H_1(M^2; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_4$ kvadr. lekép; :

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + \underset{\uparrow}{2}\langle x, y\rangle \qquad (*)$$

$\qquad\qquad 2 : \mathbb{Z}_2 \rightarrowtail \mathbb{Z}_4$

$f : M^2 \looparrowright \mathbb{R}^3 \longrightarrow q_f$ kvadr. lekép.



$$\begin{tikzcd}
\mathrm{MONO}(T\mu, \mathbb{R}^3) \arrow[d, "SO(3)"'] \\
\mu \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

$$V_2(\mathbb{R}^3) = SO(3)$$

($\mu \to SO(3)$ leképezések homot. osztályai = körpályával $\to SO(3)$ leképezéseké $= \pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$)

$a_1, \dots, a_k$ bázist $H_1(M^2; \mathbb{Z}_2)$-ben

$q(a) = \Big\{$

1 

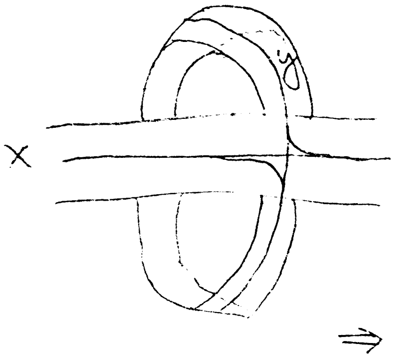
2 

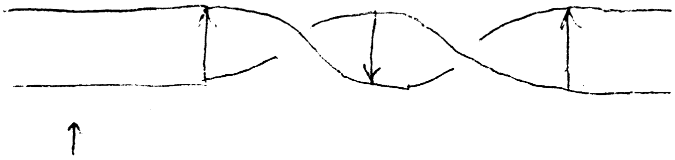
3 1 tükörképe 

0 

($q(a)$: ahányszor végig kell futni az 1-es Möbius-szalagon)

q_f egyért. meghat. f-et



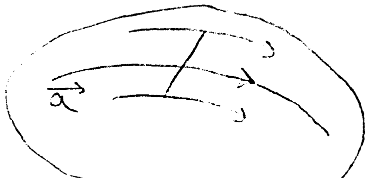


↑ az átépített görbe környezetét kihúzva

$$\Rightarrow q(x+y) = q(x) + q(y) + 2\langle x, y\rangle$$

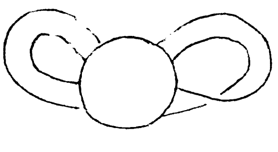
⌜[illegible]: $q_f(a)$ lehetséges def.-ja

$lk(\vec{a}, S(\gamma|\vec{a})) \in \mathbb{Z}$



↑

Nem függ mod 4 $\vec{a}$ mod 2 homol. oszt.-ban a repr. választástól. ⌟

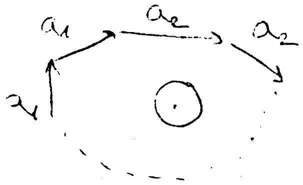


$M^2 \setminus D^2$

$q: H_1(M^2; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_4$

kiterjed D^2-re:

$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$



$$\begin{tikzcd} & S^1 \arrow[r] & SO(3) \\ & D^2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

+ Hirsch t.

$\mathrm{Mono}(TN^2 \to \mathbb{R}^3)$

$$\begin{tikzcd} TD^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \\ TD^2|_{S^1} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Boy felület: $B : \mathbb{R}P^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ | $\overline{B} : \mathbb{R}P^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ tükörkép

$q_B : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ | $q_{\overline{B}} : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$

$\overset{\shortparallel}{q_+} \quad 1 \longmapsto 1$ | $q_- : 1 \longmapsto -1$

$q : V \longrightarrow \mathbb{Z}_4$

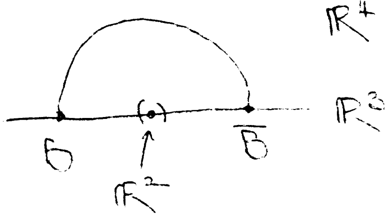
$\uparrow$

$\mathbb{Z}_2$ feletti vektortér, $\langle , \rangle$ nem elf. szim. szorzás

anizotróp: $\exists\, x \in V$, $\langle x, x \rangle = 1$.

$\uparrow$

ez feltehető: $+\underbrace{B + \overline{B}}_{0\text{-kobordánsak}}$



(M^2 nem felt. öf. q def-jában, vagy vehetünk öf uniót)

$f : M^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$

$f \underset{\text{kobord.}}{\sim} f \amalg B \amalg \overline{B}$

$H_1(M^2 \amalg \mathbb{R}P^2 \amalg \mathbb{R}P^2 ; \mathbb{Z}_2)$ anizotróp

<u>L.</u> (V, q) anizotróp $\Rightarrow$ $(V, q) = kq_+ \oplus lq_-$

Megjegyzés: $q_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \quad \langle , \rangle$

$q_2 : V_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \quad \langle , \rangle$

$q = q_1 \oplus q_2 : V_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{okoz}}}{\oplus} V_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$

$$q(\underset{\shortparallel}{x, y}) = q_1(x) + q_2(y)$$

$$(x, 0) + (0, y) \Rightarrow 2\langle x, y \rangle = 0$$

<u>Biz.</u> $x \longmapsto \langle x, x \rangle \qquad V \longrightarrow \mathbb{Z}_2$

Lin. leképez ($\mathbb{Z}_2$ felett tagonként emelhetünk négyzetre)

$\exists\, c \in V : \langle c, x\rangle = \langle x, x\rangle$ $\quad$ ($\langle , \rangle$ nemelf)

(c karakterisztikus elem)

<u>HF</u>: M^4 $\quad H^2(M^4; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$

$\qquad\qquad x \longmapsto \langle x \cup x, [M^4]\rangle$

Karakt. elem: $w_2(M^4)$.

<u>Megj.</u> $\dim_{\mathbb{Z}_2} V = 1 \Rightarrow$ csak $q+$ és $q-$ létezik

$x \in V \setminus \{0\}$ $\quad \langle x, x\rangle = 1$

<u>Biz</u> $q(0) = 0$ $\quad$ ($x = y = 0$ $(*)$-ba)

$$\underbrace{q(x+x)}_{0} = q(x) + q(x) + 2\langle x, x\rangle$$

$$2q(x) + 2 = 0$$

$$q(x) = \pm 1.$$ ☐

Ha $\dim_{\mathbb{Z}_2} V \geq 2$ és V anizotróp $\Rightarrow \exists\, y \in V \setminus \{c\}$:

$\langle y, y\rangle = 1$:

ha $\langle c, c\rangle = 0 \Rightarrow \exists\, y$ ✓

$\langle c, c\rangle = 1$, $y \in V \setminus \{c, 0\}$ és $\langle y, y\rangle = 0 \Rightarrow y' = y + c$ jó

$$\langle y+c, y+c\rangle = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\langle y, y\rangle} + \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\langle c, c\rangle}$$

$V = \mathbb{Z}_2\langle y\rangle \oplus y^{\perp}$.

$\langle , \rangle|_{y^\perp}$ anizotróp: Tfh izotróp, azaz $\forall\, z \perp y$

$\langle z, z\rangle = 0$. $\quad \langle c, z\rangle \overset{c \text{ karakt}}{=} \langle z, z\rangle = 0 \Rightarrow c \perp (y^\perp) \Rightarrow$

$\Rightarrow c = y$ (mert $c \neq 0$, $c = 0$ esetén $\forall z$-re $\langle c, z\rangle = \langle z, z\rangle = 0$ volna) ↯

Kapjuk: $(V, q) = kq+ \oplus lq-$. ☐

Alk. geom.: $f \underset{\overset{\uparrow}{\text{kobord}}}{\sim} f \underset{\#}{\overset{\shortparallel}{\sqcup}} B \underset{\#}{\overset{\shortparallel}{\sqcup}} \overline{B} \underset{\overset{\uparrow}{\text{kobord. sőt reg.homot.}}}{\sim} kB \overset{\shortparallel}{\#} l\overline{B}$

(diszj. unió kobord. öf unióval)

$\underline{\alpha}$ $\quad 4q \approx 4(-q)$ $\quad$ (q tetsz. kvadr.)

(analógia: $H^{0,0} \oplus H^{0,0} \approx H^{1,1} \oplus H^{1,1}$)

Biz $W = V \oplus V \oplus V \oplus V$ $\qquad \varphi_i : V \longrightarrow W \quad i=1,\dots,4$

$\varphi_1 : x \longmapsto (0,x,x,x)$

$\varphi_2 : x \longmapsto (x,0,x,x)$

…

$(q \oplus q \oplus q \oplus q)(\varphi_i(x)) = 3q(x) = -q(x)$

$x \in V$

(tehát az $\operatorname{im}\varphi_i$-ben kapjuk $(-q)$-t) □

$q_f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kobord}}}{\sim} (k-l)q_+ \qquad f \rightsquigarrow q_f \quad , \quad q_- = -q_+$

Köv. Innen (2,1) cikl. és ≤ 8 elemű.

Biz Feltehető $|k-l| \leq 4$

$$15q_+ \approx 11q_+ + 4q_- = 7q_+ + \underbrace{4(q_+ + q_-)}_{0\text{-kobord}}$$ □

Áll ∃ 8 kül. kobord. oszt.

Def Brown-invariáns.

$(V, \langle , \rangle, q)$, $\gamma(q) = \gamma(V,q) = \sum_{x \in V} i^{q(x)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\dim V}$

$q : V \longrightarrow \mathbb{Z}_4$

Triv. számolás: $\gamma(q_1 \oplus q_2) = \gamma(q_1) \cdot \gamma(q_2)$

$$\sum_{(x_1,x_2) \in V_1 \oplus V_2} \underbrace{i^{(q_1 \oplus q_2)(x_1,x_2)}}_{\sum_{\substack{x_1 \in V_1 \\ x_2 \in V_2}} i^{q_1(x_1)} \cdot i^{q_2(x_2)}} = \gamma(q_1) \cdot \gamma(q_2) \text{ konst}$$

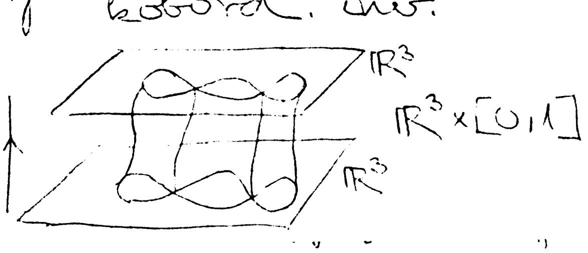
$\gamma(q_+) = \varepsilon =$ első 8-ik egységgyöke

$\gamma(q_+) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \varepsilon$

Áll γ kobord. inv.

Biz

Morse-fv.



$W^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \times [0,1]$

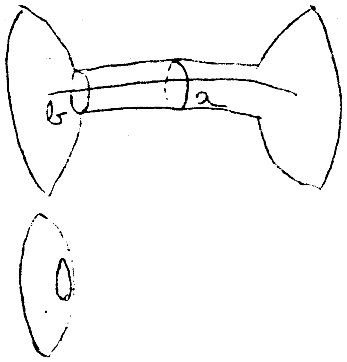
Elég belátni, hogy 1-indexű krit. ponton átlépve nem vált a γ (l. trf-inv. kobord. inv.)

a) ha a megjelenő cső kül. komp.-ket köt össze

$\Rightarrow H_1$ nem vált $\Rightarrow \gamma$ sem

b) ha a cső két vége 1 komp.-en van

2 új generátor jelenik meg:



$q(a)=0$

$$\sum_{x\in V}\left(i^{q(x)}+i^{\overbrace{q(x+a)}^{q(x)}}+\cancel{q}\,\overbrace{i^{q(x+b)}+i^{q(x+a+b)}}^{0}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\dim V+2}$$

$$q(x+a)=q(x)+\underbrace{q(a)}_{=0}+\underbrace{2\langle x,a\rangle}_{=0}=q(x)$$

$$q(x+b)=q(x)+q(b)+2\underbrace{\langle x,b\rangle}_{=0}=q(x)+q(b)$$

$$q(x+a+b)= \qquad = q(x)+q(b)+2$$

$$i^{q(x+b)}+i^{q(x+a+b)}=0$$

Tehát γ nem változik. □

A kobord. alg. analógja:

<u>Witt csoport</u>: $WQ(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)=\mathbb{Z}_8$

(V,q) : $q: V\longrightarrow\mathbb{Z}_4$

<u>Def</u> Neutrális kvadr. fv.

(V,q) neutrális, ha $\exists\, H<V$, $q|_H=0$, és $\dim H=\frac{1}{2}\dim V$

$f\rightsquigarrow q_f\rightsquigarrow[q_f]$

q kobord q', ha $q\oplus$ neutrális $\approx q'\oplus$ neutr.

$[q]$ ekv. (kobord.) oszt.

csoport: inverz: $(V,q)\oplus(V,-q)$ neutrális

$\gamma: WQ(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)\longrightarrow\mathbb{Z}_8$ izom.

Megj. V vektortér $q: V\longrightarrow\mathbb{Z}_4$

csak ps. értékek:

$$\underbrace{q(x+x)}_{0} = q(x)+q(x)+2\underbrace{\langle x,x\rangle}_{=0} \Rightarrow q(x) = 0 \text{ v. } 2$$

$$\bar{q}(x)\in\mathbb{Z}_2 \quad \left(\bar{q}=\frac{q}{2}\right) \qquad \gamma(q) = \underbrace{\mathrm{Arf}(\bar{q})}_{\substack{-1,1 \text{ multipl.-an} \\ \mathbb{Z}_8\text{-ban.}}}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Imm}^{SO}(2,1) & \longrightarrow & \mathrm{Imm}(2,1) \\ \| & & \\ \pi^{s}(2) \quad \mathbb{Z}_2 & \rightarrowtail & \mathbb{Z}_8 \end{array}$$

6. előadás

$q_f: H_1(M^2;\mathbb{Z}_2)\longrightarrow\mathbb{Z}_4 \qquad f: M^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$

jóldef.: $\gamma_1 \underset{\uparrow}{\sim} \gamma_2$ ← két beágyazott görbe

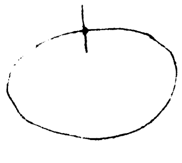
mod 2 homológ

$\Rightarrow f|_{U_{\gamma_1}}$ reg. homot. $f|_{U_{\gamma_2}}$

U_{γ_1} homeom. U_{γ_2} $(\gamma_1 \underset{\uparrow \text{önmetszés}}{\circ} \gamma_1 = \gamma_2\circ\gamma_2$ miatt,

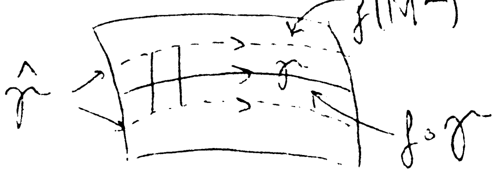
ha $=1$: $U_{\gamma_1}\overset{\text{homeo}}{\cong}U_{\gamma_2}$ = Möbius-szalag, ha $=0$: szalag)

$q_f([\gamma])$ = U_γ-ban a γ-ra $\perp$ irány hányszor 180°-ot fordul a γ-n végigfutva (mod 4)



Pinkall: $\mathrm{lk}(f\circ\gamma, S(\nu_{\gamma}))$

$\gamma: S^1 \hookrightarrow M^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \qquad \nwarrow S(\nu_f|_\gamma)$

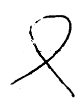
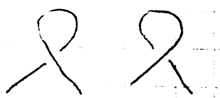


a) $f\circ\gamma$ beágyazás

$\mathrm{lk}(f\circ\gamma, S(\nu_f|_\gamma))$ nem reg. homot.

inv., de mod 4 igen

($f\circ\gamma$-t deformálva az átmetsződésnél lk 2 ± 2-vel változik).

tetsz. $f\circ\gamma$-ra:  : kétféle rezolúció: ,

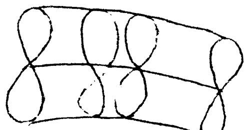
mod 4 ua. a lk-jük.

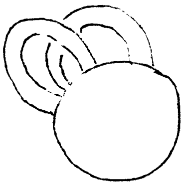
(Tehát a múltkori és a Pinkall-féle q_f def. ua.)

a standardokra megegyeznek, deform. során nem vált.

Észrevétel: f gen. imm. $\Rightarrow \exists\, V^2 \subset M^2$,

$V^2 = M^2 \setminus D^2$ és $f|_V$ beágyazás.





nem a kettősvonalat kell elkerülni, hanem f-nek saját magát

Tfh $\gamma_1, \gamma_2 \subset V^2$

$\mathrm{lk}(f\circ\gamma_1, \hat{\gamma}_1) = \mathrm{lk}(f\circ\gamma_2, \hat{\gamma}_2)$

$H_1(V^2;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\text{izom}} H_1(M^2;\mathbb{Z}_2)$ ($\Rightarrow \gamma_1$ és γ_2 V^2-ben is homológok)

$\exists\, C$ lánc V-ben, melyre $\partial C = \gamma_1 - \gamma_2$.

$f\circ C$ diszj. $\hat{\gamma}_1$-től és $\hat{\gamma}_2$-től.

$\mathrm{lk}(f\circ\gamma_1, \hat{\gamma}_1) = \mathrm{lk}(f\circ\gamma_2, \hat{\gamma}_1)$

Mert ezek homológok $\hat{\gamma}_1$ kompl.-ban

$\mathrm{lk}(f\circ\gamma_2, \hat{\gamma}_1) = \mathrm{lk}(f\circ\gamma_2, \hat{\gamma}_2)$, mert $S(\nu_f)|_C$ homológia $\hat{\gamma}_1$ és $\hat{\gamma}_2$ között.

Tetsz. γ_1, γ_2-re:

$\gamma_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{mod}2}}{\simeq} \gamma_2$ M^2-ben $\exists\, \varphi_t$ diffeotópia: $\varphi_0 = \mathrm{id}$

$\varphi_1 : M^2 \setminus \{p\} \xhookrightarrow{\varphi_1} V$

$(p \notin \gamma_1, \gamma_2)$

$\gamma_1' = \varphi_1\circ\gamma_1$, $\gamma_2' = \varphi_1\circ\gamma_2$

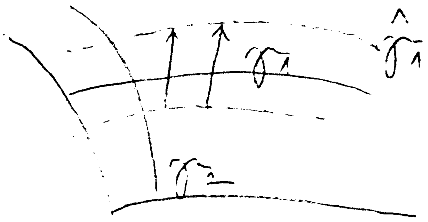
$f|_{U_{\gamma_1}}$ reg. homot. $f|_{U_{\gamma_1'}}$

$f|_{U_{\gamma_2}}$ reg. homot. $f|_{U_{\gamma_2'}}$

lk mod 4 nem változik egyiknél sem (történhet önmetszés)

$f|_{U_{\gamma_1'}}$-re és $f|_{U_{\gamma_2'}}$-re pedig $= -k$. □

Hasonlóan biz-ható (*): $q_{\gamma f}(x+y) = q_{\gamma f}(x) + q_{\gamma f}(y) + 2\langle x, y\rangle$



$V \subset M^2$, $f|_V$ beágyazás

$G_V(x,y) = \text{lk}(\gamma_1, \hat{\gamma}_2)$

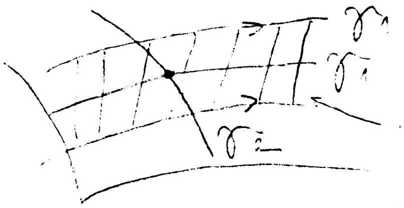
$x = [\gamma_1] \in H_1(M^2; \mathbb{Z}_2) = H_1(V; \mathbb{Z}_2)$

$y = [\gamma_2] \in$ —‖—

$G_V : H_1(M^2; \mathbb{Z}) \times H_1(M^2; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$

Áll. $G_V(x,y) \equiv \langle x, y\rangle \mod 2$.

Biz.



ezért csak mod 2, mert ennek a felületnek cr. értelemben nem határa a $\hat{\gamma}_1$ □

$q_{\gamma f}(x) \overset{\text{def}}{=} G_V(x,x) \mod 4$

Ez már $\mathbb{Z}_2$-homol. oszt. invariánsa:

$$G_V(x+y, x+y) = G_V(x,x) + G_V(y,y) + 2\underbrace{G_V(x,y)}_{\substack{\equiv \text{ mod } 2 \\ \langle x,y\rangle}}$$

$$G_V(x+2y, x+2y) = G_V(x,x) + 4(\dots)$$

$$q_{\gamma f}(x+y) = q_{\gamma f}(x) + q_{\gamma f}(y) + 2\langle x, y\rangle.$$ □

Követk. a) $\pi_{n+3}(S^n) \approx \mathbb{Z}_{24}$, $n \geq 5$

b) M^4 zárt spin $(w_1 = w_2 = 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 \mid \sigma(M^4)$

Biz. Bott periodicitás $\Rightarrow \pi_3(SO) = \mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow \text{Ker}\, j \longrightarrow \pi_3(SO) \xrightarrow{j} \underset{\pi_{n+3}(S^n)}{\overset{\|}{\pi_3(3)}} \xrightarrow{\Delta} \underset{(\text{nem egz.})}{\text{Imm}(2,1)} \longrightarrow 0$$

$$j_{k,l}: \underbrace{\pi_k(SO(l))}_{\overset{\cup\!\!|}{[\alpha]}} \longrightarrow \underset{j([\alpha])}{\pi_{k+l}(S^l)}$$ (J-homom.)

$S^k \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+l}$ st. beágy., st. tüske (ez 0-kobord.)

α-val megcsavarom a st. beágy. st. tüskézését.

ez a $j([\alpha])$ (a kobord osztály)

<u>HF</u>: ez homom.

Útm.: feltehető, hogy α az egyik félgömbön az egység (felfújjuk), β a másik félgömbön az egység, ezeket adjuk össze.

$k=3$, $l \gg 3$ $(l \geqq 5)$

$j: \pi_3(SO) \longrightarrow \pi_3(S)$

<u>Áll</u> j epi (azaz $\forall$ kobord oszt. repr.-ható gömbbel)

<u>Biz</u> $\Omega_3^{Spin} = 0$

Ω_n^G: G egy $(n+2)$-dim. repr.-val ellátott Lie-csoport. Pl. $Spin(n+2)$ (repr. a $Spin \to SO$ fedés-sel komponálva SO repr.-ját)

n-dim sok.-ok, stabil normálnyalábon G-strukt

legalább $n+2$ kodim.: $\forall 2$ beágy. izotóp

(nagydim. eukl. térbe téve a ν jóldef)

$\nu_M \approx P \times_G \mathbb{R}^{n+2}$ $P \xrightarrow{G} M$

$\rho: G \longrightarrow SO(n+2)$

Ilyenek kobord.-csoportja: $M_1^G \sim M_2^G$

stab. norm. nyalábon rögz. G-strukt.

$\partial(W^{n+1})^G = M_1^G - M_2^G$.

$\exists$ Thom-konstr.: $EG \xrightarrow{G} BG$

$\xi^G = \{EG \times_G \mathbb{R}^N \longrightarrow BG\}$ $T\xi^G$

$\pi_{n+N}(T\xi^G) \approx \Omega_n^G$, $N \gg n$

$G = Spin$

K $\Omega_3^{Spin} = 0$

Biz.: $\pi_{3+N}(T\xi^{Spin}) \overset{?}{=} 0$

Elég: $H_i(T\xi^{Spin}) = 0$, ha $i \leq 3+N$.

Thom izom. N-nel eltolja a homol-kat, így elég:

Sá $\pi_i(BSpin) = 0$, $i \leq 3$

Biz. Sá

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] & * \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] \\
BSO \arrow[r, "\omega_2"] & K(\mathbb{Z}_2,2)
\end{tikzcd}$$

X def:

$$\pi_i(K(\mathbb{Z}_2,1)) \to \pi_i(X) \to \pi_i(BSO) \to \pi_{i-1}(K(\mathbb{Z}_2,1))$$

$i > 2 \Rightarrow \pi_i(X) \approx \pi_i(BSO)$

$\pi_i(BSO) \approx \pi_{i-1}(SO)$ $\quad ESO \xrightarrow{SO} BSO$ -ból

$\overset{\uparrow}{\text{pontrahúzható}}$

$\pi_0(SO) = 0$

$\pi_1(SO) = \mathbb{Z}_2$

$\pi_2(SO) = 0$

$\pi_3(SO) = \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pi_3(X) = 0$, mert $\pi_3(BSO) = 0$

$\pi_1(BSO) = 0$

$\pi_2(BSO) = \mathbb{Z}_2$

A fibrálások egz. sorozata között indukálódik láncompl. leképezés:

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(K(\mathbb{Z}_2,1)) \arrow[r] & \pi_i(X) \arrow[r] & \pi_i(BSO) \arrow[r, "\approx"] \arrow[r, "\Uparrow"'] \arrow[d, "\approx \leftarrow i=2"] & \pi_{i-1}(K(\mathbb{Z}_2,1)) \arrow[d, "\approx"] \\
\pi_i(K(\mathbb{Z}_2,1)) \arrow[r] & \underset{0}{\pi_i(*)} \arrow[r] & \pi_i(K(\mathbb{Z}_2,2)) \arrow[r, "\approx"'] & \pi_{i-1}(K(\mathbb{Z}_2,1))
\end{tikzcd}$$

$H^2(BSO;\mathbb{Z}_2) = \langle \omega_2 \rangle$

$\pi_2(BSO) \underset{\text{Hurewicz}}{\xrightarrow{\approx}} H_2(BSO) = \mathbb{Z}_2 \ \langle D\omega_2 \rangle$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] & * \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] \\ BSpin \arrow[ur, "\approx"] \arrow[r] & BSO \arrow[r] & K(\mathbb{Z}_2,2) \end{tikzcd}$$

7. előadás

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "p"', "K(\mathbb{Z}_2,1)"] & * \arrow[d, "\overbrace{K(\mathbb{Z}_2,1)}^{K_1}"] \\ f: BSO \arrow[r, "w_2"] & \underbrace{K(\mathbb{Z}_2,2)}_{K_2} \end{tikzcd} \quad \Rightarrow X \text{ 3-öf.}$$

Á. $f_*: \pi_2(BSO) \longrightarrow \pi_2(K(\mathbb{Z}_2,2))$ izom.

$$\pi_2(BSO) = \pi_1(SO) = \mathbb{Z}_2 \qquad \pi_2(K(\mathbb{Z}_2,2)) = \mathbb{Z}_2$$

Biz

$$\begin{tikzcd} \pi_2(BSO) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "h"', "\approx"] & \pi_2(K(\mathbb{Z}_2,2)) \arrow[d, "\approx"', "h \text{ (Hurewicz)}"] \\ H_2(BSO) \arrow[r, "f_\#"'] & H_2(K(\mathbb{Z}_2,2)) \end{tikzcd}$$

$\pi_1(BSO) = \pi_0(SO)$

Univ. együttható formula:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underbrace{Ext(H_1, \mathbb{Z}_2)}_{\approx 0} \arrow[r] & H^2(BSO;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\approx"] & Hom(\overbrace{H_2(BSO)}^{\mathbb{Z}_2}, \mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & H^2(K(\mathbb{Z}_2,2);\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\approx"] \arrow[u, "\approx"'] & Hom(H_2(K(\mathbb{Z}_2,2)); \mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

$H_2(K(\mathbb{Z}_2,2))$

$H^*(BSO;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \dots] \qquad BSO \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} BO$ □

$$\begin{tikzcd} \pi_i(K_1) \arrow[r] & \pi_i(X) \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \pi_i(BSO) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\approx"] & \pi_{i-1}(K_1) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "id"', "\approx"] & \pi_{i-1}(X) \\ & 0 & \pi_i(K_2) \arrow[r, "\approx"'] & \pi_{i-1}(K_1) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$i=2 \qquad \underset{0}{\overset{\|}{\pi_2(K_1)}} \longrightarrow \pi_2(X) \longrightarrow 0 \Rightarrow \pi_2(X) = 0.$

$i=1$

$$\pi_2(K_1) \longrightarrow \pi_2(X) \xrightarrow{0} \pi_2(BSO) \xrightarrow{\approx} \pi_1(K_1) \xrightarrow{0} \pi_1(X) \to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\pi_1(BSO)} \to$$
$$\to \pi_0(K_1)$$

$$0 \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\pi_1(BSO)}} \quad \Rightarrow \pi_1(X) = 0.$$

$i=3$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2(SO) = 0 \\ \quad \shortparallel \\ \pi_3(BSO) = 0 \\ \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\pi_3(K_1)} \longrightarrow \pi_3(X) \longrightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\pi_3(BSO)} \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_3(X) = 0.$$

□

<u>Megj.</u> $p_* : \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(BSO)$ izom. $i \geq 3$.

<u>Á</u> $X \underset{\text{w.h.e.}}{\cong} BSpin$. $\quad Spin(n) \xrightarrow{n\geq 3} SO(n)$

$\uparrow$ univ. fedő

<u>Biz</u> $q: BSpin \longrightarrow BSO$

$\nwarrow$ amit a $Spin \to SO$ fedés indukál ($BSO = SO * SO * .. /\sim$)

$$\begin{tikzcd} * \arrow[d, "Spin"] & * \arrow[d, "SO"] \\ BSpin \arrow[r] & BSO \end{tikzcd}$$

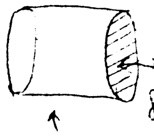
$q_* : \pi_i(BSpin) \to \pi_i(BSO)$ izom. $i \geq 3$

BSpin 3-öf. (mert Spin 2-öf.)

(pont. osztály 0-ba megy) $(w_2 \circ p)^*$-nál

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[d, "p"] & * \arrow[d, "K_1"] \\ BSpin \arrow[ur, "q'"] \arrow[urr, "\tilde{q}"] \arrow[r, "q"] & BSO \arrow[r, "w_2"] & K_2 \\ H: BSpin \times I \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

q': q és $\tilde{q}$-ből



$q'_* : \pi_i(BSpin) \longrightarrow \pi_i(X)$ izom. $\forall i$-re:

homot. felemelési tul. miatt 0-homot. lesz felemelhető

q_* is, p_* is izom $\Rightarrow$ q'_* is izom.

□

J epi

$\alpha \quad \Omega_3^{Spin} = 0.$

$$\begin{tikzcd} \xi_N = q^*\gamma_N^{SO} \arrow[d, leftrightarrow, "\mathbb{R}^N"] \\ BSpin(N) \end{tikzcd}$$

$$\overbrace{ESpin(N)}^{E} \times_{Spin(N)} \mathbb{R}^N \longrightarrow BSpin(N) = E/Spin(N)$$

$\qquad ||$

$\quad Spin(N) * \dots$

Thom konstr. $\Rightarrow \Omega_3^{Spin} = \pi_{N+3}(T\xi_N)$

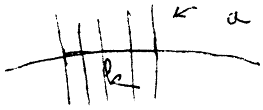
$N \gg 3$

Elég belátni, hogy $T\xi_N$ $(N+3)$-öf

$BSpin(N)$ 3-öf

$\exists$ CW felbontás: 1 db 0 cella és ≥ 4-dim cellák.

$(D\xi_N, S(\xi_N))$



← a k-cellából $(N+k)$-cella lesz

$T\xi_N$ 1 db 0-cella $\geq N+4$ -dim cella $\Rightarrow N+3$ -öf.

Máshogy ua: $\bar{H}_i(BSpin; \Lambda) = 0, \quad i \leq 3$ (nincsenek ilyen dim. cellák)

$\bar{H}^i(BSpin; \Lambda) = 0, \quad i \leq 3$

⇙ Thom-izom.

$\bar{H}^j(T\xi_N; \Lambda) = 0, \quad j \leq N+3.$ Univ. együtth.:

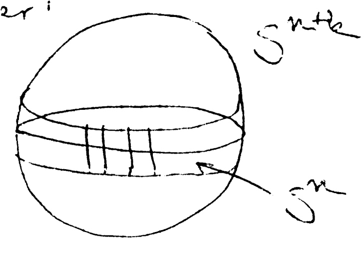
$$0 \to \dots \to \underset{\underset{0}{||}}{H^i(T\xi_N; \Lambda)} \longrightarrow \underbrace{Hom(H_i(T\xi_N), \Lambda)}_{=0 \ \forall \Lambda\text{-ra}} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ ($\mathbb{Z}_p$: p-komp)

$\Rightarrow H_i(T\xi_N) = 0.$

$\pi_1(T\xi_N) = 0$, Hurewicz $\Rightarrow \pi_j(T\xi_N) = 0, \ j \leq N+3.$

Hatcher:



$S^{n+k} = S^n \times D^k \cup D^n \times S^k$

$f: S^n \to SO(k)$

$\pi_n(SO(k)) \xrightarrow{J} \pi_{n+k}(S^k)$

$$S^{n+k} = S^n \times \underset{\{x\}\times D^k}{D^k} \cup \underbrace{S^k \times D^n}$$

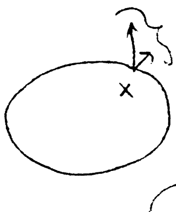
$$S^k$$

Déli pólusba

$\{x\} \times D^k$-t megcsavarjuk $f(x)$-szel, majd D^k-t ráképezzük S^k-ra, hogy ∂D^k D-be menjen

$$\pi_k(SO(l)) \xrightarrow{J_{k,l}} \pi_{k+l}(S^l)$$

$f: S^k \to SO(l)$ ezzel megcsavarjuk a st. tüskézést



l db st. tüske

$S^k \subset \mathbb{R}^{k+l}$

$\cap \qquad \cup$ ← l-1 db függőleges

$\mathbb{R}^{k+1}$

külső normális

$l > k+1 \Rightarrow J_{k,l} = J_k$ = k-ik stabil J-homom.

(↳ l-et növelve szuszpenzió, ami nagy l esetén izo.)

J_3 szürj. ($J_2 = 0$ volt $\Pi^S(2)$ kiszámolásánál)

Biz.

$W^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+4}_+$, repr. egy $\alpha \in \Pi^S(3)$-at.

$(M^3, U) \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+3}$

normálnyaláb triv., tehát spec. megad egy spin-struktúrát

0-kobord., mint Spin 3-sokaság

ν_W ← Spin

$p_1, \dots, p_k$ a W^4 4-celláinak kp.-jai

$\nu_W|_{W \setminus \amalg p_i}$ = triviális, sőt az U trivializáció kiterjed ide

← kiterjeszthető $sk_3 W$-re

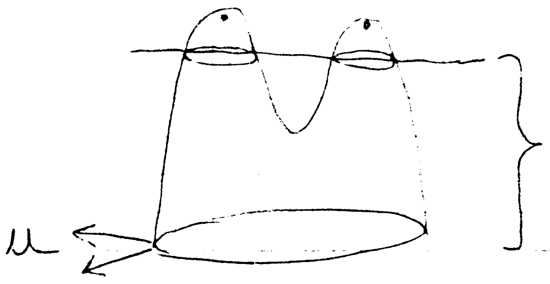
$$\begin{tikzcd} \nu_W : W \arrow[r] & BSpin \\ M^3 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "u"] & * \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

$sk_3 W \to BSpin$ 0-homotóp.

← 3-öf

$\exists$ $W^4 \setminus \amalg D^4_{p_i}$ fölött V tüskézés, mely kiterjeszti az U-t.

jó Morse-fv.



$W \setminus \coprod D_{p_i}$

tükr. kobord. (M^3, U) és gömbök között.

$\Rightarrow [(M^3, U)] \in \operatorname{im} j$. □

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} j \longrightarrow \underset{\substack{\| \text{ Bott-peri.} \\ \mathbb{Z}}}{\pi_3(SO)} \xrightarrow{j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cikl.}\ \mathbb{Z}_n \text{ (vagy } \mathbb{Z})}}{\pi_s(3)} \longrightarrow 0$$

Áll. $\exists\ \pi_s(3) \to \mathbb{Z}_8$ epi.

Biz. $f : M^3_{ir.} \looparrowright \mathbb{R}^4$

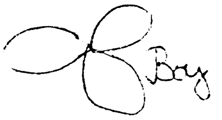
$\pi_s(3) = \operatorname{Imm}^{SO}(3,1)$ a kiegyenesítési t. miatt

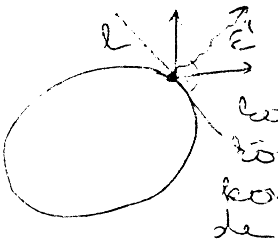
$\operatorname{Imm}^{SO}(n,k) \approx \pi^s_{n+k}(MSO(k))$ $k=1$: $MSO(1) = S^1$

$\underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\operatorname{Imm}(S^3, \mathbb{R}^4)} \neq \underset{\mathbb{Z}}{\operatorname{Imm}(S^3, \mathbb{R}^5)}$

$$\operatorname{Imm}^{SO}(3,1) \xrightarrow{\overset{\text{kettőspontok}}{\Delta}} \operatorname{Imm}(2, 1 \oplus 1)$$

ε^1 $\ell \leftarrow$ az ε^1-re $\perp$ irány





kettőspontokban 2 db tükre, tükrenként a kettőspontokon a 2 megcserélődhet, de az összeg állandó. → → ez ad egy ε^1 trivializálást a kettőspont környezetében

$\tilde{\Delta}(f) = \{(x,y) \mid f(x) \overset{x \neq y}{=} f(y)\}$
$\subset$ 4-kodim

$$M^3 \times M^3 \xrightarrow{f \times f} \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$$

(x,x) $\quad (x,y)$ $\quad$ $\cup$ 4-kodim

$f(x) = f(y)$ $\quad \Delta(\mathbb{R}^4)$

$\tilde{\Delta}(f)$-en szabadon hat $\mathbb{Z}_2$: $(x,y) \mapsto (y,x)$ $(x \neq y)$

$\Delta(f) = \tilde{\Delta}(f) / \mathbb{Z}_2$

$g : \Delta(f) \looparrowright \mathbb{R}^4$

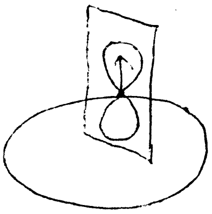
$[x,y] \xrightarrow{g} f(x)\ (= f(y))$

$\mathrm{Imm}(2, 1 \oplus 1)$

$\cong\downarrow$ Hirsch e. (izomorfizmus)

$\mathrm{Imm}(2,1) = \mathbb{Z}_8$

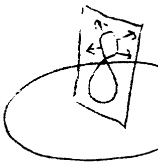
$\Delta : \pi_s(3) \longrightarrow \mathbb{Z}_8$ epi.:



$F^2, \Sigma^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ mint kettősponthalmaz?

8-as konstr. (Koschorke)

∀ normáltérbe egy 8-as, hogy Σ^1 a középvonalba essen. A kapott 3-sokaság irányított: van normálvektora (következménye: a 8-as megfordulhat, de normálvektor normálvektorba megy:



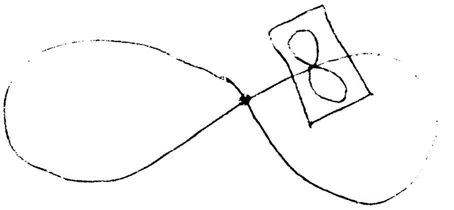
$\Delta : \pi_s(3) \longrightarrow \mathbb{Z}_8$

$f : M^3 \looparrowright \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\Delta} [F^2 \looparrowright \mathbb{R}^3]$ ← kobord. oszt.

↓ felemeljük, ha beágyazás, alkalmazhatjuk a 8-as konstr.-t (Fox nem [illegible] beágyazásra)

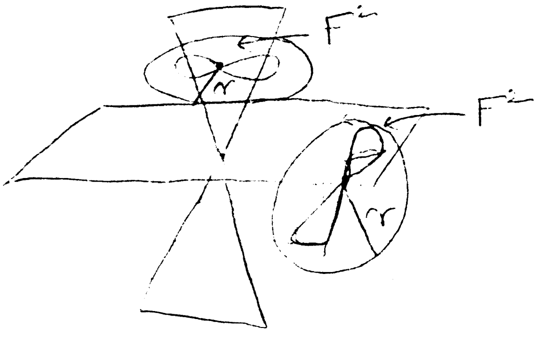
$\mathbb{R}^4$

$g : F^2 \looparrowright \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ ált helyzetben nem beágyazás.



Alk. a 8-as konstr.-t kettőspontokként kapjuk F^2 imm.-ját + ∀ kettőspontból 1 tórusz:

← immerzált



kettőspont: ha mindkét koord a 8-asba esik:

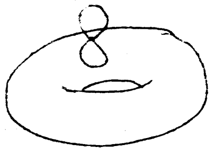
$S^1 \times S^1 \xrightarrow{8\times 8} D^2 \times D^2 \subset \mathbb{R}^4$

$* \Big\{$ Elég belátni, hogy ∀ irányított felület immerziójának kobord. osztályát megkapom kettőspontként.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Imm}^{SO}(2,1) = \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathrm{Imm}^{SO}(3,1) \arrow[r, "\Delta"] & \mathrm{Imm}(2,1) = \mathbb{Z}_8 \end{tikzcd}$$

(*): $\operatorname{im}\Delta \supset \operatorname{im}\varphi$ (a tóruszok felemelhetők beágyazássá ⇒ működik a 8-as konstr., a tóruszok előállnak kettőspontként, az ezt levonva az F^2 immerziójának kobord. osztályát kapjuk kettőspontként)

$\mathrm{Imm}^{SO}(2,1)$-ben a generátor repr. $\mathbb{R}^3$-ba beágyazott felülettel. Működik a 8-as konstr.



□

$\pi^s(3)$ cikl., a rendje 8-cal osztható. (vagy $= \mathbb{Z}$)

8. előadás

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & & \mathbb{Z}_8 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} j \arrow[r] \arrow[d, "\frac{3}{2}\sigma(\hat{M})"] & \pi_3(SO) \arrow[r] \arrow[d, "\approx" ', "\frac{1}{2}p_1[\xi_f]"] & \pi^s(3) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\ & \mathbb{Z} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{Z} & & \end{tikzcd}$$

$\pi_3(SO) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$[f] \in \pi_3(SO) = \mathrm{Vect}^{s}(S^4)$ stabil

$\xi_f \longrightarrow S^4$ (a két félgömbön triv., f a rag. leképz. az egyenlítőnél)

$\mathrm{Vect}_n(X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Vect}_{n+1}(X)$ izo., ha $\dim X < n-1$ (volt)

$\eta \longmapsto \eta \oplus \varepsilon^1$

$$\frac{1}{2}\langle p_1(\xi_f), [S^4]\rangle = \frac{1}{2}p_1[\xi_f]$$

$p_1(\xi)$ páros osztály $\in H^4(S^4;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

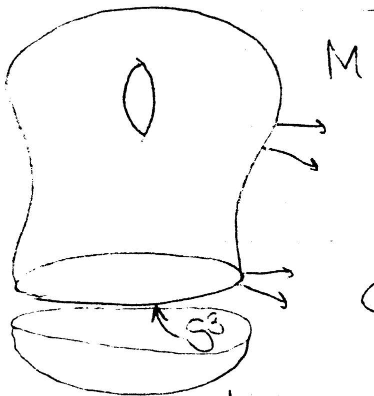
$\xi \longrightarrow S^4$

mert HF volt: $p_k(\xi) \equiv w_{2k}^2(\xi)$,

$p_1(\xi) \equiv w_2^2(\xi)$, de $w_2(\xi) = 0$, mert $H^2(S^4;\mathbb{Z}_2) = 0$.

$p_1(\gamma^1_{\mathbb{H}}) = -2 \cdot$ gener.

$\Rightarrow \pi_3(SO) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ izo. ($p_1[\xi_f]$ páros egészeket vesz fel, és $\gamma^1_{\mathbb{H}}$ miatt a $-2 \in$ kép $\subset 2\mathbb{Z}$)



$\hat{M} = M^4 \cup D^4$

↑ S^3 standard módon $\mathbb{R}^N$-ben

$\frac{3}{2}\sigma(\hat{M})$

$\hookrightarrow \mathbb{R}^N$

(Kérd: 0 kobordáns tüskézett gömbök)

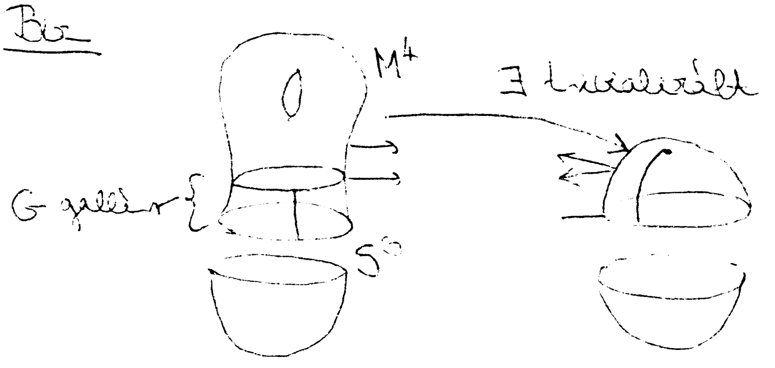
$\nu \longrightarrow \hat{M}$ stabil norm. nyalábja

$\nu = M^4 \times \mathbb{R}^N \underset{f}{\cup} D^4 \times \mathbb{R}^N$

(A D^4 standard tüskézése és M^4 tüskézése között éppen f az áttérés.) ← a stab. norm. nyaláb trivializációja

Áll.
$\langle p_1(\nu), [\hat{M}^4] \rangle = \langle p_1(\xi_f), [S^4] \rangle$

Biz.



∃ trivializált nyalábleképezés

$$\begin{tikzcd} M^4 \times \mathbb{R}^N \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}^N \arrow[d, equal] \\ S^4_+ \times \mathbb{R}^N \arrow[r] & \mathbb{R}^N \end{tikzcd}$$

↑ a trivializációkat is egymásba viszi

+ a peremen diffeo ($S^3 \to S^3$)

$M^4 \setminus G \longrightarrow$ É pólus, ($G \longrightarrow$ felső félgömb)

G alkotói → negyedkörökbe.

vektorterek – a tüskézés által mutatott módon.

$$\begin{tikzcd} \nu \arrow[r] \arrow[d] & \hat{M} \arrow[d, "1\text{-fokú (alul 1 db ős)}"] \\ \xi_f \arrow[r] & S^4 \end{tikzcd}$$

(ν-t indukáltuk ξ_f-ből 1-fokú

leképezéssel) $\quad \nu = \varphi^* \xi$

$$\langle p_1(\nu), [\hat M]\rangle = \langle p_1(\varphi^*\xi), [\hat M]\rangle = \langle \varphi^* p_1(\xi), [\hat M]\rangle =$$

$$= \langle p_1(\xi), \varphi_*[\hat M]\rangle = \langle p_1(\xi), [S^4]\rangle. \quad \square$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} j \arrow[r] \arrow[d, "\frac{1}{2}p_1(\nu) = -\frac{3}{2}\sigma(\hat M)"'] & \pi_3(SO) \arrow[d, "\frac{1}{2}p_1{[\xi_f]}"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$$p_1[\nu] \underset{\uparrow}{=} -p_1[\hat M]$$

$\nu \oplus T\hat M =$ triv, $\quad p(\eta \oplus \xi) = p(\eta) \cup p(\xi) +$ 2-rendű elemek

$\Rightarrow \quad 0 = p_1(\eta) + p_1(\xi) +$ 2-rendű elemek $\longleftarrow$ kiértékeléskor eltűnik

<u>4-dim σ-formula</u> (signatúra): N^4 zárt, sima, ir. sok.

$$p_1[N^4] = 3\sigma(N^4)$$

<u>Biz</u> $\quad$ rk $\Omega_4 = 1 \qquad (\Omega_4 \approx \mathbb{Z})$

$$\Omega_4 \xrightarrow[\sigma(\ )]{p_1[\ ]} \mathbb{Z} \qquad \begin{aligned} p_1(\mathbb{C}P^2) &= 3 \cdot \text{gener} \\ \sigma(\mathbb{C}P^2) &= 1 \end{aligned}$$

$\square$

<u>Áll</u> $\quad S_4 \overset{i}{\subset} \mathbb{C}P^3 = \{z_0 : z_1 : z_2 : z_3\} \qquad$ (vagy: K3 felület)

$$S_4 = \{z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$$

$\nwarrow$ (sokaság, mert grad $= 0 \Leftrightarrow \forall z_i = 0$, de ez $\notin \mathbb{C}P^3$)

1.) S_4 majdnem paral. $\quad$ ($S_4 \setminus \{1 \text{ pont}\}$ paral.)

2) $\sigma(S_4) = -16$

<u>Biz</u> 2) $\quad i_*[S_4] = ? \qquad H^*(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[y]/_{y^4=0}$

$$D_{\mathbb{C}P^3}\, i_*[S_4] = ky, \quad k = ?$$

$$k = \langle ky \cup y^2, [\mathbb{C}P^3]\rangle$$

$$D(ky \cup y^2) = [S_4 \cap \mathbb{CP}^1] = 4 \text{ pont}$$

$\mathbb{CP}^1$ = két $\mathbb{CP}^2$ metszete, azaz a $z_0^4+\dots+z_3^4=0$ egyenlethez két lin. egyenletet veszünk hozzá → 1 db

2-változós homogén → 1-változós polinom, 4-edfokú ⇒ 4 db gyök

$$ky \cup y^2 = 4 \cdot \text{gener.} \Rightarrow k=4.$$

$$\langle p_1(\nu_i), [S_4]\rangle = ?$$

$$p_k\left(\eta^{2k}_{\mathbb{R}\, ir.}\right) = e^2\left(\eta^{2k}_{\mathbb{R}}\right)$$

$x_1,\dots,x_{2k}$ $y_1,\dots,y_{2k}$ ← ir.

$$\text{Re} \to \eta^{2k}_{\mathbb{R}} \oplus \eta^{2k}_{\mathbb{R}} \leftarrow \text{Im}$$

$$(-1)^k c_{2k}\left(\eta^{2k}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}\right) = (-1)^k e\left(\eta^{2k}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}\right) = \cancel{\pm}\, e^2\left(\eta^{2k}_{\mathbb{R}}\right)$$

ir.: $z_1,\dots,z_{2k}$

$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{2k}, y_{2k}$

$\binom{2k}{2}$ csere

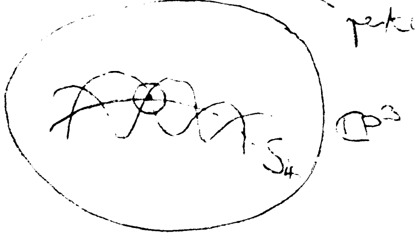
$$\langle p_1(\nu_i), [S_4]\rangle = \langle e^2(\nu_i), [S_4]\rangle = 64$$

perturbáció $\cap S_4$ kétszer, ennek metszete

$\parallel$

S_4 3-szoros önmetszése

$$4y \cup 4y \cup 4y = 64y^3$$



$$T\mathbb{CP}^3\big|_{S_4} = TS_4 \oplus \nu_i$$

$$\underbrace{p_1\left(T\mathbb{CP}^3\big|_{S_4}\right)}_{i^* p_1(\mathbb{CP}^3)} = p_1(S_4) + p_1(\nu_i). \quad \text{(majd kiértékeljük)}$$

$$i^* 4y^2 = p_1(S_4) + p_1(\nu_i)$$

$$3\sigma(S_4) \underset{\uparrow}{=} \langle p_1(S_4), [S_4]\rangle = \underbrace{\underbrace{\langle i^* 4y^2, [S_4]\rangle}_{\langle 4y^2,\ 4[\cancel{\mathbb{CP}^3}]\rangle \ = \ 16} - \underbrace{\langle p_1(\nu_i), [S_4]\rangle}_{64}}_{-48}$$

sign. form.

$$\Rightarrow \sigma(S_4) = -16.$$

□

Így $w_2(S_4) = 0$.

Á Spin 2 def.-ja megegyezik

Biz

$$\begin{tikzcd}
BSpin \arrow[r, "\cong", "w.h.e"'] \arrow[dr] & X \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,1)"] \\
& BSO \arrow[r, "w_2"] & K(\mathbb{Z}_2,2) \\
B \arrow[uu, "\text{felemelés}"] \arrow[ur, "\xi"] & &
\end{tikzcd}$$

Áll

$\overrightarrow{1.)}$ $w_2(\xi)=0 \Rightarrow$ felemelhető

$w_2(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi$ struktúra csop.-ja red. spin-re.

$\overleftarrow{2)}$ felemelhető $\Rightarrow w_2(\xi)=0$, mert BSpin 3-öf.,

így $H^2_{\mathbb{Z}_2}(BSpin)=0$.

ξ ir. nyaláb $\to B$

$\xi|_{sk_2 B}$ triv. $\overset{\xrightarrow{1.)}}{\underset{\xleftarrow{2)}}{\Leftrightarrow}}$ ξ str. csoportja red. Spin-re

$\Downarrow \pi_2(SO)=0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$

$\xi|_{sk_3 B}$ triv. $\Rightarrow w_2(\xi|_{sk_3 B}) = 0 \Rightarrow w_2(\xi)=0$

$\overleftarrow{2)}$ ξ str. csop.-ja Spin $\Rightarrow$ BSpin-ből indukálható,

$\xi: B \to BSpin \Rightarrow \xi|_{sk_2 B} =$ triv

$sk_2 B$-n pontosabban. □

Spin struktúrák száma: $H^1(B;\mathbb{Z}_2)$ 1 def.-ből

$BSpin \xrightarrow{K(\mathbb{Z}_2,1)} BSO$

$[B, K(\mathbb{Z}_2,1)] \to [B, BSpin] \to [B, BSO]$ egz.

$\uparrow$ (H-tér) $\qquad \uparrow$ halmazok kitüntetett elemmel

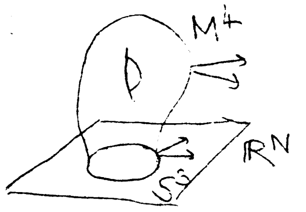
9. előadás

a) $\pi_s(3) = \mathbb{Z}_{24}$

b) M^4 spin $\Rightarrow 16 \mid \sigma(M^4)$

Biz

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathbb{Z}_8 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, j \arrow[r] \arrow[d, "-\frac{3}{2}\sigma(\hat{M})"] & \overset{\mathbb{Z}}{\overset{\|}{\pi_3(SO)}} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\frac{1}{2}p_1{[\xi_f]}"] & \pi_3(G) \arrow[ru] \arrow[r] & 0 \\
 & \mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Z} & &
\end{tikzcd}$$



$$\hat{M}^4 = M^4 \underset{S^3}{\cup} D^4$$

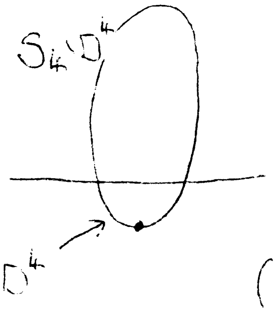
S_4 $\mathbb{CP}^3$-ban homogén 4-edfokú (gener.) felület

$S_4 = \{z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$ ← bármilyen homog. 4-edfokú egyenletet vehetnénk, diffeom. lenne

1.) $w_2(S_4) = 0$

2.) $\sigma(S_4) = -16$

Biz. befejezése: $S_4 = \hat{M}$



(S_4 így elhelyezhető $\mathbb{R}^N$-ben: egy ponttól mért távolság az N. koord. fv. ⇒ 1 db absz. min.)

Á: $\xi \to B$ ir. vnyaláb, B CW-kompl.

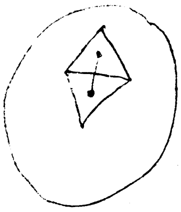
$w_2(\xi) = 0 \iff \xi|_{sk_2 B}$ triv. $\Rightarrow \xi|_{sk_3 B}$ triv.

$$\begin{tikzcd}
 & BSpin \cong X \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2{,}1)"] \\
B \arrow[ru] \arrow[r] & BSO \arrow[r, "w_2"] & K(\mathbb{Z}_2{,}2)
\end{tikzcd}$$

Á $\underset{\xi = \nu_{S_4}}{\Longrightarrow}$ $\nu_{S_4}|_{sk_3 S_4}$ triv. ($w_2(\nu_{S^4}) + w_2(S^4) = w_2(\mathbb{R}^N|_{S^4}) = i^* w_2(\mathbb{R}^N) = 0$, ~~$w_2(\mathbb{CP}^3) \equiv c_1(\mathbb{CP}^3) = = 4x \equiv 0$~~ mod 2)

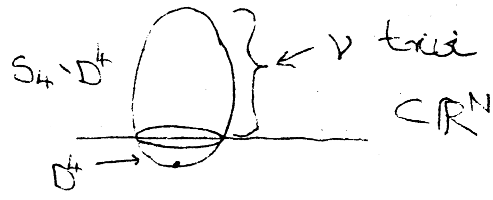
V^n zárt, $V^n \setminus pt \xrightarrow{retr.} sk_{n-1} V^n$:

V^n-nek tek. szimpl. felbontását, $pt \in$ max dim szimplex belseje



$V^n \setminus pt \overset{\text{diffeo.}}{\approx} V^n \setminus$ duális felb. 1-vázának fesz. fája,
ez retrahálható $sk_{n-1} V^n$-re.
(Vagy: $\exists$ Morse-fv. 1 db maximummal)

$\Rightarrow$ ν triv $S_4 \setminus D^4$-en !



(ν trivializációja adja
$S^3 = \partial D^4$ tükrözését, ez
$\in \operatorname{Ker} j$, amire $-\frac{3}{2}\sigma(M) = -\frac{3}{2}\sigma(S_4) = 24$)

$\operatorname{Ker} j = n \cdot \mathbb{Z}$

$\pi_s(3) = \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_8$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 8 \mid n \\ 3 \mid n \end{array}\right\} \Rightarrow 24 \mid n \\ \text{De } 24 \in n\mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow n = 24.$$

□

Á $w_2(S_4) = 0$

Biz $i : S_4 \hookrightarrow \mathbb{C}P^3$ $\quad y \in H^2(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z}),\ x = i^* y$

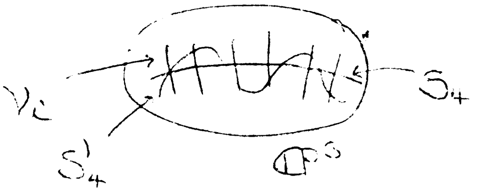
$$c_1(S_4) + \overset{=4x}{c_1(\nu_i)} = i^* \overbrace{c_1(\mathbb{C}P^3)}^{4y} = 4x$$

$\Uparrow$ Wh. szor. form.

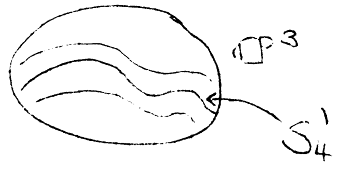
$$TS_4 \oplus \nu_i = T\mathbb{C}P^3 \big|_{S_4} = i^*(T\mathbb{C}P^3)$$

$$c_1(\nu_i) \underset{\uparrow}{=} e(\nu_i) = D_{S_4}[i^{-1}(S_4')]$$

ν_i komplex vonalnyaláb



$S_4 \xrightarrow{\ i\ }$



$D_{\mathbb{C}P^3}[S_4'] = \underset{\uparrow \text{volt}}{4y}$ $\Rightarrow$ $e(\nu_i) = i^* 4y = 4x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow c_1(S_4)=0 \quad \Rightarrow w_2(S_4)=0.$ □

Áll η komplex vnyaláb

$$c_i(\eta) \bmod 2 = w_{2i}(\eta)$$
$$w_{2i+1}(\eta) = 0$$

$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$ -ből hosszú egz.:

$H^i(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{2} H^i(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{mod}2} H^i(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta=\text{Bockstein}}$
$\to H^{i+1}(X,\mathbb{Z})$

Biz Felhas. lemma:

$\eta = l_1 \oplus \dots \oplus l_n \qquad c(\eta) = \prod_{j=1}^{n}\left(1+\overset{e(l_j)}{\overset{\shortparallel}{c_1(l_j)}}\right)$

$$w(\eta) = \prod_{j=1}^{n}\left(1+w_2(l_j)\right)$$

$\forall\, l_j$-re igaz $\Rightarrow$ η-ra is. □

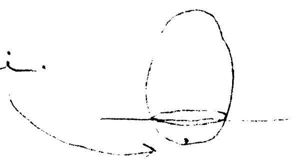
Áll $p_k(\eta^{2k}) = e^2(\eta^{2k})$

Biz

$$p_k(\eta^{2k}) = (-1)^k c_{2k}(\eta^{2k}\otimes\mathbb{C}) = (-1)^k e(\eta^{2k}\oplus\eta^{2k}).$$
$$\cdot(-1)^{\binom{2k}{2}} = \frac{2k(2k-1)}{2} \qquad = e^2(\eta^{2k}).$$ □

Biz b) $\forall\, V^4_{spin}$ 4-sokaság tud $\hat{M}$ lenni.

$$-\frac{3}{2}\sigma(V^4) \in 24\mathbb{Z} \Rightarrow 16 \mid \sigma(V^4)$$



mint S_4 esetben

Megj. $\pi_3(SO)=\mathbb{Z}$ elhagyható a Bott per.

Mert: Látjuk, hogy BSpin 3-öf

$$\pi_3(SO) \approx \pi_3(Spin) \underset{\uparrow}{\approx} \pi_4(BSpin) \underset{\uparrow}{=} H_4(BSpin)$$

$\underset{\overset{\shortparallel}{*}}{ESpin} \xrightarrow{Spin} BSpin \qquad BSpin\ 3\text{-öf}$

Látni fogjuk: $\begin{cases} H^*(BSpin;\overset{\frac{1}{2}\in\Lambda}{\mathbb{Z}_p}) = H^*(BSO;\overset{\Lambda}{\mathbb{Z}_p}) = \mathbb{Z}_p[p_1,p_2,\dots] \\ H^4(BSpin;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \quad (w_4 \text{ generálja}) \end{cases}$

Univ. együtth. $\Rightarrow H_4(BSpin) = \mathbb{Z}$.

$$0 \to \mathrm{Ext}(\overset{=0}{H_3}, G) \to \overbrace{H^4(BSpin; G)}^{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{\approx} \underbrace{\mathrm{Hom}(H_4(BSpin); G)} \to \overset{\neq 0}{0}$$

↖(p generálja) $\Longrightarrow$ $= \mathbb{Z}_p$

$\Rightarrow H_4(BSpin) = \mathbb{Z}$ (egyszerű, $\mathbb{Z}^k \oplus \mathrm{Tors}$) □

$\pi_3(3) \approx \mathrm{Imm}^{SO}(3,1)$

HF volt! $\mathrm{Imm}^{SO}(n,k) \approx \pi^s_{n+k}(MSO(k))$

<u>Biz.</u> <u>Hirsch lemma</u>: $f: M^n_{1,\nu} \looparrowright \mathbb{R}^{\underbrace{n+k}_{q}+1}$, $k \geq 1$

↖ 1 db normálmező

$f \xrightarrow[\text{reg. homot.}]{} g: M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$

Hirsch t.: $\pi_0(\mathrm{Imm}(M^n, \mathbb{R}^{q+1})) \longleftrightarrow \pi_0(\mathrm{Mono}(TM, \mathbb{R}^{q+1}))$

↖ MONO reléxi

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{MONO}(TM, \mathbb{R}^q) \arrow[r, hook] \arrow[d, "V_n(\mathbb{R}^q)"] & \mathrm{MONO}(\underbrace{TM \oplus \varepsilon^1}, \mathbb{R}^{q+1}) \arrow[d, "V_{n+1}(\mathbb{R}^{q+1})"] \\
M^n \arrow[u, bend left] \arrow[r, equal] & M^n \arrow[u, bend left, "s = s_{f,\nu}"]
\end{tikzcd}$$

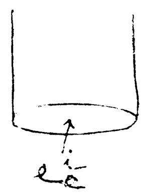
↑ fibrumonként lekép. (hozzávesszük a $q+1$-ik irányt)

$\pi_i(V_{n+1}(\mathbb{R}^{q+1}), V_n(\mathbb{R}^q)) \underset{\Uparrow}{\approx} \pi_i(S^q) = 0$ ha $i < q$

$V_{n+1}(\mathbb{R}^{q+1}) \xrightarrow{V_n(\mathbb{R}^q)} S^q$

M^n cellái dim. szerinti ind.-val átdef.-juk s-et egy $V_n(\mathbb{R}^q)$-ba ~~men~~ menőt.

Cella fölött a nyaláb trivi



$$\begin{tikzcd}
e^i_\varepsilon \times V \arrow[d] & \supset e^i \times V' \\
e^i \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}$$

Ind. felt: $\partial e^i \longrightarrow V'$ $\pi_i(V, V') = 0$

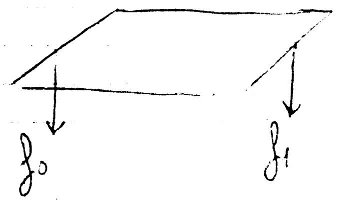
$e^i \xrightarrow[(s)]{} V$ $i \leq n < q$ □

$$\begin{tikzcd}
\partial e^i \arrow[r] & V' \\
e^i \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "(s)"'] & V
\end{tikzcd}$$

$\pi_0(\mathrm{Imm}(M^n, \mathbb{R}^q)) \xrightarrow[\text{szürj.}]{n<q} \pi_0(\mathrm{Imm}_\gamma(M^n, \mathbb{R}^{q+1}))$

Ha $n < q-1$. inj.↑

Biz Ua. $M^n \times [0,1]$ fölött



(két $\mathrm{Imm}(M^n, \mathbb{R}^q)$-beli leképez. képe $\mathrm{Imm}_\nu(M^n, \mathbb{R}^{q+1})$-ben reg. homot. ← + függőleges tükrök, a homotópiát nyomjuk össze $\mathbb{R}^q$-ba úgy, hogy a peremen adott (fix)) ☐

Pl $\pi_0(\mathrm{Imm}(S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$\pi_0(\mathrm{Imm}(S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5)) = \mathbb{Z}$

$f: S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5 \qquad \nu_f = \text{triv}$

$\forall\ \xi \xrightarrow{\mathbb{R}^2} S^3$ triv

$\pi_2(SO(k)) = 0$-ból izom. a ragasztó leképez.

ν_f trivial.-ja egyért., mert $\pi_3(SO(2)) = 0$.

Tehát $n < q-1$ szükséges.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, j \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_3(SO) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_s(3) \\
\pi_0(\mathrm{Emb}(S^3, \mathbb{R}^5)) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, equal] & \pi_0(\mathrm{Imm}(S^3, \mathbb{R}^5)) \arrow[d, equal] & \\
24\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \quad S^3 \longrightarrow SO(5) &
\end{tikzcd}$$

← csoport öf. művelet

↖ perem

Áll.:

$$\pi_{4k-1}(SO) = \mathbb{Z}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z} & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, j_{4k-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_{4k-1}(SO) \arrow[u, equal] \arrow[r, "j_{4k-1}"] & \mathrm{Im}\, j_{4k-1} \subset \pi_s(4k-1) \\
 & m_k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} & &
\end{tikzcd}$$

Ekkor: $m_k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

$$\frac{m_k}{n_k} = \frac{B_k}{4k} \qquad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k>1} (-1)^{k-1} \cdot B_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$(n_k, m_k) = 1$

HF volt: $\mathrm{Imm}^{SO}(n,k) \approx \pi^s_{n+k}(MSO(k))$

Biz$_{HF}$ $\mathrm{Imm}^{SO}(n, \underbrace{k \oplus \varepsilon^j}_{\text{k+j kodim j db tükrözéssel}}) \xrightarrow{1-1} \mathrm{Imm}^{SO}(n, k \oplus \varepsilon^{j+1})$

↖ Hirsch l., ha $k \geq 1$, $j \geq 0$ ⇒ triv.

Ha $k+j \geqq 2 \Rightarrow$ inj. $\quad (n < q-1 \ , \ q = n+k+j)$

$$\mathrm{Imm}^{SO}(n,1) \overset{?}{\approx} \mathrm{Imm}^{SO}(n, 1 \oplus \varepsilon^1)$$

$$\mathrm{Emb}^{SO}(n, k \oplus \varepsilon^N) = \pi_{n+k+N}(S^N MSO(k)) \qquad \gamma_k \oplus \varepsilon^N \downarrow BSO(k)$$

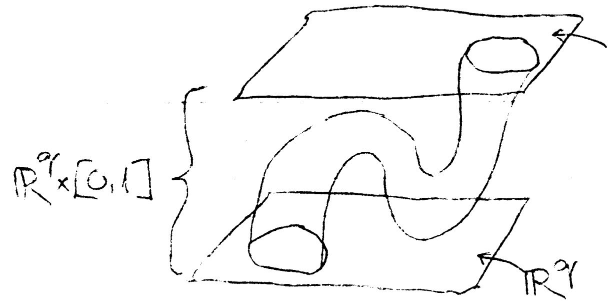
← nagy N-re Emb = Imm

$$T(\gamma_k \oplus \varepsilon^N) = S^N T\gamma_k$$

Tehát $k>1$-re kész.

$$k=1: \quad \mathrm{Imm}^{SO}(n,1) \xrightarrow[\text{szürj.}\checkmark]{1-1} \mathrm{Imm}^{SO}(n, 1 \oplus \varepsilon^1)$$

inj.? Injektív a pszeudohomotópiák szintjén



$\leftarrow M_0 : f_1$

$\hookleftarrow M_0 \times [0,1] : H$

$\leftarrow M_0 : f_0$

$$f_0, f_1 : M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1} \overset{i}{\subset} \mathbb{R}^{n+2}$$

$$i_0 \circ f_0, \nu_0 \underset{\text{reg. homot.}}{\sim} i \circ f_1, \nu_1 \quad : H_t$$

$$T(M \times [0,1]) \longrightarrow T(\mathbb{R}^{n+1} \times [0,1])$$

$$v, \frac{\partial}{\partial t}$$

$$dH_t \oplus \nu_t$$

Koschorke $\quad \mathfrak{N}_n\left(\begin{matrix}2n-1\\2n-2\\2n-3\end{matrix}\right) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Imm}(n, n-1)$

Wells $\quad \mathrm{Imm}(n,n) \xrightarrow{\approx} \mathfrak{N}_n \oplus \mathbb{Z}_2$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	$\mathbb{Z}_2 (S^1)$	0	0	0	0	0
2	$\mathbb{Z}_8 (\mathbb{R}P^2)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ $S^2, \mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$ $(\mathbb{R}P^2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}_2$ S^3	$\mathbb{Z}_2$ S^3	$\mathbb{Z}_2$ S^3	0	0	0
4	0	$\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$

$\mathcal{N}_4 = [\mathbb{R}P^4], [\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2]$

$w_4 \quad w_2^2 \quad w_1^2 w_2 \quad w_1 w_3 \quad w_1^4$

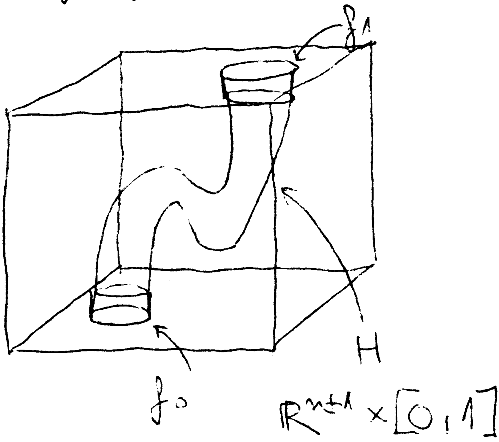
10. előadás

$\mathrm{Imm}(n,1) \approx \mathrm{Imm}(n, 1 \oplus \varepsilon^1)$

$f_0, f_1 : (M^n, \varepsilon^1) \looparrowright \mathbb{R}^{n+2}$ reg. homot. $\not\Rightarrow$ f_0, f_1 reg. homot.

$f_0, f_1 : M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ $\Downarrow ?$

f_0, f_1 pszeudo reg. homot.



$H : M \times [0,1] \looparrowright \mathbb{R}^{n+1} \times [0,1]$

$H(x,0) = (f_0(x), 0)$

$H(x,1) = (f_1(x), 1)$

Hirsch t. relatív vált.

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, tail, "\phi"] \arrow[d] & TN \arrow[d] \\ K \subset U_K \subset M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

K kompakt $\subset M$, U_K körny.

$f : U_K \looparrowright N$

$df = \phi$

$\Rightarrow \exists g : M \looparrowright N, \ g|_K = f$ és $dg \cong \phi$

$\uparrow$ Monok körében homotópok

Kell: H

Def.-unk ϕ : $T(M \times I) \rightarrowtail T(\mathbb{R}^{n+1} \times I)$

$$\begin{tikzcd} T(M \times I) \arrow[d, "\pi"] \\ M \times I \end{tikzcd}$$

$\phi|_{\pi^{-1}(M \times [0,\varepsilon])} = d(f_0 \times id_I)|_{\pi^{-1}(M \times [0,\varepsilon])}$

$\phi|_{\pi^{-1}(M \times (1-\varepsilon,1])} = d(f_1 \times id_I)|_{\pi^{-1}(M \times (1-\varepsilon,1])}$

$T_{(x,t)}(M \times I) = T_x M \times T_t I$

(v, τ)

K_t reg. homot. $i\circ f_0$ és $i\circ f_1$ között, ahol $i: \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$.
ν_t a deformálódó vmező, ν_0 = függőleges f_0 mentén
ν_1 = — " — f_1 mentén

$\phi(v,\tau) \overset{def}{=} dK_t(v) + \tau\cdot\nu_t$.

pseudo reg. homot. $\Rightarrow$ kobordánsak. □

Pl. S^2, $S^3\times\mathbb{CP}^\infty$: $\forall$ homot. csoportjuk izom., de nem homot. ekvivalensek (kohomológia gyűrűk nem izomorfak).

Gyilkos terek

reg.-an kiszámolható

X $(n-1)$-öf. $\Rightarrow$ $\pi_n(X) = H_n(X)$. (Hurewicz)

$\pi_{n+1}(X) = ?$

$$X \xrightarrow{f} K(\overbrace{\pi_n(X)}^{\pi}, n), \quad f_\# : \pi_n(X) \xrightarrow{\approx} K(\pi,n)$$

$K(\pi,n)$ megkapható: X-nek legyilkoljuk cellák ragasztásával a $\geq (n+1)$-dik homot. csoportokat, $X\cup D_i^{n+2}\cup\ldots = K(\pi,n)$, f a beágyazás.

X n-ik gyilkos tere

$$\begin{tikzcd}
X|_n \arrow[r] \arrow[d, "K(\pi{,}n-1)=K"] & * = P(K(\pi,n)) \arrow[d, "K(\pi{,}n-1)"] \\
X \arrow[r, "f", "\approx"'] & K(\pi,n)
\end{tikzcd}$$

Fibrálások egz. sorozata között leképz.:

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(K) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_i(X|_n) \arrow[r] & \pi_i(X) \arrow[r, "\text{izo. } i=n-2"] \arrow[d, "\substack{i=n-2\\ \text{izo.}}"] & \pi_{i-1}(K) \arrow[d, "\approx"] & \\
\pi_i(*) \arrow[rr] & & \pi_i(K(\pi,n)) \arrow[r, "\approx"] & \pi_{i-1}(K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$i=n$

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[d] & \circ \arrow[d, "\approx"] & \circ \\
\circ & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$(i=n) \Rightarrow \pi_n(X|_n) = 0 \qquad (\pi_n(K)=0)$

$i=n-1: \quad \xrightarrow{\cong} \pi_i(K) \xrightarrow{0} \pi_i(X|_n) \longrightarrow \overset{\overset{0}{\parallel}}{\pi_i(X)} \longrightarrow \pi_{i-1}(K)$

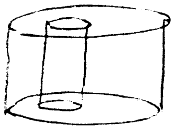
$\hookrightarrow \pi_{n-1}(X|_n) = 0$

$i>n$ v. $i<n-1 \Rightarrow \quad 0 \to \pi_i(X|_n) \xrightarrow{\cong} \pi_i(X) \to 0.$

Tehát $\pi_n(X|_n) = 0$, $\pi_i(X|_n) = \pi_i(X)$ ha $i \neq n$.

(π_n-et legyilkoltuk).

	π_*	H_*
Kofibr.	nehéz (homot. kivágás)	könnyű ($H_*(X/A) = H_*(X,A)$)
fibr.	könnyű (fibr. egz. sor.)	nehéz (spektrális sorozat)



ez a kérdés

$A \subset X \to \boxed{X/A}$

$\boxed{E}$ ← ez a kérdés

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "F"] \\ B \end{tikzcd}$$

Spektrális sorozatok

$E \xrightarrow{F} B$ Serre fibr. $\quad (H^*_*(B), H^*_*(F) \rightsquigarrow H^*_*(E))$

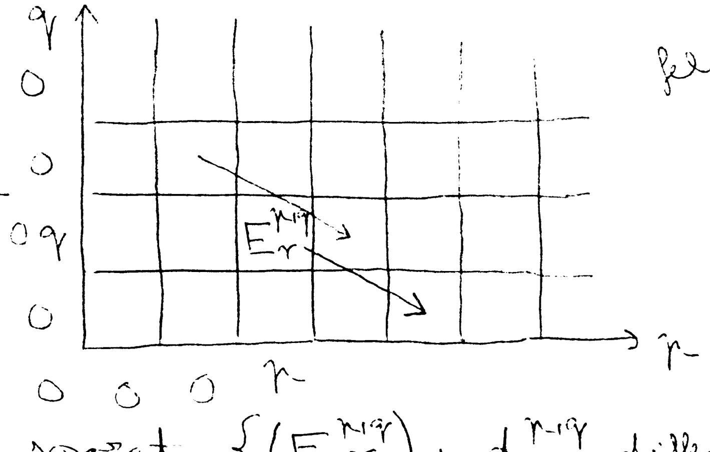
Ha $E = B \times F$: Künneth formula

Együtth. test $\Rightarrow H^*(E) = H^*(B) \otimes H^*(F)$.

Ált.-ban: $E_r^{p,q}$ Abel-csoportok, $p \geq 0, q \geq 0$

$r \overset{(1)}{=} 2, 3, \ldots$

$r=2$



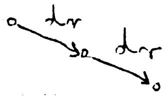
felső síknegyed

kívül 0-k

Spektr. sorozat $\{(E_r^{p,q}), d_r^{p,q}$ differenciálok$\}$

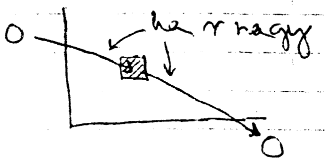
$d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ homom.

$d_r \circ d_r = 0$



$H^*(E_r^{p,q}, d_r) = E_{r+1}^{p,q}$.

$E_\infty^{p,q}$ értelmes: $\forall p,q$-ra stab.



Haszna: $\exists$ spektr. sorozat (Serre-féle)

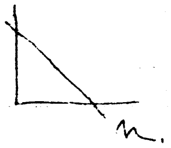
$$E_2^{p,q} = H^p(B) \otimes H^q(F)$$

$\Downarrow$ ← konvergál

$\{H^n(E)\}$ $\quad$ $H^n(E)$-ben $\exists$ filtráció

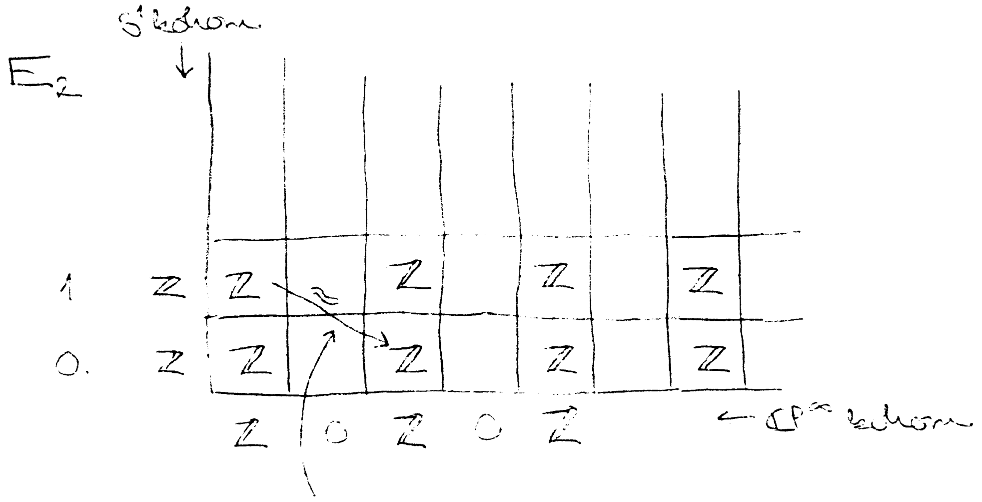
$H^n(E) = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_{n+1} = 0$, melyre

$F_i / F_{i+1} \cong E_\infty^{i,n-i}$



(Nem hat. meg $H^n(E)$-t egyért.: $0 \to \mathbb{Z} \to \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$)

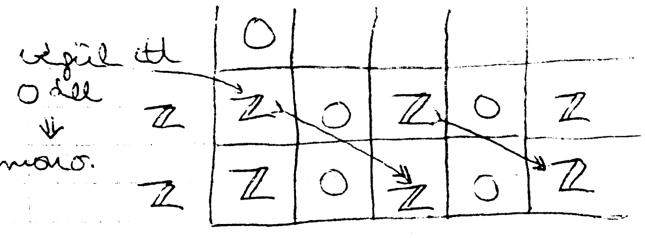
Pl. $* \cong S^\infty \xrightarrow{S^1} \mathbb{CP}^\infty$



magja vagy $\mathbb{Z}$ vagy 0, de a köv. lépésben stabilizálódik, $\mathbb{Z}$ nem lehet mert $S^\infty \cong *$

$\Rightarrow$ ker = 0 hasonlóan épi.

Kell: $H^i(\mathbb{CP}^\infty) = \begin{cases} 0, & i \text{ ptl} \\ \mathbb{Z}, & i \text{ ps.} \end{cases}$



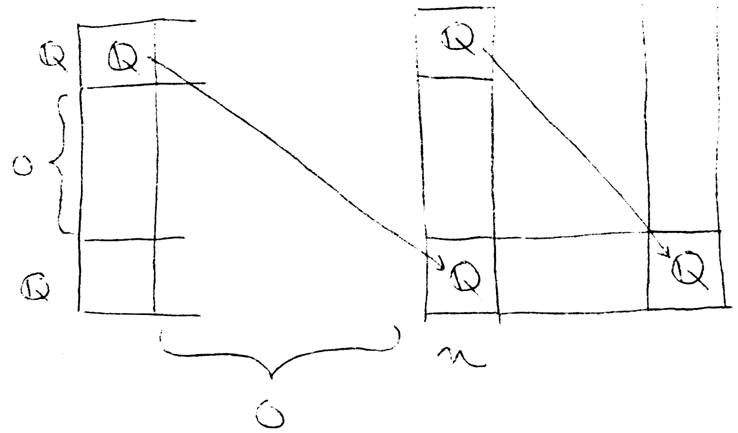
a végén 0-k lesznek + + Z-vel ⊗-szorzás nem változtat ⟶ $\mathbb{C}P^\infty$ kohom.

$\mathbb{C}P^\infty$ 1-öf. ⟶ 0

<u>Áll</u> n ptlan $\Rightarrow H^i(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q}) = \begin{cases} 0, & i \neq 0,n \\ \mathbb{Q}, & i = 0,n \end{cases}$

n ps. $\Rightarrow H^i(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q}) = \begin{cases} 0, & n \nmid i \\ \mathbb{Q}, & n \mid i \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} * \arrow[d, "K(\mathbb{Z}, n-1)"'] \\ K(\mathbb{Z},n) \end{tikzcd}$$ n ps.



n ptlan ?

11. előadás

<u>Serre tétele</u>

X (k−1)-öf. $\Rightarrow$ $\mathrm{rk}\,\pi_i(X) = \mathrm{rk}\,H_i(X)$, $i < 2k-2$.

<u>Köv.</u> $\dim_{\mathbb{Q}} \Omega_n \otimes \mathbb{Q} = \pi\left(\frac{n}{4}\right)$ ← partíciók száma

<u>Bizony.</u> $\Omega_n \cong \pi_{n+N}(MSO(N))$
↖ (N−1)-öf. : 0-szelet kiegyenlíti [illegible]

$N \geq 2$ esetén $\pi_1(MSO(N)) = 0$
Thom izom. $\Rightarrow H^i(MSO(N)) = 0$, $i \leq N-1$
$\Bigg\} \Longrightarrow$

Unio együtth. $\Longrightarrow$ $\pi_i(MSO(N)) = 0$, $i \leq N-1$.

Whitehead t.

Serre t. $\Rightarrow$ $\mathrm{rk}\,\pi_{n+N}(MSO(N)) \underset{\uparrow\, n<N-1}{=} \mathrm{rk}\,H_{n+N}(MSO(N)) =$

$$= \dim_{\mathbb{Q}} H_{n+N}(MSO(N);\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} H^{n+N}(MSO(N);\mathbb{Q}) =$$

$$\overset{\text{Thom}}{\underset{\text{izo.}}{=}} \dim_{\mathbb{Q}} H^{n}(BSO(N);\mathbb{Q})$$

Lesz: $H^*(BSO(k);\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1,\dots,p_{\frac{k}{2}-1},\overset{k}{\underset{\downarrow}{\chi}}]$ ha k ps.

$(\chi^2 = p_{\frac{k}{2}})$

$\mathbb{Q}[p_1,\dots,p_{\frac{k-1}{2}}]$ ha k ptlan

$n < N-1$ $\quad \dim_{\mathbb{Q}} H^n(BSO(N);\mathbb{Q}) = \pi\left(\frac{n}{4}\right)$ □

$H^i(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q}) = 0 \quad , n < i < 2n$

$\Downarrow$ $H^i(K(G,n);\mathbb{Q}) = 0 \quad , n < i < 2n \quad \forall G$

$\Uparrow$ (torzió + $\mathbb{Z}$-k, Künneth ($K(G,n)$ szorzatként))

Á. G véges csop. $\overline{H}^i(K(G,n);\mathbb{Q}) = 0 \quad \forall i,n$

Biz. $n=1$ Elég: G = cikl. $\mathbb{Z}_m$-re:

$G = \bigoplus_i \mathbb{Z}_{m_i} \quad K(G,n) = \prod_i (K(\mathbb{Z}_{m_i},n))$

← π_n direktösszeg

$\overline{H}^i(K(\mathbb{Z}_m,1);\mathbb{Q}) = 0 \quad \forall i$-re.

$p : Y \longrightarrow K(\mathbb{Z}_m,1)$

univ. fedő $\quad Y \cong *$ ($\forall$ homot. csop. $=0$, $\pi_k(Y)=0 \ \forall k$-ra)

⌈ $Y = S^\infty$ $\quad \mathbb{Z}_m$ komplex szorzás

$\mathbb{C}^n \supset S^{2n-1} \quad e^{\frac{2\pi i}{m}}$ (szabad $\mathbb{Z}_m$-hatás) ⌋

u^k-jól lefedett komponensek

$$\overset{\tilde{u}}{\overset{\text{szing}}{C_*}}(Y;\mathbb{Q}) \underset{\varphi}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \overset{\text{szing}}{C_*}(K(\mathbb{Z}_m,1);\mathbb{Q})$$ ← lánckompl.

$\varphi(\sigma) = p^{-1}(\sigma)$ ← m db sing. szimplex

$(p \circ \varphi)(\sigma) = m \cdot \sigma$

$$\begin{tikzcd} H_*(K(\mathbb{Z}_m,1);\mathbb{Q}) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[rr, bend right] & H_*(Y;\mathbb{Q}) \arrow[r, "p_*"] & H_*(K(\mathbb{Z}_m,1);\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

izo. ~~id~~, mert $\mathbb{Q}$-ban lehet m-mel osztani

m-mel szorzás

$$\Rightarrow \varphi_* \text{ inj.} \Rightarrow \overline{H}_*(K(\mathbb{Z}_m,1);\mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow \overline{H}^*(K(\mathbb{Z}_m,1);\mathbb{Q})=0.$$

Megj. 1.) $\mathbb{Q}$ helyett $\forall\, \Lambda$ együtth. vehető, melyben lehet m-mel osztani.

2) $\tilde{X} \longrightarrow X = \tilde{X}/G$ G véges csop. szabadon hat $\tilde{X}$-on

Λ-ban lehet osztani ord G-vel.

$H^*(X;\Lambda) = H^*(\tilde{X};\Lambda)^G \leftarrow$ G invar. rész (G hat a H^*-on, vesszük a fixen maradókat)

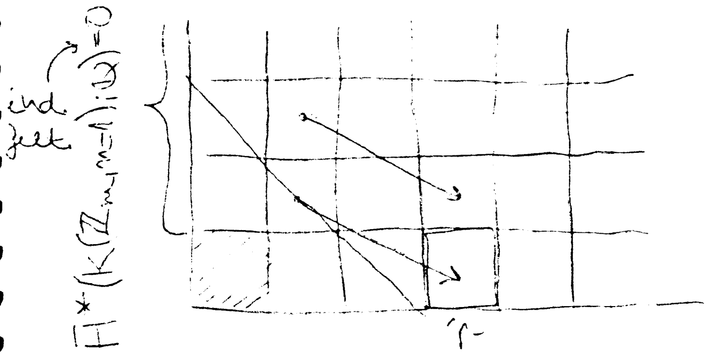
$$\underset{\overset{\|}{\tilde{X}/G}}{H_*(X;\Lambda)} = H_*(\tilde{X};\Lambda)/_G$$

$$\| $$

$$H_*(\tilde{X};\Lambda)/_{\{\alpha - g_*(\alpha) \mid \forall \alpha \in H_*(\tilde{X};\Lambda),\, \forall g \in G\}}$$

Tetsz. n-re! $\quad * \xrightarrow{K(\mathbb{Z}_m,n-1)} K(\mathbb{Z}_m,n)$

Spektr. sorozat $\mathbb{Q}$ együtth. kohomol.



$$E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q} = 0$$
$$(p,q) \neq (0,0)$$

$$\Rightarrow E_2^{r,0} = H^r(K(\mathbb{Z}_m,n);\mathbb{Q}) \otimes \underbrace{H^0(K(\mathbb{Z}_m,n-1);\mathbb{Q})}_{\mathbb{Q}} =$$

$$= H^r(K(\mathbb{Z}_m,n);\mathbb{Q}) = 0. \qquad \square$$

Áll. $H^i(K(G,n);\mathbb{Q}) = 0$, $n < i < 2n$

$\forall G$ véges gen. Abel-csoportra

Biz. $G = \mathbb{Z}^r \oplus \operatorname{Tors} G$

$$K(G,n) = (K(\mathbb{Z},n))^r \times K(\operatorname{Tors} G, n) \Big/ \left.\begin{matrix} H^*(\ ;\mathbb{Q}) \\ + \text{Künneth} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

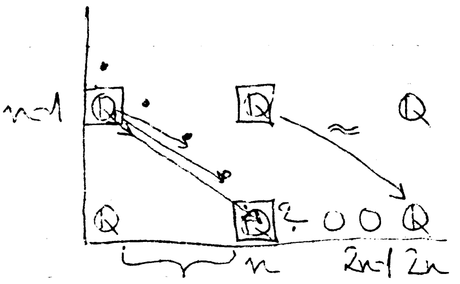
$$\Rightarrow H^*(K(G,n);\mathbb{Q}) = H^*\left((K(\mathbb{Z},n))^r;\mathbb{Q}\right)$$ □

Áll $H^i(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q}) = 0$, $n<i<2n$

Biz n szerinti ind. $H^i(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q}) = \begin{cases}\mathbb{Q} & n|i,\ n \text{ ps.} \\ & n \text{ ptlan} \Rightarrow i=n \\ 0 & \end{cases}$

n ps., (n-1)-re tudjuk

$$* \xrightarrow{K(\mathbb{Z},n-1)} K(\mathbb{Z},n)$$



K(Z,n) (n-1)-öf.

$$d_n: E_n^{0,n-1} \xrightarrow{\approx} E_n^{n,0}$$
$$\quad\ \ \| \qquad\qquad\quad \|$$
$$\quad\ \ \mathbb{Q} \qquad\qquad\quad \mathbb{Q}$$

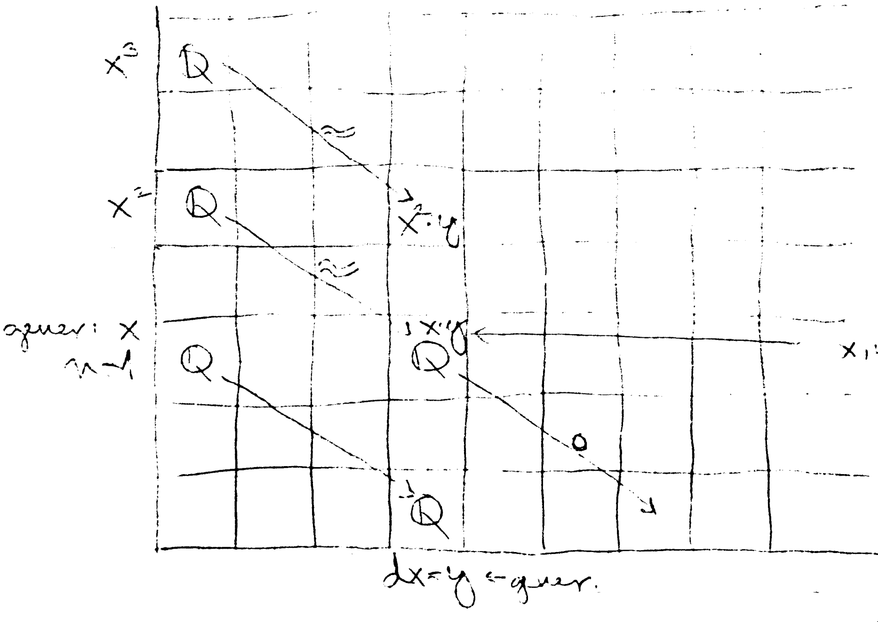
? = 0, mert csak ⋰ -okból megy bele nyilak, ott 0 áll

$$d_n: E_n^{n,n-1} \xrightarrow{\approx} E_n^{2n,0}$$ ▨

Megj Úgy kijön: $H^i(\mathbb{HP}^\infty;\mathbb{Q}) = \begin{cases} 0, & 4\nmid i \\ \mathbb{Q}, & 4|i \end{cases}$

$S^\infty \xrightarrow{S^3} \mathbb{HP}^\infty$ (gömbnyaláb, a totális tér ≅ *)

n ptlan, (n-1)-re tudjuk



x, y az E_2-ben van, itt az E_n-ben lévő a kanon. képeiket

∃ Multipl. strukt.: $E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \longrightarrow E_r^{p+p',q+q'}$
$(a,b) \longmapsto a\cdot b$

$$d_r(a\cdot b) = d_r(a)\cdot b + a\cdot d_r(b)$$

$$E_2^{**'} = H^*(B)\otimes H^{*'}(F) \qquad E \xrightarrow{F} B$$

itt a szorzás megegyezik az itteni szorzással

$$(\alpha\otimes\beta)\cdot(\alpha'\otimes\beta') = (-1)^{|\alpha'|\cdot|\beta|}\alpha\alpha'\otimes\beta\beta'$$

és E_∞ tagban a szorzás term. asszociált $H^*(E)$-beli szorzással.

$$H^n(E) = F_{0,n} \supset F_{1,n-1} \supset \dots \supset F_{n,0} = 0$$

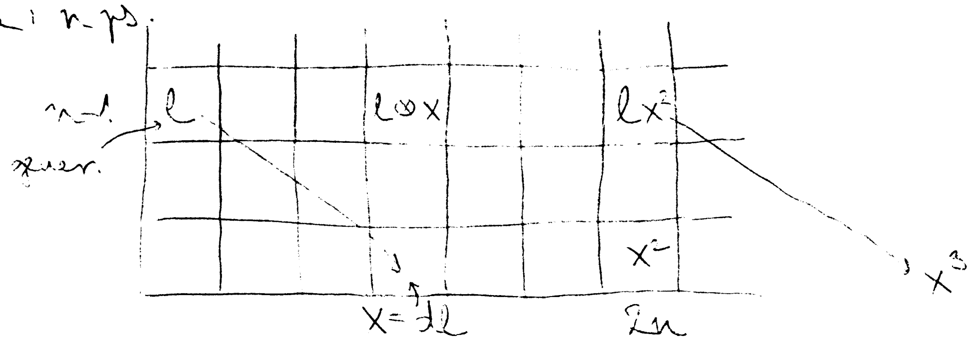
$$E_\infty^{i,n-i} = F_{i,n-i}\big/F_{i+1,n-i-1}$$

a legnagyobb i, amire $a\in F_{i,n-i}$

$a,b\in H^*(E)$ $\quad \overline{a}\in E_\infty^{i,n-i}$ $\quad \overline{b}\in E_\infty^{j,m-j}$

$\overline{a\cdot b} = \overline{a}\cdot\overline{b}$.

Vissza: n ps.



$$d(\ell\otimes x) = \underbrace{d\ell}_{x}\cdot x + \ell\cdot\underbrace{dx}_{=0} = x^2$$

Tehát $H^*(K(\mathbb{Z},2k);\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_{2k}]$ gyűrű struktúra.

Vissza: $(n-1)$ ps. $\Rightarrow$ n ptlan.

$d(x^2) = 2x\cdot dx = 2x\cdot y \Rightarrow x^2 \xrightarrow{2} x\cdot y$ izom. $\mathbb{Q}$ felett ($\mathbb{Z}$ felett nem!)

$d(x^3) = 3x^2\cdot y$ □

(Multipl. struktúra kellett a megf. differenciálok izo.-k)

<u>Serre tétel biz.</u>

Gyilkos tér módszerrel!

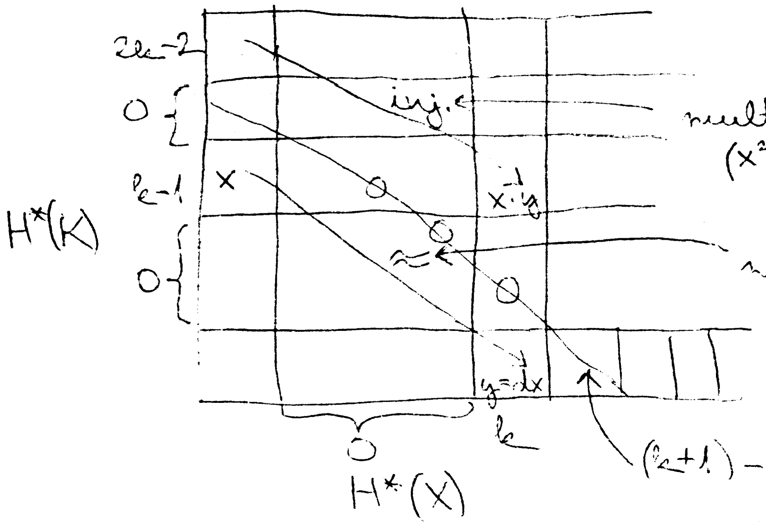
$$\begin{tikzcd}
X|_k \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d, "{K(\pi_k(X), k-1) = K}"] \\
X \arrow[r] & K(\pi_k(X), k)
\end{tikzcd}$$

$i \leq k$-ra tudjuk: $\pi_i(X) \approx H_i(X)$

$$\mathrm{rk}\, \pi_{k+1}(X) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rk nélkül is}}}{=} \mathrm{rk}\, \pi_{k+1}(X|_k) \underset{\substack{\uparrow \\ X|_k \text{ k-öf.}}}{=} \mathrm{rk}\, H_{k+1}(X|_k) =$$

$$\overset{?}{=} \mathrm{rk}\, H_{k+1}(X)$$

$X|_k \xrightarrow{K} X$ spektr. sorozata: $\mathbb{Q}$ együttható esetén



multipl. strukt.-ból $\Rightarrow E_\infty^{0,2k-2} = 0$
$(x^2 \neq 0 \Rightarrow d(x^2) = x \cdot y \neq 0)$

mert $X|_k$ k-öf.

$(k+1)$-ik átlón csak a 0-ik sor lehet nem nulla

$k+1 = 2k-2$, azaz $k=3$ esetén: $\searrow^{\text{inj.}}$.

$$\mathrm{rk}\, H_i(X|_k) = \underbrace{\mathrm{rk}\, H_i(X)}_{\dim_{\mathbb{Q}} H^i(X;\mathbb{Q})}, \quad k<i<2k-1. \quad \text{(spektr. sor.)}$$

(Univer. együttható)

Ism. X helyett $X|_k$-t véve. □

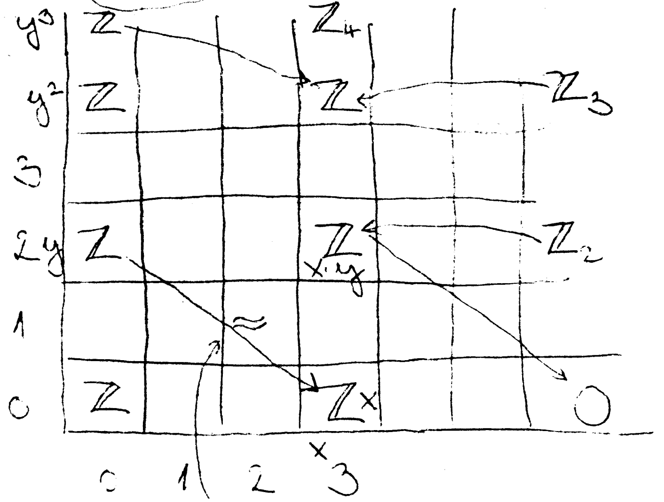
<u>Köv.</u> $\pi_s(n)$ véges, ha $n>0$.

$$\mathrm{rk}\, \pi_{n+N}(S^N) = \mathrm{rk}\, \underbrace{H_{n+N}(S^N)}_{0} = 0.$$

12. előadás.

$\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$

$$\begin{tikzcd}
X = S^3|_3 \arrow[r] \arrow[d, "K(\mathbb{Z},2)"] & * \arrow[d, "K(\mathbb{Z},2)"] \\
S^3 \arrow[r] & K(\mathbb{Z},3)
\end{tikzcd}$$



izom. mert X 3-öf

$d(y^2) = 2x \cdot y$

$H^5(X) = \mathbb{Z}_2$

$H^i(X) = 0, \quad 0 < i < 5$

Univ. együtth. $\Rightarrow H^n \approx H_n/\text{Tors} \overset{\text{hasad}}{\oplus} \text{Tors}\, H_{n-1}$

$$0 \longrightarrow \underbrace{\text{Ext}(H_{q-1}, \mathbb{Z})}_{\text{Tors}\, H_{q-1}} \longrightarrow H^q \longrightarrow \underbrace{\text{Hom}(H_q, \mathbb{Z})}_{\approx H_q / \text{Tors}\, H_{q(-1)}} \longrightarrow 0$$

$n = 4$-re: $\quad 0 = H^4(X) > H_4(X)/\text{Tors} = 0$

$\mathbb{Z}_2 = H^5(X) = \text{Tors}\, H_4(X) = H_4(X) \overset{\text{Hurewicz}}{\Longrightarrow} \pi_4(X) = \mathbb{Z}_2$

$\pi_4(S^3) = \pi_4(X)$.

Sőt: $\quad \overline{H}^i(X) = \begin{cases} 0 & i \text{ ps. vagy } i < 5 \\ \mathbb{Z}_n & i = 2n+1 \\ & i \geq 5 \end{cases}$

$\overline{H}^i(X)_p = 0$ ha $\underline{i < 2p+1}$

p-komponens: p-hatvány $\overset{\mathbb{Z}_{p^\alpha}}{\text{rendűek}}$ + szabad rész

$\overline{H}^i(X)_p = 0 \Rightarrow H_i(X)_p = 0 \quad i < 2p \quad \left(\overline{H}^n(X) \text{ véges} \overset{\text{u.eh.}}{\Rightarrow} \overline{H}^{i+1}(X) \approx \overline{H}_i(X) \right)$

$\Downarrow$

$\pi_i(X)_p = 0 \quad i < 2p$

$\overset{\parallel}{\pi_i(S^3)}$

Áll $\pi_i(S^3)_p = \begin{cases} 0 & 3<i<2p \\ \mathbb{Z}_p & i=2p \end{cases}$

Áll (Serre)

$S^2 : \pi_j(S^k)_p \xrightarrow{\approx} \pi_{j+2}(S^{k+2})_p$ p elég nagy

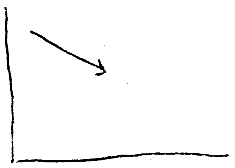
k ptlan $p \sim> \frac{j}{k}$

Áll $\pi_i(S^{2k}) \underset{\text{mod 2-hatv.}}{\approx} \pi_{i-1}(S^{2k-1}) \oplus \pi_i(S^{4k-1})$

torzió ← 2-hatv. rendű elemeket elhagyva

(Ezek Serre disszertációjában szerepelnek)

Spektr. sorozatnak ∃ kohomol. változata: diff-ok fordítva



$E \xrightarrow{F} B$

Kohom: $E_2^{p,q}$ $E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r^{p,q}} E_r^{p+r,q-r+1}$ $d \circ d = 0$

$E_{r+1}^{p,q} = H(E_r^{p,q}, d)$

$E_2^{p,q} = H^p(B) \otimes H^q(F)$ ha B 1-öf.

$= H^p(B; \mathcal{H}^q(F))$ csavart együtth.

$H^n(E) = F_{0,n} \supset F_{1,n-1} \supset \dots \supset F_{n,0} = 0$

$E_\infty^{i,n-i} = F_{i,n-i} / F_{i+1,n-i-1}$

$\{E^r_{p,q}\}$ homol. spektr. sor.

Biz $\emptyset = X^{-1} \subset \dots \subset X^q \subset X^{q+1} \subset \dots \subset X$ filtrálás

h: extraord. homol. elm. (pl. kobordizmusok)

$Z^r_{p,q} = \mathrm{Im}\left[j_* : h_{p+q}(X^p, X^{p-r}) \longrightarrow h_{p+q}(X^p, X^{p-1})\right]$

(Switzer: Ch 15)

(X^p, X^{p-1}, X^{p-r})

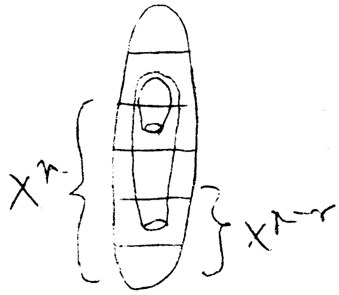
Magyarázat: $H(X^{p+1}, X^p) \to H(X^p, X^{p-1}) \longrightarrow H(X^{p-1}, X^{p-2})$

↑ CW esetben p+1-cellák, diff a relatív

Z^r_{pq}: azon p-cellák, melyek határa r-dim-val lejjebb van, $r \to \infty$: abszolút homol.

↑

r-sugarú környezetet látva ciklus



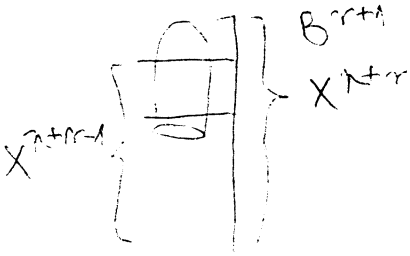
$$B^r_{pq} = \text{im}\left[\Delta : h_{p+q+1}(X^{p+r-1}, X^p) \longrightarrow h_{p+q}(X^p, X^{p-1})\right]$$

$(X^{p+r-1}, X^p, X^{p-1})$ hármas egz. sorozatából

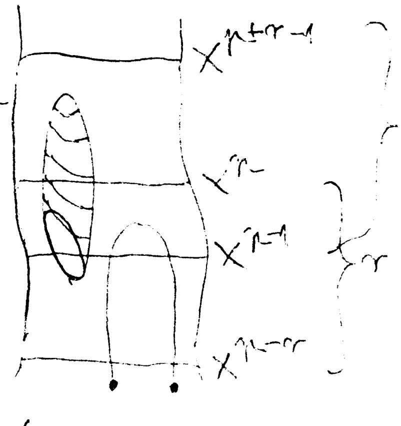
⌈ olyan cellák, melyek r-rel feljebb levő cellák határai ⌋

$$F_{p,q} = \text{im}\left[i_* : h_{p+q}(X^p) \longrightarrow h_{p+q}(X)\right]$$

L $0 = B^1_{pq} \subset B^2_{pq} \subset \dots \subset B^\infty_{pq} \subset Z^\infty_{pq} \subset \dots \subset Z^{r+1}_{pq} \subset Z^r_{pq} \subset \dots$
$\dots \subset Z^1_{pq} = H_{p+q}(X^p, X^{p-1})$



p-cellák r sugarú környezetet látva ciklusok / határok



Def. $E^r_{pq} = Z^r_{pq} / B^r_{pq}$

L $Z^r_{pq} / Z^{r+1}_{pq} \approx B^{r+1}_{p-r,q+r-1} / B^r_{p-r,q+r-1}$

Biz.

$$\begin{tikzcd}
 & h_{p+q}(X^p, X^{p-r-1}) \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "j_{1*}"] & \\
h_{p+q}(X^{p-1}, X^{p-r}) \arrow[r] \arrow[dr, "\Delta_1"'] & h_{p+q}(X^p, X^{p-r}) \arrow[r, "i_{1*}"'] \arrow[d, "\Delta_2"] & h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\
 & h_{p+q-1}(X^{p-r}, X^{p-r-1}) &
\end{tikzcd}$$

$\text{im}\,\Delta_2 / \text{im}\,\Delta_1 \approx \text{im}\, i_{1*} / \text{im}\, j_{1*}$ □

↑

adódik egy könnyű izo.: $h_{p+q}(X^p, X^{p-r})$-ben melyből az elemből származnak

$$d^r : E^r_{pq} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$$

$$\begin{tikzcd} E^r_{pq} \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\ Z^r_{pq}/B^r_{pq} \end{tikzcd}$$

$$Z^r_{pq}/B^r_{pq} \twoheadrightarrow Z^r_{pq}/Z^{r+1}_{pq} \approx B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1} \rightarrowtail$$

$$\rightarrowtail Z^r_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1} = E^r_{p-r,q+r-1}$$

Köv. $\operatorname{Ker} d^r = Z^{r+1}_{pq}/B^r_{pq}$

$\operatorname{Im} d^r = B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1}$

$$\frac{\operatorname{Ker} d^r}{\operatorname{Im} d^r} = \frac{Z^{r+1}_{pq}}{B^{r+1}_{pq}} = E^{r+1}_{pq}$$

Á. $F_{pq}/F_{p-1,q+1} \approx E^\infty_{pq}$

$F_{pq} = \operatorname{im}\left(h_{p+q}(X^p) \longrightarrow h_{p+q}(X)\right)$

Biz.
~~(h_{p+q})~~

$$\begin{tikzcd} & h_{p+q+1}(X,X^p) \arrow[d] \arrow[dr, "\text{J.O.}"] & \\ h_{p+q}(X^{p-1}) \arrow[r] \arrow[dr, "\text{B.O.}"'] & h_{p+q}(X^p) \arrow[r] \arrow[d] & h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \\ & h_{p+q}(X) & \end{tikzcd}$$

□

Kaptunk spektr. sorozatot tetsz. filtrációra.
(r-edik lépésben: X^q r-szeres környezetét látja)

$\pi : X = E \xrightarrow{F} B$ $\qquad X^q := \pi^{-1}(\operatorname{sk}_q B)$

Á. $E^2_{pq} = H_p(B) \otimes H_q(F)$

Működik $r=1$-re is: $E^1_{pq} = Z^1_{pq}/\underset{=0}{B^1_{pq}} = h_{p+q}(X^p, X^{p-1})$

$$E^1_{pq} = h_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{d^1_{pq}} h_{p+q-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$$

$\uparrow$
∂ itt

Mostantól h = H.

$$H_{p+q}(X^p, X^{p-1}) = H_{p+q}(\pi^{-1}(sk_p B), \pi^{-1}(sk_{p-1} B)) \overset{*}{=}$$

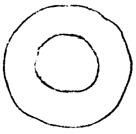
U környezet

$$= C_p(B; \underbrace{H_q(F)}_{G})$$

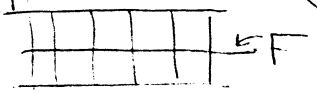
cellakompl.

∂ itt

kivágás: $\pi^{-1}(D^p, \partial D^p)$

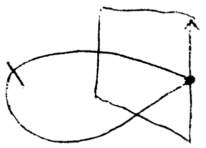


$$\overset{*}{=} \bigoplus_{\substack{p\text{-cellák}\\ B\text{-ben}}} \underbrace{H_{p+q}((D^p, \partial D^p) \times F)}_{H_q(F)} \underset{\text{izom}}{\overset{\text{Künn}}{=}} \bigoplus_{\substack{p\text{-cellák}\\ B\text{-ben}}} H_q(F)$$



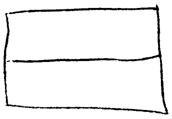
probl.: nincs megadva a szorzatfelbontás (nem kanon. az izom $H_q(F)$-el)

Működik, ha B 1-öf.,
vagy $\pi_1(B)$ triviálisan hat $H^*(F)$-en



$H^1(D^1, \partial D^1) = \mathbb{Z}$
körbemenve megfordul a gen.

μ-szalag



egy hurkon körbemenve a vag. lekép. id.-t indukál a fibrum homológiáin

$\tilde{B} \to B$ univ. fedés $\qquad C_*(\tilde{B}; G)^\pi$ ← invar. rész

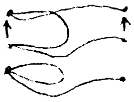
13. előadás

Csavart homol.

$\tilde{B} \xrightarrow{\text{univ. fedés}} B \qquad \pi = \pi_1(B)$

$C_*(\tilde{B}; G)^\pi \qquad \pi$ hat G-n. $\quad \pi \to Aut(G)$

$g \cdot \sigma \qquad \pi$ hat $\tilde{B}$-on (felemelés)



$\sigma : \Delta \to \tilde{B}$

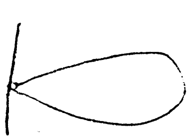
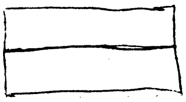
$$\alpha(g \cdot \sigma) = \alpha(g) \cdot \alpha_*(\sigma)$$

$$C_*(\tilde{B}) \underset{\pi}{\otimes} G \qquad (\sigma, g) \sim (\alpha\sigma, \alpha(g))$$

Ezen komplexumnak a homológiái a $H_*(B; G)$

G csavart együttható

$$E^2_{p,q} = H_p(B; \mathcal{H}_q(F)) \qquad E \xrightarrow{F} B$$

$S^1 \longrightarrow$  

$E_2^{p,q} = H^p(B, \mathcal{H}^q(F))$

<u>HF</u>: B H-tér ⇒ a (lokális) csavart együtth. = igazi együtth
↖rossz! konstans ⊣⊢

$\pi_1(B) = 0$ Igazi együtth

$E_2^{p,q} \underset{\uparrow}{=} H^p(B) \otimes H^q(F)$

csak ha test együtthatók vannak, vagy nincs torzió

Ált: $E_2^{p,q} = \cancel{H^p(B)}\ \mathrm{Hom}(H_p(B), H^q(F)) \oplus \mathrm{Ext}(H^{\cancel{p-1}}_{p-1}(B), H^q(F))$

$E^2_{p,q} = H_p(B) \otimes H_q(F) \oplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}(B), H_q(F))$ (Univ együtth)

<u>Megj</u>: E_1 vagy E_2?

$E^1_{p,q} = C_p(B, h_q(F))$

(E_2 már homol. invar., E_1 még függ a cellákra bontástól)

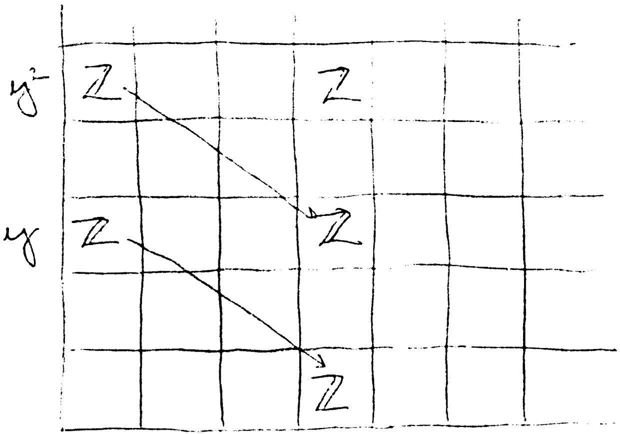
<u>T.</u> $\pi_i(S^3)_p = \begin{cases} 0 & 3 < i < 2p \\ \mathbb{Z}_p & i = 2p \end{cases}$

<u>Biz</u> $X = S^3|_3$ $H_i(X)_p = \begin{cases} 0 & i < 2p \\ \mathbb{Z}_p & i = 2p \end{cases}$

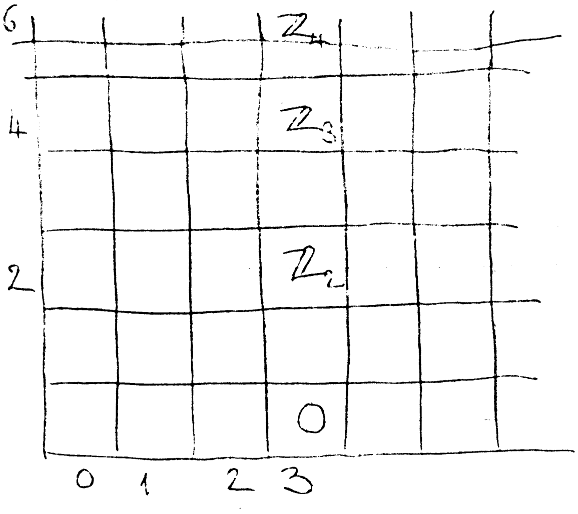
$$\begin{tikzcd}
X = S^3|_3 \arrow[r] \arrow[d, "K(\mathbb{Z},2)"] & * \arrow[d] \\
S^3 \arrow[r] & K(\mathbb{Z},3)
\end{tikzcd}$$

H^*

$E_2^{p,q}$



$E_r^{p,q}$, $r \geqq 4$



$dy^2 = 2y\,dy = 2yx$ x

$E_4^{3,2(p-1)} = \mathbb{Z}_p$ (alatta a p-komponensben 0)

$H^{2p+1}(X) = \mathbb{Z}_p$ $\quad H^{2p}(X) = 0$

$H^i(X)_p = 0 \quad , i < 2p-1$

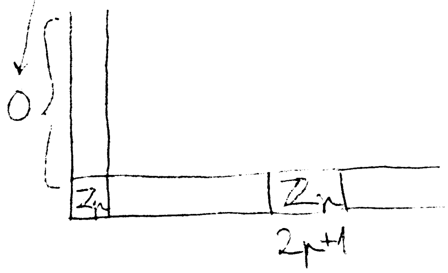
$H^n \approx H_n/\text{Tors} \oplus \text{Tors}\, H_{n-1}$ (Univ együttható)

$\Rightarrow H_{2p}(X) = \mathbb{Z}_p \quad , \quad H_{2i}(X) = \mathbb{Z}_i .$

$H_*(K(G,n); \mathbb{Z}_p) = \underline{0 \text{, ha}} \quad (\text{ord}\, G, p) = 1.$

$H_4(X) = \mathbb{Z}_2 \qquad H_i(X) = 0 , i \leq 3$

$$\begin{tikzcd}
S^3|_4 \arrow[r] \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,3)"] & * \arrow[d, "K(\mathbb{Z}_2,3)"] \\
X \arrow[r] & K(\mathbb{Z}_2,4)
\end{tikzcd}$$



$S^3|_{2p-1}$

$\Rightarrow H_i(S^3|_4)_p = \begin{cases} 0 & i < 2p \\ \mathbb{Z}_p & i = 2p \end{cases}$ $\quad$ stb. $(S^3|_5, \ldots, S^3|_{2p-1})$

$(\pi_5(S^3|_4)_p = H_5(S^3|_4)_p = 0)$ hasonlóan

$H_i(S^3|_{2p-1})_p = \begin{cases} 0 & i < 2p \\ \mathbb{Z}_p & i = 2p \end{cases}$

Hurewicz t. $\Rightarrow \pi_{2p}(S^3|_{2p-1})_p = \mathbb{Z}_p$

$\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad H_{2p}(S^3|_{2p-1})_p$

~~$\pi_{2p}(S^3)$~~ $\pi_{2p}(S^3|_{2p-1}) = \pi_{2p}(S^3)$

$\nwarrow$ Gyilkos tér konstr. $\square$

Ahol nincs p-komponens, ott nem tud megjelenni p-komponens (mert ott véges, p-vel nem osztható rendű csop. áll, a kép és a mag is olyan).

<u>HF.</u> $\pi_i(S^n)$ véges ha $i > n$ és n ptlan. (ua. mint előbb)

(<u>Megj.</u>: n ps-ra csak $\pi_{2n-1}(S^n)$ nem véges a $\pi_i(S^n)$,

$i>n$ csoportok körül)

Mod $\mathcal{C}$ tételek

Def $\mathcal{C}$ Abel-csoportok egy (Serre) osztálya, ha

1. axióma

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0 \Rightarrow (A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow A', A'' \in \mathcal{C})$$

Def $\mathcal{C}$-mono:

$f: A \to B$, ha $\operatorname{Ker} f \in \mathcal{C}$.

(ha $\mathcal{C} = \{0\}$, akkor $\mathcal{C}$ mono $\Leftrightarrow$ mono)

$\mathcal{C}$-epi: $\operatorname{Coker} f \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C}$-izo: $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f \in \mathcal{C}$

$A \underset{\mathcal{C}}{\cong} B$, ha $\exists A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$, $\exists$ $\mathcal{C}$-izo $A_i \to A_{i+1}$ vagy $A_{i+1} \to A_i$

$\Uparrow$ 2A. ax. $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \otimes B \in \mathcal{C}$, $\operatorname{Tor}(A,B) \in \mathcal{C}$

2B. ax $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \otimes B \in \mathcal{C}$ $\forall B$ Abel-csoportra

(Tor(A,B) egy tenzorszorzat részcs-ja)

3. ax $A \in \mathcal{C} \Rightarrow H_n(A,1;\mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ $\forall n > 0$

$$\overset{\text{def}}{\|} \quad H_n(K(A,1);\mathbb{Z})$$

Pl 1.) $\mathcal{C}_0 = \{0\}$

2.) $\mathcal{C}_{FG}$: végesen gen. 1, 2A, 3 (Nem 2B)

3.) $\mathcal{C}_p = \{G \mid \exists n: n \cdot G = 0,\ p \nmid n\}$ 1, 2B, 3

Megj. 5-lemma igaz, ha izom-kat $\mathcal{C}$-izom-ra cseréljük

4.) $\mathcal{C}_F = \forall$ véges 1, 2B, 3

5.) $\mathcal{C}_p^* =$ végesek, rendjük p-hatv. 1, 2B, 3

T1. (Hurewicz t. mod $\mathcal{C}$)

$\mathcal{C} \sim 1, 2A, 3$

$\pi_1(X) = 0$, $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ $i<n$-re $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $H_i(X) \in \mathcal{C}$ $i<n$-re

$h: \pi_n(X) \to H_n(X)$ $\mathcal{C}$-izom

↑ Hurewicz-homom

T2 (Rel. Hur. t. mod $\mathcal{C}$)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{C} \sim 1, 2B, 3 \\ \pi_1(X) = \pi_1(A) = 0 \\ \pi_2(A) \twoheadrightarrow \pi_2(X) \\ \pi_i(X,A) \in \mathcal{C}, i<n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H_i(X,A) \in \mathcal{C}, i<n \\ h: \pi_n(X,A) \to H_n(X,A) \ \mathcal{C}\text{-izom} \end{array}$$

T3 (Whitehead t. mod $\mathcal{C}$)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{C} \sim 1, 2B, 3 \\ \pi_1(X) = \pi_1(Y) = 0 \\ f: X \to Y, \ \pi_2(X) \xrightarrow{f_\#} \pi_2(Y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_*: H_i(X) \to H_i(Y) \quad \begin{array}{l} \mathcal{C}\text{-izo. } i<n \\ \mathcal{C}\text{-epi } i=n \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$f_\#: \pi_i(X) \to \pi_i(Y) \quad \text{——}\|\text{——}$$

Köv: $\forall$ véges 1-öf CW-kompl $\forall$ homot. csop-ja végesen generált.

($S^1 \vee S^2$ nem ilyen)

Biz. (T1)

$\mathcal{C}_0$-ra: $i<n$-re $\pi_i(X) = 0 \Rightarrow \pi_n(X) \approx H_n(X)$

(elég: n helyett $k<n$-re alk-va $H_k(X) = 0$)

$n=1$-re Tfh $H_1(X) = \pi_1(X)/[\,,\,]$ tudjuk ($\pi_1(X)$ = Abel kell)

Indukció: $(n-1)$-re tudjuk $[\forall Y$ $\pi_i(Y) = 0, i<n-1$ $\Rightarrow \pi_{n-1}(Y) \approx H_{n-1}(Y).]$

~~(Alk)~~

$\overset{*}{\overset{\shortparallel}{E}} \xrightarrow{\Omega X} X \qquad \pi_i(\Omega X) \approx \pi_{i+1}(X)$

Alk. ind. felt. $Y = \Omega X$-re

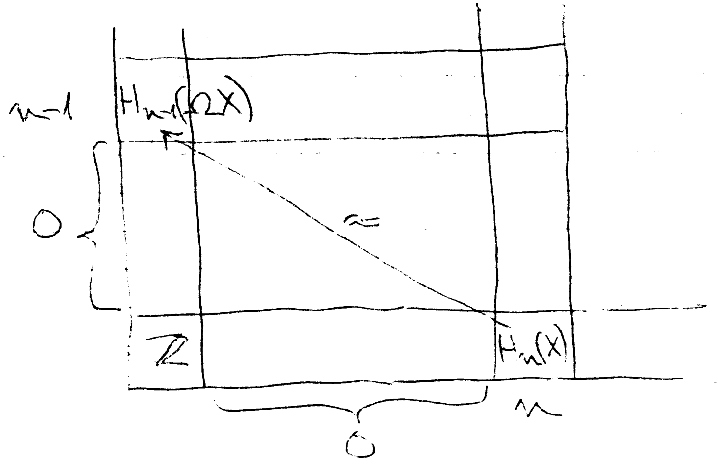
$H_j(\Omega X) = 0$, $j<n-1$ és $H_{n-1}(\Omega X) \approx \pi_{n-1}(\Omega X) \approx \pi_n(X)$

Kell: $H_n(X) \approx H_{n-1}(\Omega X)$

$n=2$ esetben:

$\pi_1(\Omega X) = \pi_2(X) = $ Abel

$E \xrightarrow{\Omega X} X \qquad H_*$ spektr. sor.:



Mod $\mathcal{C}$: Uaz a biz működik-e?

$$0 \to A \to B \xrightarrow{\alpha} C \to 0$$

$\uparrow$

$\mathcal{C}$-izom $\Leftarrow \hat{\mathcal{C}}$

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to C \to 0$$

$\hat{\mathcal{C}} \Longrightarrow \mathcal{C}$-izom

Prbl.: Kezdőlépés, ΩX nem felt. 1-öf $\pi_1(\Omega X) \neq 0$

$\pi_1(\Omega X) = \pi_2(X) \in \mathcal{C}$

Tek. T univ. fedőterét ΩX-nek

$$\pi_n(X) \approx \pi_{n-1}(\Omega X) \underset{\uparrow\, n>2}{\approx} \pi_{n-1}(T) \underset{\mathcal{C}}{\approx} H_{n-1}(T) \overset{?}{\underset{\mathcal{C}}{\approx}} H_{n-1}(\Omega X) \underset{\mathcal{C}}{\approx}$$

ind. felt.

$\underset{\mathcal{C}}{\approx} H_n(X)$.

$n=2$-re $\pi_1(X) = 0 \Rightarrow \pi_2(X) \approx H_2(X)$ (2. eredeti Hur.)

$?$: $T \xrightarrow{\pi} \Omega X \qquad \pi = \pi_1(\Omega X)$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & E(\pi,1) = E\pi \arrow[d, "\pi"] & \arrow[d, "\pi"] \\
\Omega X \arrow[r] & K(\pi,1) = B\pi &
\end{tikzcd}$$

univ. fedőtér $\forall$ homot. csop-ja 0.

$\Rightarrow$ univ. π-fibrálás nyaláb

$(\pi_1(T) = 0 \Rightarrow \exists\, T \to E(\pi,1)$ felemelt$)$

$$\begin{tikzcd} T \times_{\pi} E(\pi,1) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "E(\pi,1)\cong *"] & K(\pi,1) \\ T/_{\pi} = \Omega X & \end{tikzcd}$$

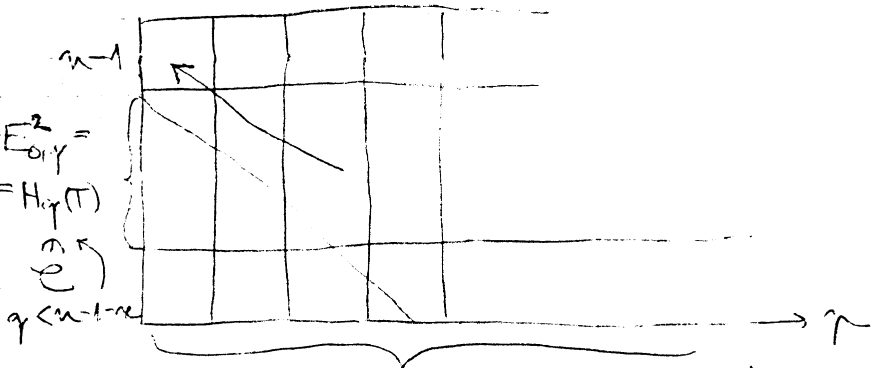
$(t,e)\sim(\alpha t,\alpha e)$

$\downarrow$

$[t]$

$$\Rightarrow \quad T \times_{\pi} E(\pi,1) \cong \Omega X \xrightarrow{T} K(\pi,1) \qquad (*)$$

Spektr. sorozat $(*)$-ra $\qquad E^2_{p,0}$



π

$\parallel$

$\pi_1(\Omega X) = \pi_2(X) \in \mathcal{C}$ $\qquad E^2_{p,0} = H_p(\pi,1;\mathbb{Z}) \in \mathcal{C}, \; p>0$

$\Rightarrow H_i(\Omega X) \in \mathcal{C}, \; i<n-1$ $\qquad$ ($\forall$ faktor a filtrálásban $\in \mathcal{C}$)

$H_{n-1}(\Omega X) \underset{\mathcal{C}}{\cong} H_{n-1}(T)$

Bázis $\underset{\underset{\Omega K(\pi,2)}{\cong}}{(K(\pi,1))}$ $\longrightarrow$ H-tér, így nem kell csavart

együttha, mert triv. a hatás.

$$E^2_{p,q} = H_p(\underset{\mathcal{C}}{K(\pi,1)}) \otimes \underset{\mathcal{C}}{H_q(T)} \oplus H_{p-1}(\underset{\mathcal{C}}{K(\pi,1)}) * \underset{\mathcal{C}}{H_q(T)}$$

$(1, 2A, B) \Rightarrow E^2_{p,q} \in \mathcal{C} \quad \forall p, \; q<n-1$

4. előadás

HF. Y H-tér, $\pi = \pi_1(Y) \Rightarrow \pi$ triviálisan hat $H^*_*(\tilde{Y})$-on

ahol $\tilde{Y}$ univ. fedő.

$Y = \Omega X \qquad T \to \Omega X \quad \pi = \pi_1(\Omega X)$

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[d, "T"] \\ K(\pi,1) = B\pi \end{tikzcd}$$

$\square$

Tt. (Rel Hur. mod $\mathcal{C}$)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{C} \sim 1, 2B, 3 \\ \pi_1(X) = \pi_1(A) = 0 \\ \pi_2(A) \twoheadrightarrow \pi_2(X) \\ \pi_i(X,A) \in \mathcal{C} \quad i<n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H_i(X,A) \in \mathcal{C} \quad i<n \\ h: \pi_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,A) \quad \mathcal{C}\text{-izom.} \end{array}$$

Biz.

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] & (E,Y) \arrow[d, "p"] \\ & (X,A) \end{tikzcd}$$

$E \cong *$ (utaktér)

$Y = p^{-1}(A)$

$$E^2_{p,q} = H_p(X,A;H_q(\Omega X)) \overset{\text{konvergál}}{\Longrightarrow} H_*(E,Y)$$ (rel spektr. sor.)

$\pi_1(A) = \pi_1(X) = 0$ és $\pi_2(A) \twoheadrightarrow \pi_2(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2(X,A) = 0 \Rightarrow H_2(X,A) = 0$. $n=2$-re triv.

↪ eredeti rel Hur., lánc bedef.-ható A-ba

$$\pi_2(A) \twoheadrightarrow \pi_2(X) \xrightarrow{0} \pi_2(X,A) \to \pi_1(A) \to \pi_1(X)$$

$$\pi_2(X,A) = 0 \Leftarrow \pi_1(A) = 0$$

$n>2$-re indukció.

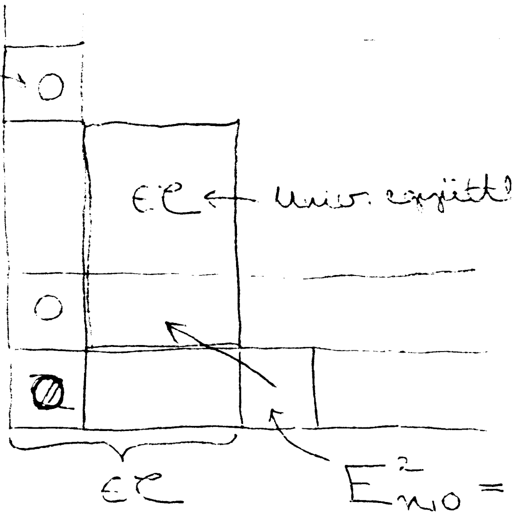
Tfh igaz $(n-1)$-re $\overset{\text{ind}}{\Longrightarrow} H_i(X,A) \in \mathcal{C}$, $i<n$

Csak $\pi_n(X,A) \approx H_n(X,A)$ mod $\mathcal{C}$ kell

$H_0(X,A) = 0$

$H_0(X,A;H_q(\Omega X)) = 0$

$E^2_{0,q} = 0$ ~~$(= H_q(\Omega X))$~~



∈$\mathcal{C}$ ← Univ. együtth. + 2B: alul lévő $\mathcal{C}$-beliek tenzorszorzatuk

$H_0(\Omega X) = \mathbb{Z}$ mert $\pi_1(X) = 0$

$E^2_{n,0} = H_n(X,A)$

$H_n(E,Y) \underset{\mathcal{C}}{\approx} E^\infty_{n,0}$

$$E^2_{p,q} = H_p(X,A;H_q(\Omega X)) = \bar{H}_p(X/A;H_q(\Omega X))$$

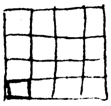
n-edik átlóban $E^2_{n,0}$-on kívül ∀ $\mathcal{C}$-beli ⇒ E^∞-ben is:

$E^2_{i,n-i} \in \mathcal{C},\ i<n \Rightarrow E^\infty_{i,n-i} \in \mathcal{C},\ i<n \Rightarrow$

$$\underline{H_n(E,Y)} \underset{\mathcal{C}}{\approx} E^\infty_{n,0} \underset{\mathcal{C}}{\approx} E^2_{n,0} = \underline{H_n(X,A)}$$

ebből $\mathcal{C}$-beliek mennek a nyilak

$\pi_j(X,A) \approx \pi_j(E,Y)$ CHP



$$\begin{tikzcd} & (E,Y) \arrow[d] \\ (D^j,S^{j-1}) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & (X,A) \end{tikzcd}$$

+ homot is felemelhető

$\pi_j(E,Y) = \pi_{j-1}(Y)$ mert $E \cong *$.

Y-ra alk. mod $\mathcal{C}$ Hur. ⇒ $\pi_{n-1}(Y) \underset{\mathcal{C}}{\approx} H_{n-1}(Y)$

$\pi_1(Y) = \pi_2(X,A) = 0$

$\pi_i(Y) = \pi_{i+1}(X,A) \in \mathcal{C},\ i<n-1$

$$\pi_n(X,A) \overset{CHP}{=} \pi_n(E,Y) \overset{E\cong *}{=} \pi_{n-1}(Y) \underset{\mathcal{C}}{\approx} H_{n-1}(Y) \approx H_n(E,Y) \overset{\text{Spektr. sor.}}{\underset{\mathcal{C}}{\approx}} H_n(X,A)$$

Y-ra mod $\mathcal{C}$ Hur.

$E \cong *$, térpár egz. sor.

(Nem kell csavart együtth.: $\pi_1(X)=\pi_1(A)=0$, $\pi_2(X,A)=0$.) □

__Megj.__ A_1, A_2 végesen gen. Abel-csoportok

$f: A_1 \to A_2$ $\mathcal{C}_p$-izom.

$\mathcal{C}_p = \{G \mid \exists n: nG=0,\ p\nmid n\}$

⇒ A_1 és A_2 p komp-i izomorfak

Mosher–Tangora: Cohomology operations and its applications

(Nem láttuk be, hogy a Hur. leképezés indukálja a $\mathcal{C}$-izot)

__T4.__ (Mod $\mathcal{C}_p$ approximáció)

(X,A) CW kompl ∀ dim. véges sok cella.

$\pi_1(A)=\pi_1(X)=0$ $\quad f: A \hookrightarrow X$, $f_\#: \pi_2(A) \longrightarrow \pi_2(X)$

__Ekv.__:

1.) $f^*: H^i(X;\mathbb{Z}_p) \to H^i(A;\mathbb{Z}_p)$ izom $i<n$ és mono $i=n$

2.) $f_*: H_i(A;\mathbb{Z}_p) \to H_i(X;\mathbb{Z}_p)$ izom $i<n$ és epi $i=n$

3.) $H_i(X,A;\mathbb{Z}_p) = 0$, $i \le n$

4.) $H_i(X,A;\mathbb{Z}) \in \mathcal{C}_p$, $i \le n$

5.) $\pi_i(X,A) \in \mathcal{C}_p$, $i \le n$

6.) $f_\#: \pi_i(A) \to \pi_i(X)$ $\mathcal{C}_p$-izom. $i<n$, $\mathcal{C}_p$ epi $i=n$

$\Downarrow$ mindegyikből köv.

7.) $\pi_i(A)$ és $\pi_i(X)$ p-komp.-i izom $i<n$.

p prím vagy 0 $\qquad \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Q}$

0-komp. = szabad rész

$\mathcal{C}_0$ = véges Abel-csoportok

(Pl. X homot. csop p-komponenseit akarjuk meghat.,
A egyszerűbb, melyre pl 2.) $^{+6.)}$ és tudjuk a p-komp.)

Biz 1.) $\Leftrightarrow$ 2.): kohom-duálisak

2.) $\Leftrightarrow$ 3.): homol. egz. sor.

3.) $\Leftrightarrow$ 4.) Univ. együtth.

$$0 \to H_i(X,A) \otimes \mathbb{Z}_p \to H_i(X,A;\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{Tor}(H_{i-1}(X,A),\mathbb{Z}_p) \to 0$$

4.) $\Leftrightarrow$ 5.) Mod $\mathcal{C}_p$ Hurewicz t.

$$\pi_i(X) \in \mathcal{C},\ i<n \implies H_i \in \mathcal{C},\ i<n$$

$$\pi_n \underset{\mathcal{C}}{\approxeq} H_n$$

$$H_2(X) \in \mathcal{C} \overset{?}{\implies} \pi_2(X) \in \mathcal{C} \qquad (\pi_2(X,A)=0)$$

5.) $\Leftrightarrow$ 6.): homot. egz. sorozat

6.) $\Rightarrow$ 7.): Megf.

(p=0: szabad rész rangja) □

$$0 \to H^p(B) \otimes H^q(F) \to \underbrace{H^p(B;H^q(F))}_{E_2^{p,q}} \to \mathrm{Tor}(H^{p+1}(B),H^q(F)) \to 0$$

Univ. együttható formula variánsa. Köv. a klasszikusból:

$C_* \otimes G \to$ homol

$$\mathrm{Hom}(C_*; G) = \overbrace{\mathrm{Hom}(C_*; \mathbb{Z})}^{C^*} \otimes G \to \text{Kohomol.}$$

(mint a homol. esetében: tenzorszorz homol.)

T. $S^2: \pi_i(S^j) \to \pi_{i+2}(S^{j+2})$ C_p-izom, ha j ptlan, p elég nagy

Köv.
$$\pi_i(S^j)_p = \begin{cases} 0 & i < 2p-3+j \\ \mathbb{Z}_p & i = 2p-3+j \end{cases}$$
(először itt jelenik meg p-komp.)

Biz $\Gamma_l S^k$, $\overline{\Gamma}_l S^k$

↙ vonásozott (beágyazássá emelhető $\mathbb{R}^{n+k+1}$-be)

$$\pi_{n+k}(\overline{\Gamma}_l S^k) \approx \overline{\mathrm{Imm}}^{fr}_l(n,k)$$

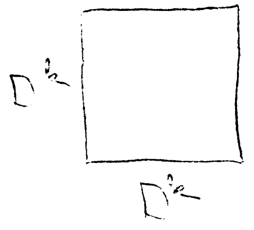
$f: M^n \looparrowright_s \mathbb{R}^{n+k}$

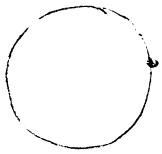
$\nexists$ $(l+1)$-szeres pont

$$\pi_{n+k}(\Gamma_l S^k) \approx \mathrm{Imm}^{fr}_l(n,k)$$
(EHP-sor. biz-ban volt)

$$\overline{\Gamma}_2 S^k = S^k \amalg D^k \times D^k /\sim \mid x \sim \beta_2(x)$$

$$\partial[D^k \times D^k] \xrightarrow{\beta_2} S^k$$



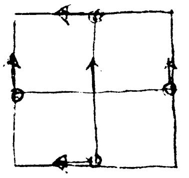


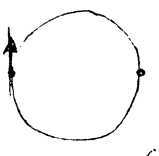
$p: D^k \to S^k$

$\partial D^k \to *$

($\beta = \mathrm{id}_{S^k} * \mathrm{id}_{S^k}$ Whitehead-szorz.)

$$\begin{tikzcd}
\partial[D^k \times D^k] \arrow[dd, "\beta_2"] & = & \partial D^k \times D^k & \cup & D^k \times \partial D^k \\
& & (x,y) \arrow[d, mapsto] & & (x,y) \arrow[d, mapsto] \\
S^k & & p(y) & & p(x)
\end{tikzcd}$$





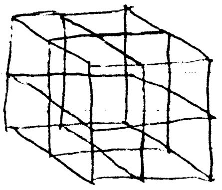
↙ tükrözött beágy.

← a „4 pontra" Pontrj.-konstr. $\rightsquigarrow \beta_2$

$$\pi_{n+k}(\overline{\Gamma}_2 S^k) \approx \overline{\mathrm{Imm}}^{fr}_2(n,k)$$ ← volt (EHP-nél)

$$\overline{\Gamma}_3 S^k = D^k \times D^k \times D^k \amalg \overline{\Gamma}_2 S^k$$

$$\vartheta_3 : \partial(D^k \times D^k \times D^k) \longrightarrow \overline{\Gamma}_2 S^k$$



a 3 középvonal: $\overline{\text{Imm}_2}^{fr}$ egy eleme, ez megadja a ϑ_3 leképezést.

HF: $\Gamma_2 S^k$, $\overline{\Gamma}_2 S^k$

15. előadás.

I. S^2: $\pi_i(S^j)_p \xrightarrow{\approx} \pi_{i+2}(S^{j+2})_p$ j ptlan, $p > 1+\left[\frac{i-1}{j-1}\right]$ ↑ prím

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(S^j)_p \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "S^\infty"'] & & \pi_{i+2}(S^{j+2})_p \arrow[dl, "S^\infty"] \\
& \pi^s(i-j)_p &
\end{tikzcd}$$

Biz   Elég: S^∞ izo.

$$\begin{tikzcd}
S^\infty : \pi_i(S^j) \arrow[r] \arrow[d] & \pi^s(i-j) \arrow[ddr, bend left, "\approx"] & \\
M^{i-j}_{fr} \hookrightarrow \mathbb{R}^i & \text{Emb}^{fr}(i-j, j) & \\
M^{i-j}_{fr} \looparrowright \mathbb{R}^{i-1} & \overline{\text{Imm}}^{fr}(\overset{n}{i-j}, \overset{k}{j-1}) \arrow[u, phantom, "\|"] \arrow[r] & \text{Imm}^{fr}(i-j, j-1)
\end{tikzcd}$$

volt, hogy megegyeznek

B.O.   ↑ elfelejtjük a [illegible]   J.O.

r-szeres pontok ~~száma~~ dim-ja ($n \to k+n$ immerziónál):

$n-(r-1)k$.

Ha tehát $l+n-lk < 0 \Rightarrow \nexists\ (l+1)$-szeres pontja sem az imm.-nak, sem a kobord.-nak

$$l > \frac{n+1}{k} \Rightarrow \overline{\text{Imm}}^{fr}(n,k) \approx \overline{\text{Imm}}^{fr}_l(n,k)$$

$$\text{Imm}^{fr}(n,k) \approx \text{Imm}^{fr}_l(n,k)$$

Áll.

$\exists\ \overline{\Gamma}_r S^k$: $\pi_{n+k}(\overline{\Gamma}_r S^k) = \overline{\text{Imm}}^{fr}_r(n,k)$

$\Gamma_r S^k$: $\pi_{n+k}(\Gamma_r S^k) \approx \mathrm{Imm}_r^{\mathcal{J}}(n,k)$

($\overline{\Gamma}_r S^k \to \Gamma_r S^k$ term. lekép. indukálni fogja S^∞-t.)

Biz Indukciós lépés: $\overline{\Gamma}_r S^k = \overline{\Gamma}_{r-1} S^k \cup_{\rho_r} \overbrace{D^k \times \dots \times D^k}^{r}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & B \arrow[d] \\ X_{r-1} \arrow[r] & \overline{\Gamma}_{r-1} S^k \end{tikzcd}$$

túlk., k-kodim., ≤ $(r-1)$-szeres metsz. pontokkal

(← homot. erejéig egyért.)

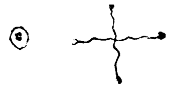
univ. ilyen

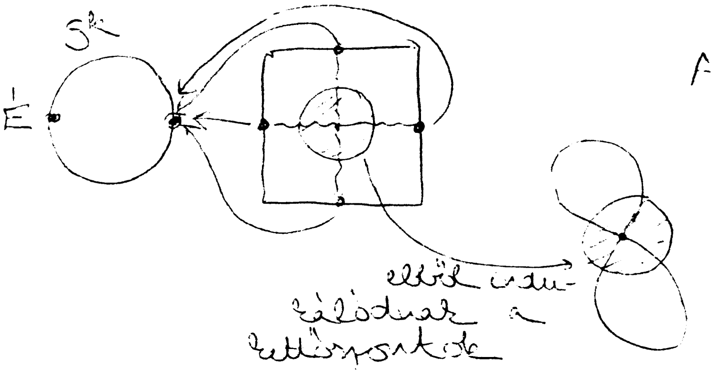
$$\left(\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ * \arrow[r] & S^k \end{tikzcd}\right)$$

← univ. túlk. lekép.

X_2 képe $\overline{\Gamma}_2$-ban

$\overline{\Gamma}_2 S^k$-ban



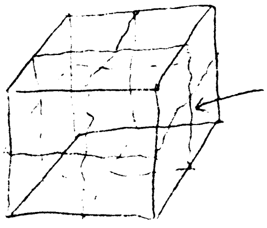


$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \\ \overline{\Gamma}_2 S^k & \end{tikzcd}$$

(A az X_2-be esnie)

$\overline{\Gamma}_r S^k = \overline{\Gamma}_{r-1} S^k \cup_{\rho_r} \underset{(x_1, \dots, x_r)}{D^k \times \dots \times D^k}$

$\rho_r : \partial(\overbrace{D^k \times \dots \times D^k}^{r}) \longrightarrow \overline{\Gamma}_{r-1} S^k$ homot. erejéig egyért.

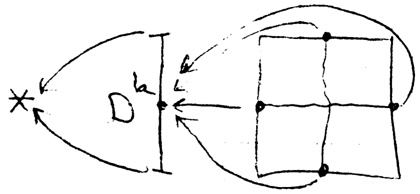


← túlkérett, számozott, ∄ r-szeres metszéspont, ezt klasszifikáljuk

$\overline{\Gamma}_r S^k = \{(x_1, \dots, x_r)\}_{x_i \in S^k} \Big/ (x) \sim (x')$, ha az É-t kihagyva egyenlők

Észr.: $x_i \in D^k$ után 1 absz. értékű x_i-ket kihagyva egyenlők

$(x_1, \underline{\underline{x_2}})$ $\|x_1\| = 1$



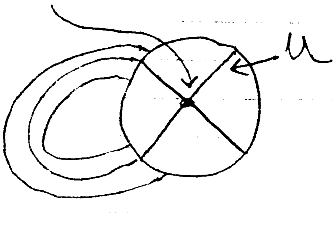
□

Áll $\pi_{n+k}(\overline{\Gamma}_r S^k) \approx \overline{\mathrm{Imm}}^{fr}_r(n,k)$

Biz indukció: $r=1$-re Pontrj. konstr.

ha $(r-1)$-re tudjuk: $\overline{\mathrm{Imm}}^{fr}_r(n,k) \to \pi_{n+k}(\overline{\Gamma}_r S^k)$:

Δ_r = r-szeres pontok



$$\Delta_r \times D^{rk}$$
$$\Delta_r \times D^k \times \dots \times D^k \longrightarrow \underbrace{D^k \times \dots \times D^k}_{r}$$

$$S^{n+k} = \left\{ \begin{array}{l} S^{n+k} \setminus U \longrightarrow \overline{\Gamma}_{r-1} S^k \\ U \longrightarrow D^k \times \dots \times D^k \end{array} \right\} \longrightarrow \overline{\Gamma}_r S^k$$

(illeszkednek a tüskézés miatt)

$\pi_{n+k}(\overline{\Gamma}_r S^k) \longrightarrow \overline{\mathrm{Imm}}^{fr}_r(n,k)$:

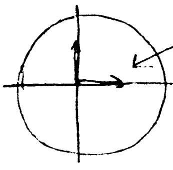
$$\varphi : S^{n+k} \longrightarrow \overline{\Gamma}_r S^k \longrightarrow \overline{\Gamma}_r S^k / \overline{\Gamma}_{r-1} S^k = S^{rk}$$

$\cup$

$\underline{0} \in \underbrace{D^k \times \dots \times D^k}_{r}$ ↑ erre ragasztottuk D^{rk}-t.

$$\varphi : S^{n+k} \longrightarrow \overline{\Gamma}_r S^k \xrightarrow{\pi} \overline{\Gamma}_r S^k / \overline{\Gamma}_{r-1} S^k = S^{rk}$$
(felette: $\tilde{\varphi}$)

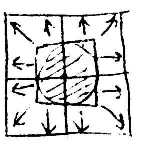
$\tilde{\varphi}^{-1}$(Dél) = r-szeres pontok



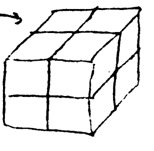
$\tilde{\varphi}^{-1}(U_D)$ = $\Delta_r \times D^{rk}$-sok

$U_D \subset S^{rk}$ a Déli pólus körny.

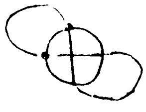
$$S^{n+k} \setminus \tilde{\varphi}^{-1}(U_D) \longrightarrow V(\overline{\Gamma}_{r-1}(S^k))$$
$\downarrow$ def. retr.
$$\longrightarrow \overline{\Gamma}_{r-1} S^k$$



a peremen: legf. $(r-1)$-szeres pontok,



ez beterjed ⟶

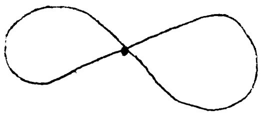


□

Áll $\exists\ \Gamma_\ell S^k : \ \mathrm{Imm}_\ell^{fr}(n,k) \approx \pi_{n+k}(\Gamma_\ell S^k)$

Biz. $\ell = 2$

$$M^n \longrightarrow S^{n+k}$$



$\tilde{\Delta}_2 \xrightarrow{2} \Delta_2$ fedés (számozott esetben ez triv.)

($\bar{\Gamma}$ esetén $\underset{\overset{\downarrow}{*}}{D^k \times D^k}$ nyalábból indultunk a kettős-pontok (~~körny.~~) normálnyalábját)

$(D^k \times D^k) \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} S^\infty$ ← diag hatás ($\overset{\leftrightarrow}{D^k \times D^k}$ -n felcserélés, S^∞-en tükr.)

$$\begin{tikzcd} (D^k \times D^k) \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} S^\infty \arrow[d, "D^k \times D^k"] \\ \mathbb{R}P^\infty = S^\infty / \mathbb{Z}_2 \end{tikzcd}$$

(S^∞-en: univ. szabad $\mathbb{Z}_2$-hatás)

univ. nyaláb a tükrözött $\overset{\nexists\text{ 3-szoros pont}}{(2\text{-})}$immerziók kettősp.-jai normálnyalábjai számára)

$$\begin{tikzcd} U_{\Delta_2} \arrow[r] \arrow[d] & D(\tilde{\xi}_2) \arrow[d] \\ \Delta_2 \arrow[r] & \mathbb{R}P^\infty \end{tikzcd}$$

(a normálnyaláb lok. felbontása is indukálódik)

$\Gamma_2 S^k = S^k \underset{\varsigma_2}{\cup} D(\tilde{\xi}_2)$, $\varsigma_2 : \partial D(\tilde{\xi}_2) \longrightarrow S^k$

$\left(\bar{\Gamma}_2 S^k = S^k \underset{\bar{\varsigma}_2}{\cup} D^k \times D^k \right)$ $\quad \varsigma_2 \Big|_{\text{fibrumra}} = \bar{\varsigma}_2$

$\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{D^k \times D^k}$ ← nincs kanon. azonosítás, de $\bar{\varsigma}_2$ invar. a két D^k felcserélésére.

$\pi_{n+k}(\Gamma_2 S^k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mint } \bar{\Gamma} \text{ esetén.}}}{\approx} \mathrm{Imm}_2^{fr}(n,k)$

$\Gamma_3 S^k = \Gamma_2 S^k \cup D^k \times D^k \times D^k \underset{S_3}{\times} WS(3)$

$ES_3 = WS(3)$ = kontrahálható tér, melyen szabadon hat S_3. $(EG \to BG)$

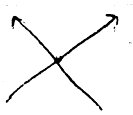
$$\begin{tikzcd}
\overbrace{D^k\times D^k\times D^k \underset{S_3}{\times} WS(3)}^{\xi_3} \arrow[d, "D^k\times D^k\times D^k"] \\
BS_3
\end{tikzcd}$$

($\leftarrow$ $D^k\times D^k\times D^k$-ban a $D^3\times\{0\}\times\{0\} \cup \{0\}\times D^3\times\{0\} \cup \{0\}\times\{0\}\times D^3$ kereszt S_3-invar. $\Rightarrow$ kiválasztható volna ξ_3-ban is)

$\vartheta_3 : \partial D(\xi_3) \longrightarrow \Gamma_2 S^k$

$\vartheta_3|_{\text{fibrum}} = \overline{\vartheta}_3$ (jól def.)

($D^k\times D^k\times D^k$-n S_3-hatás, $ES_3 \to BS_3$ univ. princ. S_3-nyaláb, ehhez asszociált univ. $D^k\times D^k\times D^k$ fibrumú nyaláb)



$\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^k$

$\begin{pmatrix}E&0\\0&E\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&E\\E&0\end{pmatrix}$

Állt.: $\Theta : G \to GL_N(\mathbb{R})$ repr.

$$\begin{tikzcd}
EG \underset{\Theta}{\times} \mathbb{R}^N \arrow[d, "\mathbb{R}^N"] \\
BG
\end{tikzcd}$$

univ. strukt. csoport G, a fibrumon Θ-val hatnak.

Ezt alk. $G = S_3$, $N = 3k$-ra. □

$\overline{\Gamma}_l S^k \longrightarrow \Gamma_l S^k$

$\overline{\Gamma}'_l S^k = \overline{\Gamma}'_{l-1} S^k \cup \underbrace{D^k\times \dots \times D^k}_{l} \times \overset{WS(l)}{\overset{\|}{ES_l}}$ ← pontosabban

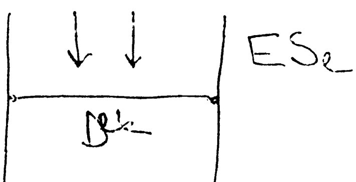
$\Downarrow$

$\overline{\Gamma}_l S^k \cong \overline{\Gamma}'_l S^k$

Ezt fogjuk $\overline{\Gamma}_l S^k$-val jelölni. (Ez homot. ekv.)

($\overline{\Gamma}_l / \overline{\Gamma}_{l-1} = S^{lk}$ $\overline{\Gamma}'_l / \overline{\Gamma}'_{l-1}$

$D^{lk}/\partial D^{lk}$ $D^{lk}\times ES_l / \partial D^{lk}\times ES_l$



homol.
rel. homot. ekv. +
+ öt lemma

)

HF $\overline{\Gamma}_\ell'$, $\overline{\Gamma}_\ell$ homot. ekv.

$$\begin{tikzcd}
\overline{\Gamma}_\ell \arrow[r, "\alpha"] & \Gamma_\ell \\
\overline{\Gamma}_{\ell-1} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & \Gamma_{\ell-1} \arrow[u, phantom, "\cup"] \\
\vdots &
\end{tikzcd}$$

$\alpha|_{\overline{\Gamma}_\ell \setminus \overline{\Gamma}_{\ell-1}}$-en = univ. S_ℓ-nyaláb $\underbrace{D^k\times\dots\times D^k}_{\ell}$ fibrummal.
(faktorizálás S_ℓ-lel)

$$\alpha|_{\overline{\Gamma}_\ell \setminus \overline{\Gamma}_{\ell-1}} : D^k\times\dots\times D^k\times ES_\ell \longrightarrow D^k\times\dots\times D^k \underset{S_\ell}{\times} ES_\ell .$$
(sorrend-felejtés)

Kell: $\alpha: \pi_{n+k}(\overline{\Gamma}_\ell)_p \longrightarrow \pi_{n+k}(\Gamma_\ell)_p$ izom. $p>\ell$
(és elég) p-prím

Elég (mod-C approx t.): $\mathbb{Z}_p$ együtthatós homol.-ban izom. $i\leq n+k$-ra

$H = H(\ ;\mathbb{Z}_p)$ $\alpha_*: H_i(\overline{\Gamma}_\ell) \xrightarrow{\approx} H_i(\Gamma_\ell)$ $\mathbb{Z}_p$ együtth. homol.

Biz 5-lemma

$$\begin{tikzcd}
H_{i+1}(\overline{\Gamma}_\ell,\overline{\Gamma}_{\ell-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\approx \Leftarrow \alpha"] & H_i(\overline{\Gamma}_{\ell-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & H_i(\overline{\Gamma}_\ell) \arrow[r] \arrow[d, "?"] & H_i(\overline{\Gamma}_\ell,\overline{\Gamma}_{\ell-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\approx \Leftarrow \alpha"] & H_{i-1}(\overline{\Gamma}_{\ell-1}) \arrow[d, "\approx"] \\
H_{i+1}(\Gamma_\ell,\Gamma_{\ell-1}) \arrow[r] & H_i(\Gamma_{\ell-1}) \arrow[r] & H_i(\Gamma_\ell) \arrow[r] & H_i(\Gamma_\ell,\Gamma_{\ell-1}) \arrow[r] & H_{i-1}(\Gamma_{\ell-1})
\end{tikzcd}$$

$\overset{\text{5 lemma}}{\Longrightarrow}$? is izom.

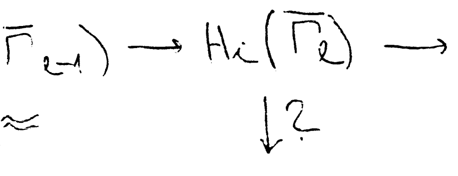
$j=\ell k$-ra $\neq 0$

Relatív csop.: $H_j(\overline{\Gamma}_\ell,\overline{\Gamma}_{\ell-1}) = H_j(D^k\times\dots\times D^k\times ES_\ell, \partial\dots)$

$H_j(\Gamma_\ell,\Gamma_{\ell-1}) \leftarrow = H_j(D^k\times\dots\times D^k \underset{S_\ell}{\times} ES_\ell, \partial) \leftarrow$ izom. $\mathbb{Z}_p$-együtth.

$$\begin{tikzcd}
D^k\times\dots\times D^k \underset{S_\ell}{\times} ES_\ell \arrow[d, "{(D^k\times\dots\times D^k, \partial)}"] \\
BS_\ell
\end{tikzcd}$$

$\tilde{H}^*(BS_\ell;\mathbb{Z}_p) = 0$



α (X,Y), G hat. szabadon (X,Y)-on, $(p, \operatorname{ord} G)=1$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ G\text{-invar. része}}}{H^*(X,Y;\mathbb{Z}_p)^G} \approx H^*(X/G, Y/G; \mathbb{Z}_p)$$

$$H_*(X,Y;\mathbb{Z}_p)\Big/_{\substack{\alpha \sim g_*\alpha \ \forall g\in G \\ \alpha\in H_*(X,Y;\mathbb{Z}_p)}} \approx H_*(X/G, Y/G; \mathbb{Z}_p)$$

$(D^k \times \ldots \times D^k \times ES_l, \partial) \Leftarrow$ k ps. (⇒ ir. tartó a perm.) (izo. az egyetlen nem triv. homol.-n)

$$H_*(X,Y;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\pi_*} H_*(X,Y;\mathbb{Z}_p)$$

$H_{i-1}(\bar{\Gamma}_{l-1}) \xrightarrow{\approx} H_{i-1}(\Gamma_{l-1}) \leftarrow$ $(l-1)$-re már az ind. felt. miatt izo.

⇒ 2. izo. Mod C Whitehead t. ⇒ Serre t.

16. előadás

Á (X,Y) G szabadon hat

Δ együttható csop.-ban lehet osztani ord G-vel

$$H_*(X,Y;\Delta)\Big/_G = H_*(X/G, Y/G; \Delta)$$

Esetünkben $(X,Y) = (\overbrace{D^k \times \ldots \times D^k}^{l}, \partial)$ $\quad (\bar{\Gamma}_l, \bar{\Gamma}_{l-1})$

$G = S(l)$, k ps. $\quad \downarrow$

$\quad (\Gamma_l, \Gamma_{l-1})$

$\forall g\in G \quad g \simeq id$

$$H_*(X,Y;\Delta)\Big/_G = H_*(X,Y;\Delta)\Big/_{\{\alpha - g_*\alpha\}}$$

← ez esetünkben 0 lesz

$$C_*(X,Y)\otimes\Delta \longrightarrow C_*(X/G, Y/G)\otimes\Delta$$

$$c \longmapsto p.(c)$$

← kicsi szing szimplexek (jól lefedett körny.-be esnek)

$p: (X,Y) \longrightarrow (X,Y)/_G$ fedés.

$$p^{-1}(d) \longleftrightarrow d$$

← ez értelmes

$$\begin{tikzcd} H_* \arrow[r, bend right] & H_* \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

mindkettő ord G-vel szorzás $\left(\begin{array}{l}\Leftarrow \text{ esetén } c \text{ orbitját} \\ \text{kapjuk, } + g_* = id \text{ miatt} \\ \text{az orbit } \forall \text{ eleme ugyanazt repr.}\end{array}\right)$

Λ-ban lehet ord$G$-vel osztani $\Rightarrow$ autom.

Páros dim gömbök homot. csop. p-komponensei

Áll 1. $\exists\, f: S^{2n-1} \longrightarrow W_{2n-1} = V_2(\mathbb{R}^{n+1}) \xrightarrow{p} S^n$

↖ Stiefel-sok

$f_\#: \pi_*(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_*(W_{2n-1})$ $\mathcal{C}$ - izom, ha n ps.

↑ véges 2-primér (2-hatv. rendű) csoportok

Áll 2. $k: \pi_i(W_{2n-1}) + \pi_{i-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_i(S^n)$, n ps.

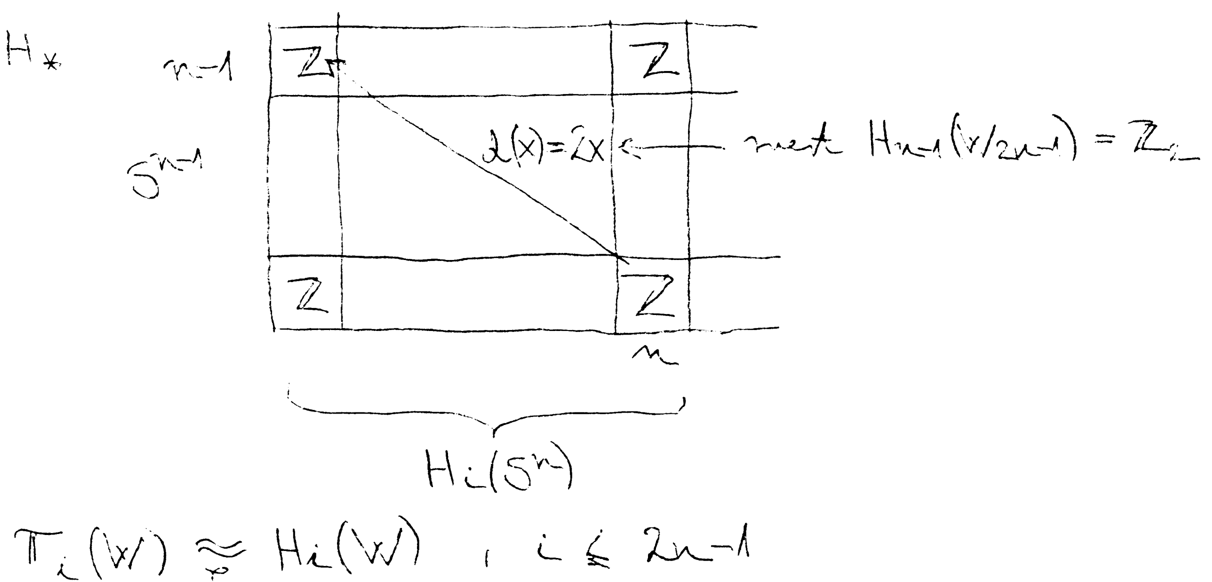
$k = p_\# + S \quad \Longrightarrow \quad k$ $\mathcal{C}$ - izom.

Köv. n ps. $\Rightarrow \pi_i(S^n)_p \approx \pi_i(S^{2n-1})_p \oplus \pi_{i-1}(S^{n-1})_p$, ahol p ptlan prím.

Biz Áll 1 $\quad \underbrace{H_0(W_{2n-1}) = \mathbb{Z},\ H_{n-1}(W_{2n-1}) \overset{n \text{ ps.}}{\downarrow}{=} \mathbb{Z}_2}$, $H_{2n-1}(W_{2n-1}) = \mathbb{Z}$,

a többi 0.

Hurewicz t.-ből köv. (2 homot. csop.-ok, a kül. dim-ben jelenik meg az első homot.)



$\pi_i(W) \underset{\mathcal{C}}{\approx} H_i(W)$, $i \leq 2n-1$

⇖ Mod $\mathcal{C}$ Hurewicz t.

Spec.: $\qquad$ (mert $H_i(W) \in \mathcal{C}$ ha $i < 2n-1$)

$\pi_{2n-1}(W) \underset{\mathcal{C}}{\approx} H_{2n-1}(W) = \mathbb{Z}$

↖ $\mathbb{Z} \oplus$ 2-hatv. rendű

$\exists\, f: S^{2n-1} \longrightarrow W$ a $\pi_{2n-1}(W)$ szabad részének generátora: $[f] \in \pi_{2n-1}(W)$.

$f_*: H_i(S^{2n-1}) \longrightarrow H_i(W)$ $i \leq 2n-1$-re $\mathcal{C}$-izom

Mod $\mathcal{C}$ approx. t. szerint

$$\begin{array}{lccc} f: & S^{2n-1} & \longrightarrow & W \\ \pi: & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}\oplus 2\text{primér} \\ & 1 & \longmapsto & 1 \end{array} \quad (\pi_i(S^{2n-1}), \pi_i(W) \in \mathcal{C},\ i < 2n-1)$$

Homotópiákban tehát mod $\mathcal{C}$ approx $\Rightarrow$ homológiákban is.

$i \geq 2n$-re $H_i(S^{2n-1}) = 0$, $H_i(W_{2n-1}) = 0$

$f_*: H_*(S^{2n-1}) \longrightarrow H_*(W_{2n-1})$ $\mathcal{C}$-izom $\forall$ dim.

$\xRightarrow{\text{mod}\,\mathcal{C}\,\text{approx}}$ $f_\#: \pi_*(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_*(W)$ $\mathcal{C}$-izom $\square$

Kl. $p: W \xrightarrow{F} S^n$ fibr. tetsz.

$d: \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_{i-1}(F)$ határhomom.

$\gamma = d\,[id_{S^n}]$

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(W) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(S^n) & \xrightarrow{d} & \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \\ & & \ni & & \ni \\ & & 1 = [id_{S^n}] & \longrightarrow & \gamma = d(1) \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\forall \alpha \in \pi_{i-1}(S^{n-1})$-re $dS(\alpha) = \gamma \circ \alpha$

$$\pi_i(S^n) \xrightarrow{d} \pi_{i-1}(F)$$

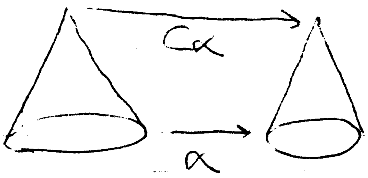
$$\begin{tikzcd} S^{i-1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & S^{n-1} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & F \\ S^i \arrow[r, "S\alpha"] & S^n & \end{tikzcd}$$

$d(S\alpha) \in \pi_{i-1}(F)$.

a peremen $= \gamma \circ \alpha$. Ez egyben $d(S(\alpha))$ is a peremen.

Biz.

$$\begin{tikzcd} & & F & \\ (D^i, \partial D^i) \arrow[urr, bend left] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[d, shift left=2, "\alpha"] \arrow[drrr, bend left=10, "S\alpha"] & (W', \partial D^n \times F) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d] & & W \arrow[d, "p"', "F = p^{-1}(*)"] \\ (D^n, \partial D^n) \arrow[r, "id_{D^n}"'] \arrow[ur, dashed] & (D^n, \partial D^n) \arrow[rr, "\text{term. proj.}"'] & & (S^n, *) \end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dashed] & : \partial D^n \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \partial D^n \times F \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

ez adja a d-t. (γ=t)

(↱alapokat összecsípve: $S\alpha$)

$(D^i, \partial D^i) \xrightarrow{S(\alpha)} (S^n, *)$ akármilyen felemelésével kiszámolhatom $dS(\alpha)$-t. Spec. $\underline{\underline{id_{S^n}}} \circ S(\alpha) = S(\alpha)$

Felemelem id_{S^n} (ill. id_{D^n}) lekép. és ezt kompon. $(C\alpha, \alpha)$ lekép.-sel. ② Ez $\gamma \circ \alpha$-t adja □

<u>Biz.</u> áll. 2 Alk. α1-et $W_{2n-1} \xrightarrow{S^{n-1}} S^n$-re

$$\longrightarrow \pi_n(S^n) \xrightarrow[2\cdot]{d} \pi_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow$$

↖ volt: $\chi(S^n)$-nel szorzás

$\Rightarrow \gamma = 2$

Tehát $dS(\alpha) = \underset{\uparrow}{2} \circ \alpha \quad \forall\, \alpha \in \pi_{i-1}(S^{n-1})$

$S^{n-1} \to S^{n-1}$ 2-fokú lekép.

$2_* : \pi_*(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_*(S^{n-1})$ $\mathcal{C}$-izom., mert:

Ez igaz a mod $\mathcal{C}$ approx tétel miatt, homol.-ban 1 db ≠0 csop., ott 2-vel szorz.

$$\begin{tikzcd} \pi_{i+1}(S^n) \arrow[r, "d"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] & \pi_i(S^{n-1}) \arrow[l, bend left, "S"] \arrow[r] & \pi_i(W_{2n-1}) \arrow[r] & \pi_i(S^n) \arrow[r, "d"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] & \pi_{i-1}(S^{n-1}) \arrow[l, bend left, "S"] \end{tikzcd}$$

$\circlearrowleft = \mathcal{C}$-autom. („kvázi-hasad")

<u>Alg. lemma:</u>

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "p_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\circlearrowright"] & A_2 \arrow[l, bend right, "k"'] \arrow[r, "p_2"'] & A_3 \arrow[r, "p_3"'] & A_4 \arrow[r, "p_4"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\circlearrowright"] & A_5 \arrow[l, bend right, "k'"'] \end{tikzcd}$$

$\circlearrowright$ $\mathcal{C}$-izom $\Rightarrow$ $(p_3, k') : A_3 \oplus A_5 \longrightarrow A_4$ $\mathcal{C}$-izom

$(a_3, a_5) \longmapsto p_3(a_3) + k'(a_5)$

⌜ha igazi hasadás volna: d epi. $\Rightarrow$ $p_2 = 0$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi_i(W_{2n-1}) \arrow[r] & \pi_i(S^n) \arrow[r] & \pi_{i-1}(S^{n-1}) \arrow[l, bend right] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ ⌟

Biz$_{\text{állgk}}$. 1.) p_1, p_4 $\mathcal{C}$-epi : $\exists k, k'$ "$\mathcal{C}$-hasító lekép"

$\mathrm{Ker}\, p_3 \approx \mathrm{Im}\, p_2 \approx \mathrm{Coker}\, p_1 \overset{1.)}{\in} \mathcal{C} \Rightarrow p_3$ $\mathcal{C}$-mono.

$N = \mathrm{Ker}\,(p_3 + k') : A_3 \oplus A_5 \longrightarrow A_4$

$(a_3, a_5) \in N$

$\Updownarrow$

$p_3(a_3) + k'(a_5) = 0 \quad / \; p_4 \circ$

$\Rightarrow \quad p_4 \circ k'(a_5) = 0.$

Ha $a_5 = 0 \Rightarrow a_3 \in \mathrm{Ker}\, p_3.$

$$0 \longrightarrow \overset{\substack{\mathcal{C}\\ \cup}}{\mathrm{Ker}\, p_3} \longrightarrow N \longrightarrow \overset{\substack{\mathcal{C}\\ \cup}}{\mathrm{Ker}}\,(\underset{\substack{\uparrow\\ \mathcal{C}\text{-izo.}}}{p_4} \circ k') \longrightarrow 0 \quad \text{egz.} \Big\} \Rightarrow N \in \mathcal{C}$$

$$a_3 \longmapsto (a_3, 0)$$

$$(a_3, a_5) \longmapsto a_5$$

$$A_3 \oplus A_5 \xrightarrow[(p_3,k')]{} A_4 \xrightarrow[q]{} \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{C}}}{\mathrm{Coker}}\,(\underset{\nwarrow \mathcal{C}\text{-izo.}}{p_4} \circ k') \quad \text{egzakt} \quad (*)$$

$$\begin{tikzcd} A_4 \arrow[r, "p_4"] \arrow[rr, bend right, "q"'] & A_5 \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Coker}\,(p_4 \circ k') = A_5 / \mathrm{im}\,(p_4 \circ k') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow (p_3, k')$ $\mathcal{C}$-epi (~~képe~~ $\mathrm{koker}(p_3,k')$ egy $\mathcal{C}$-beli része).

$(*)$ egz : 1) $q(a_4) = 0 \Rightarrow \exists x_5 \in A_5 \quad (p_4 \circ k')(x_5) = p_4(a_4)$

$\Rightarrow p_4(a_4 - k'(x_5)) = 0$

$\underset{\nwarrow \text{egz.}}{\exists} x_3 \in A_3 : \; p_3(x_3) = a_4 - k'(x_5) \Rightarrow a_4 = p_3(x_3) + k'(x_5).$

2) $q(p_3(a_3) + k'(a_5)) = 0$

$$\overset{\shortparallel}{\pi \circ p_4 (p_3(a_3) + k'(a_5))} = \pi\,(p_4 \circ k'(a_5)) = 0. \qquad \square$$

17. előadás

n ps. $\qquad$ szabad rész $\to F \xrightarrow{j} \overset{d \circ S}{F}$ $\quad$ $\mathcal{C}$-izom

$$\pi_{i+1}(S^n) \underset{S}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \pi_i(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_i(W_{2n-1}) \longrightarrow \pi_i(S^n) \underset{S}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \pi_{i-1}(S^{n-1})$$

ptlan dis gömbök homot. csop.-ja véges

$\Rightarrow$ Coker $\alpha \in \mathcal{C}$ (azaz α $\mathcal{C}$-epi)

Coker $j \in \mathcal{C}$

Véges p-komponenseket, ezeken valódi felhasadás.

$$\pi_i(W_{2n-1})_p \oplus \pi_{i-1}(S^{n-1})_p = \pi_i(S^n)_p$$

A szabad részek között pedig $\mathcal{C}$-izom. □

---

rk $\Omega_8 = 2$ (kellett egy gömb)

rk $\Omega_n = \pi\left(\frac{n}{4}\right) \Leftarrow H^*(BSO(n);\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}[p_1,\dots,p_m], & n=2m+1 \\ \mathbb{Q}[p_1,\dots,p_{m-1},e_{2m}], & n=2m \end{cases}$

$\nwarrow e_{2m}^2 = p_m$

BU(n) kohom.-t kiszámoltuk, így:

1.) $\exists$ CW-felb., melyben 2k-dim cellák száma $= \pi_n(k)$

$\nearrow$ $\leq n$ tagú partíciók

2) $c_1,\dots,c_n$ szabad részalgebrát def-nak $H^*(BU(\cancel{\mathbb{Z}})n);\mathbb{Z})$-ben

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl] \arrow[d, "p"] \\ B(U(1)\oplus\dots\oplus U(1)) = \mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty \arrow[r, "i"'] & BU(n) \end{tikzcd}$$

p^* inj. ($\Leftarrow$ Splitting $\mathcal{K}$)

$\Downarrow$

i^* inj.

Im i^*: szimm. pol.-ok

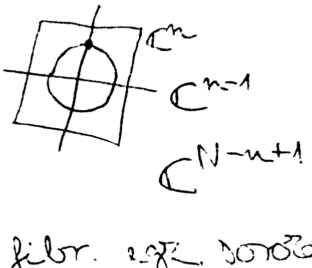
$$(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \longleftarrow c_1,\dots,c_n$$

$$\mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n]$$

$\gamma_n \longrightarrow BU(n) = G_n \leftarrow$ Grassman

$$\begin{tikzcd} S(\gamma_n) \arrow[r, "S^{2(N-n)+1}", "f"'] \arrow[d, "\pi_0"'] & G_{n-1}(\mathbb{C}^N) \\ G_n(\mathbb{C}^N) & \end{tikzcd}$$

$$v \longmapsto v^\perp \subset \gamma_n|_v$$



$N \longrightarrow \infty$

$N=\infty$-re f homot. ekv. (a fibr. egz. sorozatából $\forall$ homot. csop. között izo.)

Gysin-sorozat:

$$\begin{tikzcd} H^i(G_n) \arrow[r, "\cup c_n"] & H^{i+2n}(G_n) \arrow[r, "\pi_0^*"] \arrow[dr, "\lambda"'] & H^{i+2n}(S(\gamma_n)) \arrow[r] & H^{i+1}(G_n) \\ & & H^{i+2n}(G_{n-1}) \arrow[u, "\approx f^*", "\parallel"'] & \end{tikzcd}$$

n-szerinti ind. Felt.: $H^*(G_{n-1}) = \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_{n-1}]$

λ epi, mert Chern-osztály képe Chern-osztály:

$\pi_0^* \gamma_n = f^*\gamma_{n-1} \oplus \varepsilon^1$.

λ epi $\Rightarrow \pi_0^*$ epi

$$0 \longrightarrow H^i(G_n) \xrightarrow{\cup c_n} H^{i+2n}(G_n) \xrightarrow{\lambda} H^{i+2n}(G_{n-1}) \longrightarrow 0.$$ □

Áll. $\forall\, x \in H^{i+2n}(G_n)$ felírható egyértelműen $c_1, \dots, c_n$ polinomjaként.

Biz. $\lambda(x) = p(c_1, \dots, c_{n-1})$ G_{n-1}-ben

$x - p(c_1, \dots, c_{n-1}) = c_n \cdot y$ G_n-ben, $\exists\, y \in H^i(G_n)$

$\lambda(\text{—''—}) = 0 \uparrow$

y már kisebb dim. $y \overset{\exists! q}{=} q(c_1, \dots, c_n)$ (indukció)

$x = p(c_1, \dots, c_{n-1}) + c_n q(c_1, \dots, c_n)$

Unicitás: Tfh $x = p' + c_n q'$. λ-t alk $\Rightarrow p = p' \Rightarrow q = q'$. □

$\lambda = (f^*)^{-1} \circ \pi_0^*$ $\pi_0^* \gamma_n = f^* \gamma_{n-1} \oplus \varepsilon^1$

$\lambda(c_i) = c_i$ $\pi_0^* c_i = f^* c_i \ / \ (f^*)^{-1}$

$\lambda(c_i) = c_i$. $\Rightarrow \lambda$ epi.

Megj. $G_n^H(H^\infty) = \mathbb{Z}[c_2, c_4, \dots]$
← kvaternió Grassman

(ir. nyalábokra nincs Splitting L, mert 1-ds ir. = triv.)

T. $H^*(\widetilde{G}_{2m+1}; \Lambda) = \Lambda[p_1, \dots, p_m]$ p ptlan prím

'' BSO$(2m+1)$, $\Lambda \ni \frac{1}{2}$ test $(\Lambda = \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q})$

$H^*(\widetilde{G}_{2m}; \Lambda) = \Lambda[p_1, \dots, p_{m-1}, e] / e^2 = p_m$

Biz.
$$\begin{tikzcd} S(\widetilde{\gamma}_n) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \widetilde{G}_{n-1} \\ \widetilde{G}_n & \end{tikzcd}$$
f = homot. ekv.

Gysin:

$$H^i(\widetilde{G}_n) \xrightarrow{\cup e} H^{i+n}(\widetilde{G}_n) \xrightarrow{\lambda} H^{i+n}(\widetilde{G}_{n-1}) \longrightarrow H^{i+1}(\widetilde{G}_n) \longrightarrow$$

$n = 2m$ Ind. felt.: $H^*(\widetilde{G}_{2m-1}) = \Lambda[p_1, \dots, p_{m-1}]$

$\Rightarrow \lambda$ epi

$$0 \longrightarrow H^i(\widetilde{G}_n) \xrightarrow{\cup e} H^{i+n}(\widetilde{G}_n) \xrightarrow{\lambda} H^{i+n}(\widetilde{G}_{n-1}) \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow H^*(\widetilde{G}_n; \Lambda) = \Lambda[p_1, \dots, p_{m-1}, e]$.

$n=2m+1$ Felt.: $H^*(\tilde{G}_{2m})=\Lambda[p_1,\dots,p_{m-1},e_{2m}]$, $p_m=e^2$

$e_{2m+1}=0$ (mert n ptlan $\Rightarrow 2e=0$, de $\frac{1}{2}\in\Lambda$) $\Rightarrow$ sztesik:

$$0\to H^j(\tilde{G}_{2m+1})\xrightarrow{\lambda}H^j(\tilde{G}_{2m})\to H^{j-2m}(\tilde{G}_{2m+1})\to 0$$

$$p_i \longrightarrow p_i$$

$\exists\, A^*=\Lambda[p_1,\dots,p_m]\subset H^*(\tilde{G}_{2m})$ részgyűrű.

$\mathrm{rk}\,A^j \leq \mathrm{rk}\,H^j(\tilde{G}_{2m+1})$, mert $A^j\subset\lambda(H^j(\tilde{G}_{2m+1}))$

$\mathrm{rk}\,H^j(\tilde{G}_{2m})=\mathrm{rk}\,A^j+\mathrm{rk}\,A^{j-2m}$, mert $H^*(\tilde{G}_{2m})$-et tudjuk:

$H^*(\tilde{G}_{2m})=\Lambda[p_1,\dots,p_{m-1},e_{2m}]=\Lambda[p_1,\dots,p_{m-1},p_m]\oplus e\cdot\Lambda[p_1,\dots,p_m]$

e ps. hatv. szerint — e ptlan kitevővel

$\mathrm{rk}\,H^j(\tilde{G}_{2m})=\mathrm{rk}\,H^j(\tilde{G}_{2m+1})+\mathrm{rk}\,H^{j-2m}(\tilde{G}_{2m+1})$

$\Rightarrow \mathrm{rk}\,A^j=\mathrm{rk}\,H^j(\tilde{G}_{2m+1}) \overset{A^j\subseteq H^j}{\Longrightarrow} A^j=H^j(\tilde{G}_{2m+1})$. □

$n=2m+1$, $H^*(BSO(n);\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[p_1,\dots,p_m]$

$BSO(n)\overset{f}{\simeq_{\mathbb{Q}}}K(\mathbb{Z},4)\times K(\mathbb{Z},8)\times\dots\times K(\mathbb{Z},4m)$

rac. homot. ekv.:

f^* izom. $H^*(\ ;\mathbb{Q})$ = bon.

$p_i: BSO(n)\longrightarrow K(\mathbb{Z},4i)$ ($\forall$ kohom. oszt. tek. így)

$f=\prod_{i=1}^{m}p_i$ $\qquad H^*(K(\mathbb{Z},2j);\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[\ell_{2j}]$

($p_i^*(\ell_{4i})=p_i$ + Künneth, $H^*(K\times\dots\times K)$ = pol. gyűrű $\Rightarrow f^*$ izo.)

$\Rightarrow \pi_*(BSO(n))\otimes\mathbb{Q}\overset{f_*}{\cong}\pi_*(K)\otimes\mathbb{Q}$, mert $\pi_i(K)=\bigoplus_s \pi_i(K_s)$

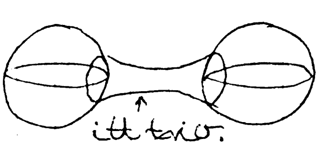
csak $i=s$-re nem 0.

$$\mathrm{rk}\,\pi_i(BSO(n))=\begin{cases}0, & i\neq 4,8,\dots,4m\\ 1, & i=4,8,\dots,4m\end{cases}$$

$\pi_{i-1}(SO(n))\approx\pi_i(BSO(n))$, mert $ESO(n)\xrightarrow{SO(n)}BSO(n)$

Ha $n=2m$: $K=K(\mathbb{Z},4)\times\dots\times K(\mathbb{Z},4m-4)\times K(\mathbb{Z},2m)$.

$\mathrm{Vect}_n^{ir}(S^i)$ rangja:



a művelet

itt tasó.

rk $\Omega_n = \pi\left(\frac{n}{4}\right)$:

$$H^*(T\gamma_n) = H^{*-N}(BSO(N)) \text{ Thom-izo. } \overset{\text{N ptlan}}{\downarrow} = \pi\left(\frac{*-N}{4}\right)$$

$\| e$

$\pi_*(T\gamma_N) \quad * < 2N-2$

$\|$

Ω_{*-N} □

Hopf algebra

$$A \otimes A \rightleftarrows A$$

H-tér kohomol. (v. homol.) Hopf-alg.:

$X \times X \rightleftarrows X$ szorzás indukálja a szorzást.

↙ gradált és ∀ dim-ban véges ds.

Borel t. Véges típusú Hopf-alg 0-karakt. test fölött

$$A = \prod_i \mathbb{Q}[x_{2i}] \otimes \prod_j \underset{\uparrow}{\Lambda}[y_{2j+1}] \quad \text{(mint algebra ilyen)}$$

külső alg.

Köv. Egy H-tér homot. csop.-nak rangja kiszámolható H^*-ból

$X \xrightarrow{f} \prod K(\overset{\mathbb{Z}}{\mathbb{Q}}, n) \qquad f^* \quad H^*(\ ; \mathbb{Q})$-izom

$\Rightarrow f_\# \quad \pi_* \otimes \mathbb{Q}$-k között izo. az approx. tétel miatt.

(∀ tér huroktere H-tér, a homot.-k eltoltak)

(Lie-csop. esetén a kohomológiában nincs $\mathbb{Q}[x_{2i}]$-s tag, mert sokaság, de pol-gyűrűben van tetsz. magas ds. tag.)

13. előadás

Cél $\Omega_* \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^4, \dots]$

Def. n szám partíciója $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ rendezetlen
$i_1 + \dots + i_r = n$.

$I = (i_1, \dots, i_r)$, $|I| = n$

$J = (j_1, \dots, j_s)$, $|J| = m$

$IJ = n+m$ partíciója

Részben rendezés: finomítás

$S \subset \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ $(\subset \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n])$

$\uparrow$

szimm pol $= \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$

Def $\sum t_1^{i_1} \dots t_r^{i_r}$ ← min. szimm. pol., mely tart. ezt a monomot.

Pl $\sigma_k = \sum t_1 \cdot \ldots \cdot t_k$

Á $\left\{ \sum t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_r^{i_r} \;\middle|\; |I| = k \text{ és a hossza } (=r) \leq n \right\} =$
$=$ bázis S^k-ban k-adfokú rész. □

$I = (i_1, \dots, i_r)$ $\quad s_I(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum t_1^{i_1} \dots t_r^{i_r}$

Pl $s_{(1)}(\sigma_1) = \sigma_1$ ← ha n nagy, nem függ s_I az n-től $(\deg \sigma_n = n)$

$s_{(2)}(\sigma_1, \sigma_2) = t_1^2 + \dots + t_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

$s_{11}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum t_1 t_2 = \sigma_2$

Def ξ vnyaláb

$s_I^w(\xi) = \sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots$ helyére beírjuk a $w_1(\xi), \dots, w_n(\xi), \dots$ osztályokat. Hasonlóan $s_I^c(\xi)$ ha ξ komplex vnyaláb.

$s_I^p(\xi) =$ pol.-ja $\sigma_i(y_1^2, y_2^2, \dots, y_n^2)$-eknek. Ezek helyére beírjuk a $p_i(\xi)$-t.

Ha $p(\xi) = \prod(1 + y_i^2)$, $\quad p_i(\xi) = \sigma_i(y_1^2, y_2^2, \dots, y_n^2)$

Kitérő $\quad G \supset T$ max. tórusz $= (S^1)^r$ (max. komm. rcsp.)

$BG \leftarrow BT$

Borel–Hirzebruch: $H^*(BG) \xrightarrow{inj} H^*(BT)$, képe $=$

= Weil-csop. szerinti invar. rész.

$W(G) = N_T / T$ konjugálással hat BT-n

normalizátor

ξ komplex: $\xi_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \approx \xi \oplus \bar{\xi} \xrightarrow{\text{Splitting}} \sum l_i \oplus \sum \bar{l}_i$

$(1+y_i)\,(1-y_i) \quad \prod(1-y_i^2)$

Szorzatformula

$$s_I^w(\xi \oplus \xi') = \sum_{JK=I} s_J^w(\xi) \cdot s_K^w(\xi').$$ Hasonlóan a többire.

Biz $t_1, \dots, t_{2n}$ $\quad \sigma_i = \sigma_i(t_1, \dots, t_n)$, $\sigma_j' = \sigma_j(t_{n+1}, \dots, t_{2n})$

$$\sigma_k'' = \sum \sigma_j \sigma_{k-j}' = \sigma_k(t_1, \dots, t_{2n})$$

Az áll. átfog.:

$$s_I(\sigma_1'', \sigma_2', \dots) = \sum_{I=JK} s_J(\sigma_1, \dots) \cdot s_K(\sigma_1', \dots)$$

$t_{\alpha_1}^{i_1} \dots t_{\alpha_r}^{i_r}$

$\sigma_i \sim w_i(\xi)$
$\sigma_i' \sim w_i(\xi')$
$\Rightarrow \sigma_k'' = w_k(\xi \oplus \xi')$

J = azon i_r-ek, melyekre $1 \leq \alpha_r \leq n$
K = —"— $n+1 \leq \alpha_r \leq 2n$. □

Pl $s_{(k)}(\xi \oplus \xi') = s_{(k)}(\xi) + s_{(k)}(\xi')$

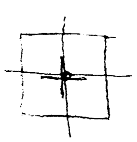
Def $s_I[M] = \langle s_I(TM), [M] \rangle$, $= 0$ ha $|I| \neq \dim M$.

Köv. $\dim M = n$ $\quad s_{(n)}[M] \neq 0 \Rightarrow [M]$ irreducibilis

nem-szorzatok összege

Biz Ha $M = K^k \times L^l$, $k, l > 0$, $n = k + l$

$s_{(n)}[M] = 0$, mert $TM = \pi_K^*(TK) \oplus \pi_L^*(TL)$



$$s_{(n)}(TM) = s_{(n)}(\pi_K^*(TK)) + s_{(n)}(\pi_L^*(TL)) \quad / [K \times L]$$

$$s_{(n)}[M] = \langle s_{(n)}(\pi_K^*(TK)), [K \times L] \rangle + \dots$$

$$\langle \pi_K^*(\underbrace{s_{(n)}(TK)}_{0}), [K \times L] \rangle + \underbrace{\dots}_{=0} = 0.$$

Hasonlóan $s_{(n)}[M] = 0$, ha M kobord osztálya szorzatok összege. Beláttuk: Ha [M] kob. oszt. reducibilis $\Rightarrow s_{(n)}[M] = 0$. □

← ezek a várható kobord invar.-ok

Pl $s_{(n)}^{\mathbb{C}}[\mathbb{CP}^n] = n+1$

Biz $c(T\mathbb{C}P^n) = (1+y)^{n+1}$ $\langle y^n, [\mathbb{C}P^n]\rangle = 1$

$$s_{(n)}(T\mathbb{C}P^n) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i^n = (n+1)y^n$$

$s_{(n)}[\mathbb{C}P^n] = n+1$ $\forall y_i = y$

$$\begin{tikzcd} l_1\oplus\dots\oplus l_n = \pi^*\xi \arrow[r] & A \arrow[d, "\pi"] & \text{Splitting-lemmából} \arrow[l] \\ \xi\oplus\varepsilon^k \arrow[r] & B & \end{tikzcd}$$

$$T\mathbb{C}P^n \oplus \varepsilon^1 \approx (\gamma_1^{\mathbb{C}})^{n+1}$$

$y_1,\dots,y_{n+1}$ $(c_i = \sigma_i(y_1,\dots,y_{n+1}))$

$$s^w_{(2k)}(\mathbb{R}P^{2k}) = \sum_{i=1}^{2k+1} t_i^{2k} = (2k+1)x^{2k}$$

$w(\mathbb{R}P^n) = (1+x)^{n+1}$ $x \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$

$s_{(2k)}[\mathbb{R}P^{2k}] = 2k+1 \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow \mathbb{R}P^{2k}$ irred.

$$s^p_{(n)}[\mathbb{C}P^{2n}] = 2n+1$$

$p(\mathbb{C}P^{2n}) = (1+y^2)^{2n+1}$ $\prod_{i=1}^{2n+1}(1+y_i^2)$ $y_i = y$ $p_i \to \sigma_i(y_1^2,\dots,y_{2n+1}^2)$

$s^p_{(n)}(M^{4n}) = \sum (y_i^2)^n$, $p(M^{4n}) = \prod(1+\underbrace{y_i^2}_{z_i})$ $\sum z_i^n$

$M^{4n} = \mathbb{C}P^{2n}$ esetén $s_{(n)}[\mathbb{C}P^{2n}] = 2n+1$ $\langle (y^2)^n, [\mathbb{C}P^{2n}]\rangle = 1$

Többtényezős szorzatformula

$M^J = M_1^{j_1} \times M_2^{j_2} \times \dots \times M_q^{j_q}$ ← dimenziók

↖ $M_1,\dots,M_q$

$$s_I(M^J) = \sum_{I = I_1 I_2 \dots I_q} s_{I_1}(M_1^{j_1}) \times s_{I_2}(M_2^{j_2}) \times \dots \times s_{I_q}(M_q^{j_q})$$

Biz Indukció (a 2-tényezőből). □

$s_{(n)}[M^n] \neq 0^{(*)}$ tul.-gal veszünk $\forall n$ dim-ban egy sokaságot.

$(**) = \left(s_I[M^J]\right)^{I,J}$ $\pi(k)\times\pi(k)$-as mátrix

az I, J a k-nak partíciói.

A partíciók részben rendezését kiterjesztjük egy teljes rendezéssé, így követik egymást a sorok és oszlopok

Kiv. $s_I[M^J] = \sum s_{I_1}[M_1^{j_1}] \cdots s_{I_q}[M_q^{j_q}]$ csak alak tud nem nulla lenni, ha I finomítása J-nek

(kell olyan tag, ahol $\forall\ |I_l| = j_l$).

Ezért ez egy Δ mátrix. de M^j-k $(*)$ tul-a miatt az átlóban nem nulla elemek vannak.

$$\underset{\nwarrow \text{ diszj. unió}}{\sum a_j M^j} \underset{\nwarrow \text{ kobord.}}{\sim} 0 \quad\Longrightarrow\quad \left(s_I\left[M^J\right]\right)^{I,J} \begin{pmatrix}(a_J)_1\\ \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$\det(**) \neq 0 \Longrightarrow [M^j]$-k lin. ftlenek

$$s_{(i_1\dots i_q)}\left[M^{j_1}\times\dots\times M^{j_q}\right] \qquad i_r = j_r \quad \text{az átlóban}$$

$$\shortparallel$$

$$s_{(j_1)}\left[M^{j_1}\right]\cdot\ \dots\ \cdot s_{(j_q)}\left[M^{j_q}\right] \neq 0.$$

□

<u>Köv.</u> $[\mathbb{CP}^{2n}]$ ftlenek polinomiálisan Ω_*-ban.

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left[\mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^4, \dots, \mathbb{CP}^{2n}, \dots\right]\Big|_{4k} = \pi(k) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{volt}}}{=}$$

$$= \dim_{\mathbb{Q}}\left(\underset{\nwarrow \text{ 4+ [illegible] 0-nagy}}{\Omega_{4k}} \otimes \mathbb{Q}\right) \Longrightarrow \Omega_* \otimes \mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}\left[\mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^4, \dots\right].$$

($\mathbb{Z}$ felett nem igaz, nem generálnak + torzió)

Ω_n-ben $\nexists$ ptlan rendű elem. (Milnor)

$2\ \mathrm{Tors}(\Omega_n) = 0$ (Wall t.)

$$\mathfrak{N}_* \underset{\neq}{\geq} \mathbb{Z}_2\left[\mathbb{RP}^2, \mathbb{RP}^4, \dots\right], \quad \Omega_*^{\overset{\swarrow \text{ komplex kobord.}}{U}} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\left[\mathbb{CP}^1, \mathbb{CP}^2, \dots\right]$$

↖ stabil normálnyalábon komplex strukt. (a kobord-on is)

HF. 1) <u>Rohlin t.</u> $\Omega_n \xrightarrow{2} \Omega_n \xrightarrow[\text{felejtő funkt.}]{r} \mathfrak{N}_n$ egzakt

2) <u>Bb.</u> $\mathbb{CP}^n \underset{\mathfrak{N}_n}{\sim} \mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^n$

a) karakt. számok (s_I-k)

b) <u>Á</u> M^n_{irr}, T involúció $\qquad M'_{irr}, T'$

$$\left.\begin{array}{l} F = \mathrm{Fix}\,T \approx \mathrm{Fix}\,T' = F' \ \text{diffeom.} \\ \nu_F \approx \nu'_{F'} \leftarrow \text{norm. nyalábok} \end{array}\right\} \Rightarrow M^n \underset{\mathfrak{N}}{\sim} M^{n\prime} \ \text{kobord.}$$

(Spec: Szabad involúció M-en $\Rightarrow M \sim 0$.)

13. előadás

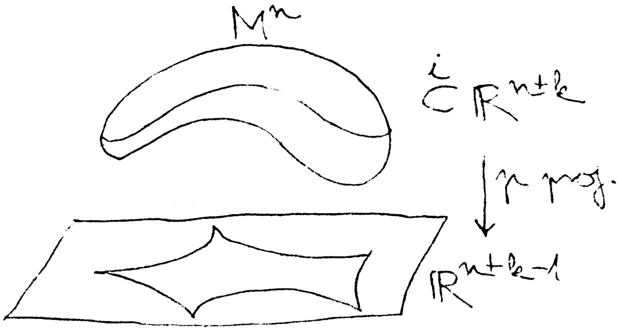
Leképezések kobordizmusai (vizsgára nem kell)

$\mathrm{Emb}(n,2)$, $n \leqq 5$ (Zvagelski)

T. (Szűcs) $\mathrm{Emb}(n,k) \approx \begin{cases} \text{a) véges 2-primér csop. ha } k \text{ ptlan } (\nexists \text{ ptlan rendű elem}) \\ \text{b) } \Omega_{n-k} \text{ mod 2-hatv. rendű csoportok} \\ \text{c) ha } k \text{ ps. és } n<3k-1 \end{cases}$ ← $\mathcal{C}_2$-izo.

$\mathrm{Emb}(n,k) = \pi_{n+k}(MO(k))$

Kieg.: k ps. és $n<3k-1$



$\sigma : \mathrm{Emb}(n,k) \longrightarrow \Omega_{n-k}$

$[i] \longmapsto [\Sigma(i \circ p)]$

$\underset{\uparrow}{\Sigma}(p \circ i) = (n-k)$-dim ir. sok

szingularitásai a lekép.-nek

σ $\mathcal{C}_2$-izo.

Biz. a) k ptlan $\Rightarrow H^*(MO(k); \overset{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}_p}) = 0$ ha p ptlan.

$\Longrightarrow$ a)

Mod p Hurewicz T.

$$H^*(MO(k); \forall \text{ együtth.}) = H^*(D(\gamma_k), S(\gamma_k)) \qquad \gamma_k \to BO(k)$$

$$H^*(D(\gamma_k^{SO}), S(\gamma_k^{SO}); \Lambda) = U \cup H^{*-k}(BSO(k); \Lambda) \overset{*}{=}$$

$\frac{1}{2} \in \Lambda$

$$H^*(BSO(k); \Lambda) \longrightarrow H^*(T\gamma_k^{SO}; \Lambda) \quad \text{Thom-izo.}$$

$$x \longmapsto U \cup \pi^* x$$

$$\overset{*}{=} U \cup \Lambda[p_1, \dots, p_{\frac{k-1}{2}}]$$

$\leftarrow (\chi = 0$ mert k ptlan$)$

$$\begin{tikzcd} BSO(k) \arrow[d, "2"'] & (D(\gamma_k^{SO}), S(\gamma_k^{SO})) \arrow[l] \arrow[d, "2\text{-rétű fedés}"] \\ BO(k) & (D(\gamma_k), S(\gamma_k)) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

↖ involúció szerinti faktor

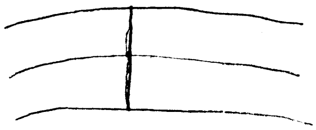
$$\left(\begin{array}{c} 0 \to G \to H \to \mathbb{Z}_2 \to 0 \\ BG \to BH \to B\mathbb{Z}_2 \end{array} \right)$$

$$H^*(D(\gamma_k), S(\gamma_k); \Lambda) \underset{\uparrow}{=} H^*(D(\gamma_k^{SO}), S(\gamma_k^{SO}); \Lambda)^{\text{invar. része}}$$

volt 2. (csoporthatással faktorizálunk) $\frac{1}{2} \in \Lambda$

A $p_1, \dots, p_{\frac{k-1}{2}}$ invar. az involúcióra (a def.-juk nem függ az irányítástól, azt megfordítva azok maradnak).

Az ir.-t megfordítva U előjelet vált (k ptlan)



$U \cup T^* x \xrightarrow{\text{invol.}} -U \cup T^* x$, nincs invar. elem

$\Rightarrow H^*(MO(k); \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathbb{Z}_p}{\mathbb{Q}}) = 0$ ha p ptlan $(\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q})$.

b) k helyett $k+1$-et írunk

$\mathrm{Emb}(n, k+1) \underset{\mathcal{C}_2}{\approx} \Omega_{n-k-1}$ ~~$n < 3k + \text{const}$~~ $n < 2k-1$ csak erre biz.

Biz terve:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^{n+k+1} \arrow[d, "p"] \\ {[M^n} \arrow[r, "f"] & {\mathbb{R}^{n+k}]} \end{tikzcd} \qquad f = p \circ i$$

1.) Milyen típusú az f?

2.) Az ilyen típusú leképezések kobord.-it számoljuk ki.

3.) A Thom-tér egy analógiáját: $X(k)$, $T_{n+k}(X(k))$

Válasz:

1.)-re: f-nél egy pont őse lehet:

a) 1 db regul. pont

b) 2 db regul. pont, adott egy sorrendje

c) lehet még $\Sigma^{1,0}$-pont (1 db)

(Σ^2 nem lehet, mert a vetítéskor a mag ≤ 1-dis)

Sing. elm. $\Rightarrow$ codim $\Sigma^{1,1} = 2(k+1)$

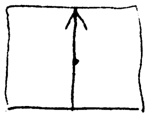
Σ^{ij} $\quad$ $\Sigma^i(f)$: ahol ker $df = i$

↖ f-ek sűrű nyílt halmazára egy sok.

$\Sigma^{ij}(f) = \Sigma^j(f|\Sigma^i(f))$ $\qquad$ $\Sigma^{1,0}$. Whitney-esernyője

dim $\Sigma^{1,1}(f) = n - 2(k+1) < 0$

Ker $df \xrightarrow{\mathbb{R}^1} \Sigma(f)$ vonalnyaláb = triviális



↗ sőt adott egy triviál $\quad f = p\circ i$

1- szeres pontok dim.-ja : n
2- —||— : $n-k$
3- —||— : $n-2k$ ← $n<2k-1$ miatt ilyen nincs.

‾ ← számozott
$\bar{S}$ - lekép.
(Haefliger) $\quad$ 2.)-ra:

dim ↙ $\quad$ kodim ↙

<u>Def.</u> $\bar{S}(n,k) = \bar{S}$ -leképezések kobord csop.-ja

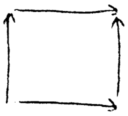
$M^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{n+k}$ $\bar{S}$-lekép.

Világos: $\bar{S}(n,k) \approx \mathrm{Emb}(n,k+1)$ ha $n<2k-1$.

Válasz 3.)-ra:

Ha csak a)-típusúak vannak → $MO(k)$ a klassz.tér
—||— a) és b) —||— → $\Gamma MO(k)$

(ált. esetben: $S^k \cup D^k\times D^k$



$[id_{S^k}, id_{S^k}]$)

$$\begin{tikzcd} S^{k-1}\cup D^k \cup D^k\times D^k \arrow[d] \\ * \end{tikzcd}$$

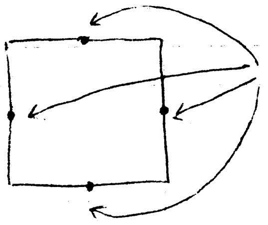
$x \leftarrow (x,y)$ ha $\|y\|=1$
$y \quad (x,y)$ ha $\|x\|=1$

$$\begin{tikzcd} S(\gamma_k) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & D(\gamma_k) \arrow[d] & D(\gamma_k)\times D(\gamma_k) \arrow[d, "D^k\times D^k"] \\ * & BO(k) & BO(k)\times BO(k) \end{tikzcd}$$

b

$\Gamma MO(k) = MO(k) \underset{S}{\cup} D(\gamma_k)\times D(\gamma_k)$

$\xi : \partial(\underbrace{D(\gamma_k)\times D(\gamma_k)}_{D(\gamma_k\times\gamma_k)}) \longrightarrow MO(k)$ (az előző fibrumonként ← Whitehead szor.)



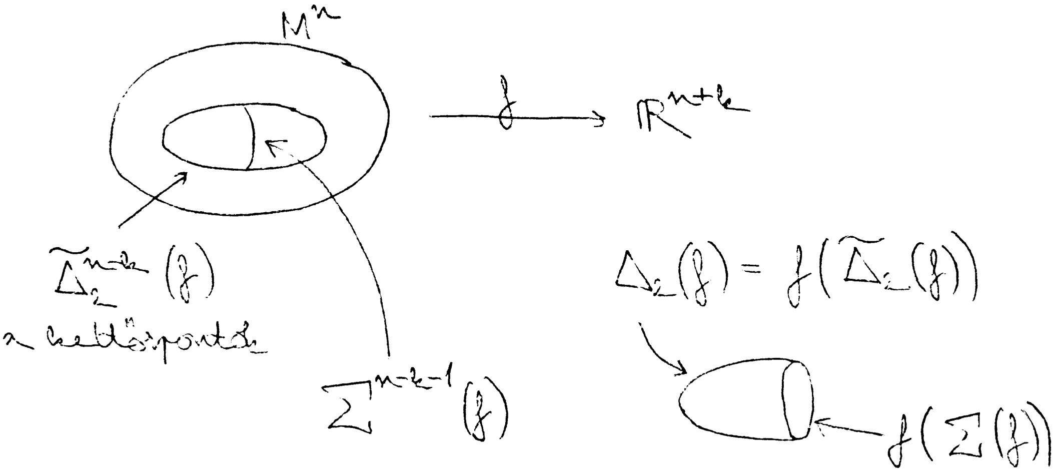
Itt $S(\gamma_k\times\gamma_k) = \partial(D(\gamma_k)\times D(\gamma_k))$-ban keletkezik egy k-kodim. beágy. részsok. ξ az ennek megf. leképezés.

Ha csak a), b) és c) típusúak vannak:

$$X(k) = \Gamma MO(k) \underset{\xi'}{\cup} D(\underset{\overset{\uparrow}{\gamma_k\oplus\gamma_k \text{ } BO(k) \text{ feletti nyaláb}}}{2\gamma_k} \oplus \varepsilon^1)$$

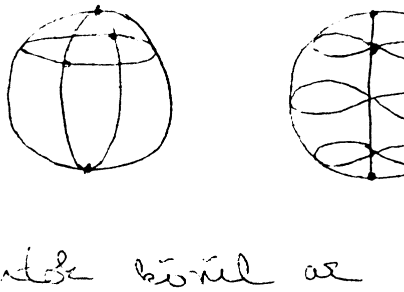
$$\xi' : \partial D(2\gamma_k \oplus \varepsilon^1) \longrightarrow \Gamma MO(k)$$

Sing. elm. ⇒ ált. Whitney esernyők a $\Sigma^{1,0}$-pont környezete



Pl. $n=2$, $k=1$

$$S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

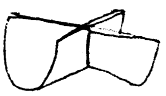


(involúció Δ_2-n, Σ^{n-k-1} a fixponthalmaz)

(kettőspontok körül az f: )

Egy szing. pont és a képe körül $\exists$ lok. koord, melyekben a leképez. Wh.-esernyő × id

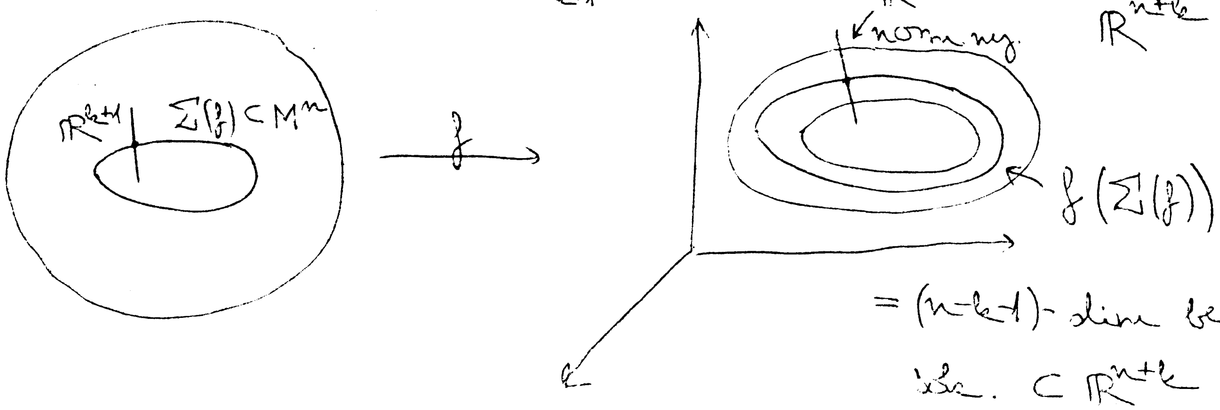
Wh esernyő: $(x,t) \longmapsto (x^2, tx, t)$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$



Ált. —"— : $t \in \mathbb{R}^k$, $x \in \mathbb{R}^1$

$$\mathbb{R}^{k+1} \xrightarrow{w} \mathbb{R}^{2k+1}$$

$$\operatorname{im} w = W_{k+1}$$



$f(\Sigma(f)) =$

$= (n-k-1)$-dim beágy. ssk. $\subset \mathbb{R}^{n+k}$

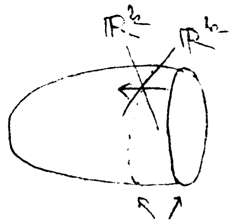
$$f|_{\text{fibr}} : \ \text{fibr.} \longrightarrow \text{fibr.}$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^{k+1}} \xrightarrow[\text{ált. Wh. esernyő}]{} \overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^{2k+1}}$$

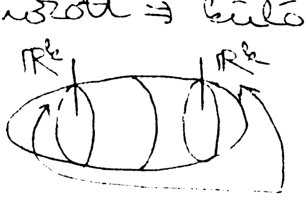
($f|_{\Sigma(f)}$ beágy, mert max rangú és 1-1)

Univ. norm. nyalábja $f(\Sigma(f)) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ -nak ?

<u>Áll.</u> $2\gamma_k \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esernyő nyal.}}}{\varepsilon^1}$ az univ. ↗

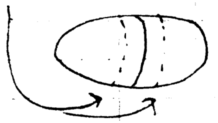


a perem ($f(\Sigma(f))$) és a gallér norm. nyalábja uaz ui. gallér alkotója ε^1, továbbá ez már egy sima kettőspont → két db $\mathbb{R}^k$ a két ághoz. Számozott ⇒ különbözők, a két $\mathbb{R}^k$-nyaláb izomorf:



az övben a két rész között van azonosítás izom.

$$\Sigma \Rrightarrow \overset{\overset{\nu}{\downarrow}}{\tilde{\Delta}}$$



ezzel a két leképezéssel húzzuk vissza $\nu(\tilde{\Delta})$-t.

Ezért van $2\tilde{\gamma}_k$ (nem pedig $\gamma_k \times \gamma_k$).

$2\eta^k \oplus \varepsilon^1$ = norm. nyalábja $f(\Sigma(f))$-nek $\mathbb{R}^{n+k}$-ban.

Def.-juk $\vartheta' : \partial(D(2\tilde{\gamma}_k \oplus \varepsilon^1)) \longrightarrow \Gamma MO(k)$

pontrahúzh. + szabad O(k)-hatás $\rightarrow$ $EO(k) \underset{O(k)}{\times} \mathbb{R}^{2k+1} \supset EO(k) \underset{O(k)}{\times} W_{k+1}$

$\uparrow$ ezen $O(k)$-hatás: $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$-n diag, $\overset{2k+1\text{-edik}}{\mathbb{R}}$-en triv.-an

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{k+1} \arrow[r, "w"] \arrow[d, "A"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & \mathbb{R}^{2k+1} \arrow[d, "A \in O(k)"] \\ \mathbb{R}^{k+1} \arrow[r, "w"] & \mathbb{R}^{2k+1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (x,t) \arrow[r] \arrow[d, "A"] & (x^2, tx, t) \arrow[d, "A"] \\ (x,t) \arrow[r] & (x^2, tx, t) \end{tikzcd}$$

$O(k)$ a w lekép. autom. csoportja, W_{k+1}-et fixen hagyja.

$$2\tilde{\gamma}_k \oplus \varepsilon^1 = EO(k) \underset{O(k)}{\times} \mathbb{R}^{2k+1} \supset EO(k) \underset{O(k)}{\times} W_{k+1} = W(2\tilde{\gamma}_k \oplus \varepsilon^1)$$

$$D(2\tilde{\gamma}_k \oplus \varepsilon^1) \supset W(2\tilde{\gamma}_k \oplus \varepsilon^1) \cap D(2\tilde{\gamma}_k \oplus \varepsilon^1)$$

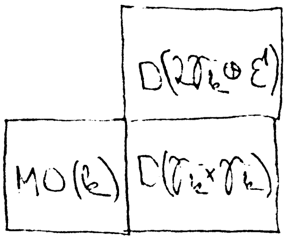
$S(\quad \text{–}\|\text{–} \quad) \supset W \cap S$ = immerzió képe, $\nexists$-nek 3-szoros pontja

$\downarrow \vartheta'$ az imm. klassz. leképezése

$\Gamma MO(k)$

<u>Áll</u> $\pi_{n+k}(X(k)) \approx \bar{S}(n,k)$ <u>Biz</u> $\square$

<u>Összefogl</u>



$H^*(X(k); \mathbb{Z}_p) = ?$

$H^*(MO(k); \mathbb{Z}_p) = 0$ a) miatt

$$H^*(\underbrace{\Gamma MO(k)/MO(k)}; \mathbb{Z}_p) = 0$$

$$T(\gamma_k \times \gamma_k) = T\gamma_k \wedge T\gamma_k \qquad \bar{H}^*(T\gamma_k \wedge T\gamma_k ; \mathbb{Z}_p) = 0$$

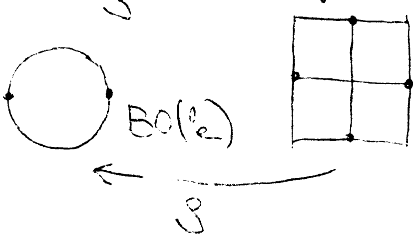
$$\Rightarrow \quad H^*(T(2\gamma_k \oplus \varepsilon^1); \mathbb{Z}_p) \underset{\substack{\uparrow \\ * < 3k}}{\approx} H^*(MSO(2k+1); \mathbb{Z}_p)$$

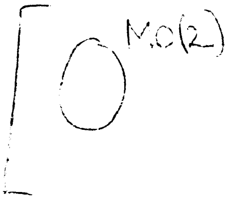
20. előadás

0) $MO(k)$

1) $\bar{\Gamma}_2 MO(k)$ klassz. számozott 2-imm.

$MO(k) \underset{\rho}{\cup} D(\gamma^k \times \gamma^k)$





$$\begin{tikzcd} & D(\gamma_k \times \gamma_k) \arrow[d] \\ \Delta_2(f) \arrow[r] & BO(k) \times BO(k) \end{tikzcd}$$

$$\bar{\Gamma}_3 MO(k) = \bar{\Gamma}_2 MO(k) \underset{\rho}{\cup} D(\gamma^k \times \gamma^k \times \gamma^k)$$

$$\bar{\Gamma}_\infty MO(k) \cong MO(k)_\infty \cong \Omega SMO(k)$$

↑ James-konstr.

klassz. tere a számozott imm.-nak

$$\pi_{n+k}(\bar{\Gamma}_\infty MO(k)) \overset{?}{\approx} \pi_{n+k}(\Omega SMO(k))$$

Biz. $\overline{\text{Imm}}(n,k)$ ↖ számozott imm. $= \text{Emb}(n, k \oplus \varepsilon^1)$

$f: M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$

$[f] \in \pi_{n+k+1}(SMO(k)) = \text{Emb}(n, k \oplus \varepsilon^1)$ ☐

Def. $X, *$ tf. CW kompl.

X_∞ X James konstr. (szorzata)

X pontjai által gen. szabad monoid (félcsop.), $*$ = egység.

azaz $X_\infty = \coprod_{i=1}^{\infty} X^i$

$(x_1, x_2, \dots, x_i)$

Két sorozatot azonosítunk, ha a $*$-ok elhagyása után uaz. lesz. $(x,*) \sim x$

<u>James T.</u> $X_\infty \cong \Omega S X$

$\uparrow$

ez egy „kézi” modellje a huroktérnek

$$(t,x) \xmapsto{\times id_{\mathbb{R}^m}} (t, tx, x^2)^{\times id_{\mathbb{R}^m}}$$

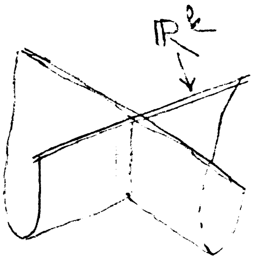
$$(t_1, \dots, t_{n-1}, x) \longmapsto (y_1, \dots, y_{n-1}, z_1, \dots, z_k, z_{k+1})$$

$y_i = t_i \quad i = 1, \dots, n-1$

$z_j = x t_j \quad j = 1, \dots, k$

$z_{k+1} = x^2$

$\omega_s{}^m : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^{2s-1}$, $s = k+1$

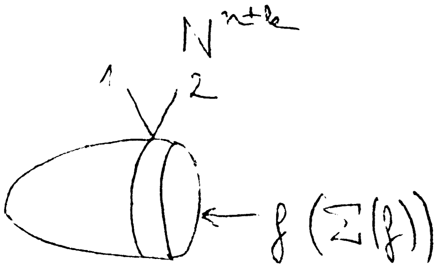


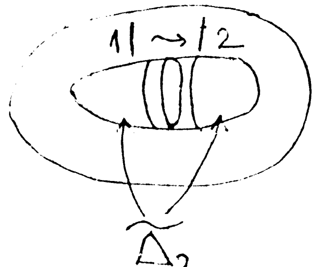
$$\begin{tikzcd}
(x, \overset{\mathbb{R}^k}{\overset{\cup}{t}}) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "A \in O(k)"] & (t, tx, x^2) \arrow[d] \\
\begin{pmatrix} 1 & \\ & A \end{pmatrix} = \varphi_A & \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \Psi_A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{k+1} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\varphi_A"] & \mathbb{R}^{2k+1} \arrow[d, "\Psi_A"] \\
\mathbb{R}^{k+1} \arrow[r, "\omega"] & \mathbb{R}^{2k+1}
\end{tikzcd}$$

a Wh-esernyő autom-a

$f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$





$$\overline{\xi} = \overset{\varepsilon^1}{1} + 2\gamma$$

$$W(\overline{\xi}) \subset E(\overline{\xi})$$ (∀ fibrumban esernyő)

$$S(\overline{\xi}) \cap W(\overline{\xi})$$

$$\overline{\xi} = \varepsilon^1 \oplus 2\gamma_k$$

$$\begin{tikzcd} S(\overline{\xi}) \arrow[r, "\rho"] & \overline{\Gamma_2 MO(k)} \end{tikzcd}$$

<u>Def.</u> $\overline{X}(k)$ $\qquad \overline{\xi} = 1 \oplus 2\gamma_k$

$$\overline{X}(k) = D(\overline{\xi}) \underset{\rho}{\cup} \overline{\Gamma_2 MO(k)}$$

<u>Tl.</u> $\pi_{n+k}(\overline{X}(k)) \approx \overline{S}(n,k)$

$$\mathrm{Ker}\, df \longrightarrow \Sigma^1(f) \text{ triv.}$$

számozott

≤ 2-szeres pontok

Globalizáció (a leképezést az egész szing. halmaz körül hozzuk kanon. alakra). Ez a nehéz.

<u>Tétel.</u> $\mathrm{Emb}(n,k+1) \underset{C_2}{\approx} \Omega_{n-k-1} \mod C_2$

$$i \longmapsto [\Sigma^1(p \circ i)]$$

$\overline{X}(k)$

	$D(2\gamma_k \oplus 1)$
$MO(k)$	$D(\gamma_k \times \gamma_k)$

$n < 2k$

$\pi_{n+k}(\overline{X}(k)) \approx \mathrm{Emb}(n,k+1) \qquad n < 2k-1$

(mert az $\overline{S}$-beli lekép.-ek éppen a megf. ~~fed.~~ beágy.-ok)

$H^*(\overline{X}(k); \overset{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}_p}) \approx H^*(T(2\gamma_k \oplus \varepsilon^1); \overset{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}_p}) \qquad p$ ptlan k ptlen. $\bar{H}^*(MO(k);\mathbb{Z}_p)=0$

$\bar{H}^*(T(\gamma_k\times\gamma_k);\mathbb{Z}_p)=0$

$\parallel$

$\bar{H}^*(MO(k)\wedge MO(k);\mathbb{Z}_p)\overset{\text{Künneth}}{=}0$

$\Rightarrow \bar{H}^*(\Gamma_2 MO(k);\mathbb{Z}_p)=0$

$MO(k)\subset\Gamma_2 MO(k)\longrightarrow T(\gamma_k\times\gamma_k)$ Egz. sor. (0-k fogják közre)

$= \Gamma_2 MO(k)/MO(k)$

<u>Köv.</u> $\Gamma_2\subset\bar{X}(k)\xrightarrow{q}T(2\gamma_k\oplus\varepsilon^1)$ kofibrálás (A ⊂ B → B/A)

Egz. sor. ⇒ q^* izom. $H^*(\ ;\mathbb{Z}_p)$-ben.

$\underline{\mathcal{L}}$

$$\begin{tikzcd}
T(2\gamma_k\oplus\varepsilon^1) \arrow[r, "\hat{t}"] & MSO(2k+1) \\
2\gamma_k\oplus\varepsilon^1 \arrow[d] & \gamma^{SO}_{2k+1} \arrow[d] \\
BO(k) \arrow[r, "t"] & BSO(2k+1)
\end{tikzcd}$$

$\exists t$ indukáló leképez!

Egy nyaláb kétszerese mindig irányított: $\begin{pmatrix}A&0\\0&A\end{pmatrix}$ a ragasztóleképez. $\det\begin{pmatrix}A&0\\0&A\end{pmatrix}>0$

$\xi\oplus\eta$

$A\quad B\qquad\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$

t^* izom. $<k$-dik kohom.-ban

$\hat{t}^*$ izom. $<3k+1$-dik —"—.

<u>Áll</u> t^* izom $H^i(BSO(2k+1);\mathbb{Z}_p)\to H^i(BO(k);\mathbb{Z}_p)$ $i<k$

(<u>köv.</u>: $\hat{t}^*$ —"— $MO(2k+1)$ $T(2\gamma_k\oplus\varepsilon^1)$ $i<3k+1$

Thom-izo.)

k ptlen. ⇒ $H^*(BSO(2k+1))$-et a Pontrj. oszt. gener.

a) $H^*(BSO(2k+1);\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[p_1,\dots,p_k]$

$H^*(BO(k);\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[q_1,\dots,q_{\frac{k-1}{2}}]$

$$\begin{tikzcd} BSO(n) \arrow[d, "2"] \\ BO(n) \end{tikzcd}$$

n ptlan

$\leftarrow$ $BSO(n)$-en involúció, a Pontrj.-osztályok invariánsak $\Rightarrow$ $BO(n)$ kohom-ét is a Pontrj. oszt-ok gener.

$$1+p_1+\dots+p_k \longmapsto \left(1+q_1+\dots+q_{\frac{k-1}{2}}\right)^2$$

$\uparrow$ totális Pontrj. oszt. , $\mathbb{Z}_p$-felett nincs 2-rendű elem

$i \leq \frac{k-1}{2}$ $\qquad p_i \longmapsto 2q_i + f(q_1,q_2,\dots,q_{i-1})$

izom.

dim $\leq 2(k-1)$ $\qquad 2k-2$

Köv $\quad \overline{\Gamma}_2 \subset \overline{X}(k) \xrightarrow{q} T(2\gamma_k \oplus \varepsilon^1) \xrightarrow{\hat{t}} MSO(2k+1)$

$\hat{t}\circ q$ $\mathcal{C}_2$-izom-t indukál π_*-ban $\quad * \leq 3k$

$n<2k$

$\Rightarrow \pi_{n+k}(\overline{X}(k)) \longrightarrow \pi_{n+k}(MSO(2k+1)) \longrightarrow \Omega_{n-k-1}$

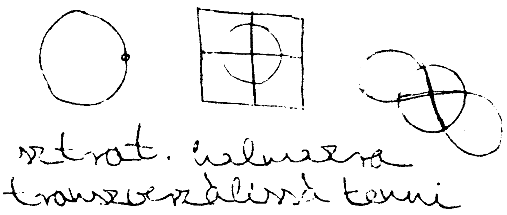
---

unoriented

$\mathrm{Emb}^{O}(n,k+1) \approx \overline{\mathcal{S}}(n,k) \approx \pi_{n+k}(\overline{X}(k)) \underset{\mathcal{C}_2}{\approx} \pi_{n+k}(T(2\gamma_k \oplus \varepsilon^1)) =$

$\overline{X}(k) \supset D(2\gamma_k \oplus \varepsilon^1)$

ált. Pontr.-Thom konstr.



egy sztrat. halmazra kell transzverzálissá tenni

$\underset{\mathcal{C}_2}{\approx} \pi_{n+k}(MSO(2k+1)) = \Omega_{n-k-1}.$

$$\left[S^{n+k} \longrightarrow \underset{\substack{\cup \\ D(2\gamma_k \oplus \varepsilon^1) \\ \cup \\ BO(k)}}{\overline{X}(k)}\right] \xrightarrow{q_*} \left[S^{n+k} \longrightarrow \overline{X}(k)/\Gamma_2 MO(k)\right]$$

$\equiv$

ennek ősei a sing. pontok $\longrightarrow BO(k)$

(tehát csak a sing. halmazt vesszük q_*-nál, $\hat{t}_*$ pedig elfelejti a normálnyaláb struktúrát)

$\Rightarrow$ beágy. $\longmapsto$ a vetület sing. halm.-nak kobord. oszt.

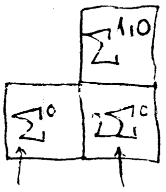
I.

$$\mathrm{Imm}(n,k') \underset{\mathbb{Z}_2}{\approx} \begin{cases} 0 & k' \text{ ptlan} \\ \Omega_{n-k} & k' \text{ ps.}, \ \underbrace{n<3k'-1} \end{cases}$$

„Biz" Egyelőre $n<2k$-ra.

$k' = k+1$

Lekép. strukt.:



1-szeres 2-szeres nem-sing. pontok beágy.

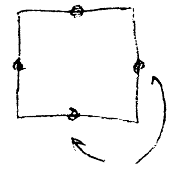
$$\begin{tikzcd} f: M^n \arrow[r, looparrow] \arrow[dr, "S\text{-lekép.}"'] & \mathbb{R}^{n+k+1} \arrow[d] \\ & \mathbb{R}^{n+k} \end{tikzcd}$$

nincs számozás, a magnyaláb a sing. kör felett most is triv.

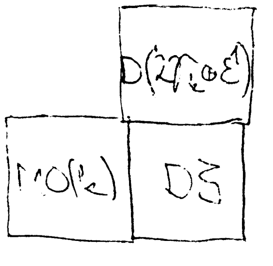
$$D(\gamma_k \times \gamma_k) \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} S^\infty = D\xi$$

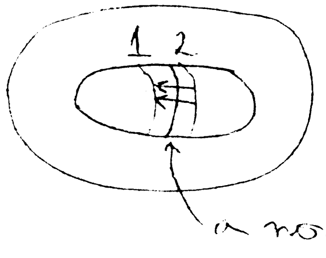
$$\downarrow D^k \times D^k$$

$$B = BO(k) \times BO(k) \underset{\mathbb{Z}_2}{\times} S^\infty$$



e mentén rag.





a sing. halmaz körül van számozás

a normálnyaláb irányítása adja a számozást.

Ha $n < 3k-1$

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^{n+k+1} \arrow[d] \\ & \mathbb{R}^{n+k} \end{tikzcd}$$

$\overset{\text{1 db reg. ág}}{\Sigma^0}$, $\overset{\text{2 reg. ág}}{2\Sigma^0}$, $3\Sigma^0$

$\Sigma^{1,0}$, $\Sigma^{1,0}+\Sigma^0$, $\Sigma^{1,1}$

(sztratifikáció)

		$\Sigma^{1,1}$
	$\Sigma^{1,0}$	$\Sigma^{1,0}+\Sigma^0$
Σ^0	$2\Sigma^0$	$3\Sigma^0$

$\Sigma^{1,1}$: $(t_1,\dots,t_{n-1},x) \longrightarrow (y_1,\dots,y_{n-1},z_1,\dots,z_k,z_{k+1})$

$y_i = t_i$

$z_1 = t_1x + t_2x^2$

$z_2 = t_3x + t_4x^2$

$\vdots$

$z_k = t_{2k-1}x + t_{2k}x^2$

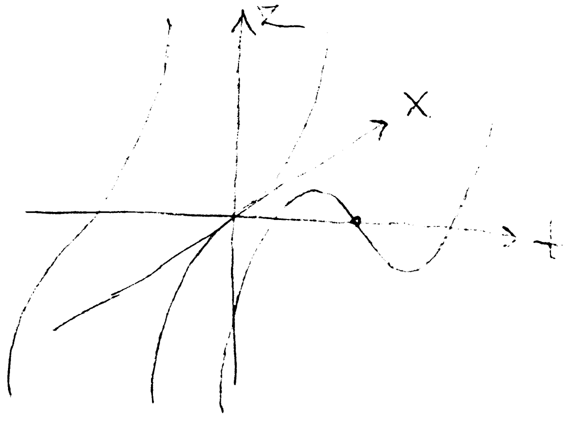
$z_{k+1} = t_{2k+1}x + x^3$

$\Sigma^{\overbrace{1,\dots,1}^{r}}$: az x-hatványok r-ig mennek

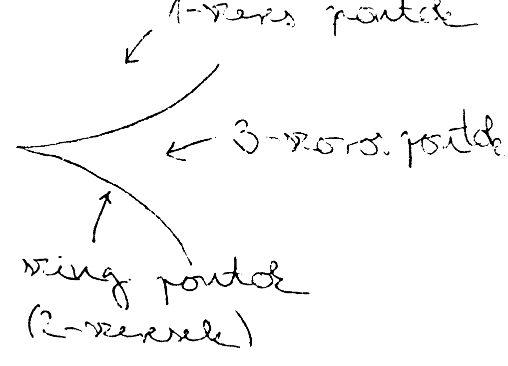
$k=0$: csúcs

$\Sigma^{1,1}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ esetén

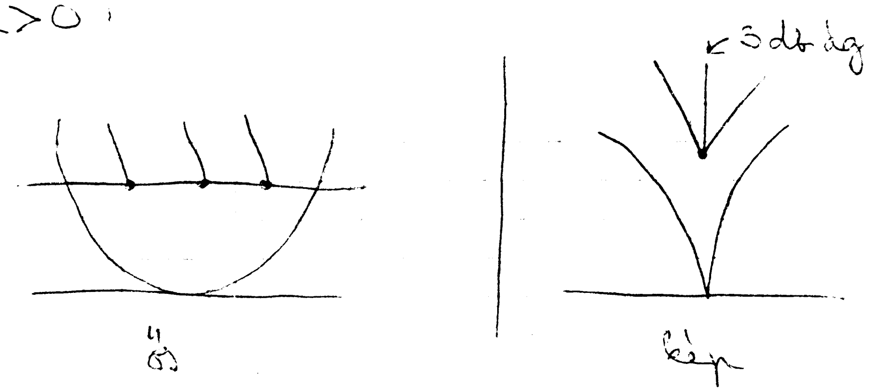
$(x,t) \longmapsto (\underbrace{x^3+tx}_{z}, t)$



(x,t)-sík → (z,t)-sík vetítés a leképez.



$k > 0$:



$\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$
$x \longrightarrow x^2$

(Whitney: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gen.: $\overset{\Sigma^{1,0}}{\text{fold}}$ és $\overset{\Sigma^{1,1}}{\text{cusp}}$ sing.-k)

Első feladat:

Mely bord. oszt.-ok repr.-hatók imm.-val?

$$\mathrm{Imm}^{SO}(n,k) \longrightarrow \Omega_n$$
$$[f: M^n \to \mathbb{R}^{n+k}] \longmapsto [M^n]$$

a) $$\mathrm{Imm}^{SO}(n,k) \underset{\mathcal{C}_2}{\approx} \begin{cases} \Omega_n & k \text{ ptlan} \\ \Omega_n \otimes \Omega_{n-k} & k \text{ ps.} \end{cases} \qquad n < 2k$$

$$f \longmapsto [M^n], [\Delta_2(f)]$$

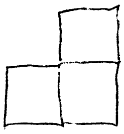
$\Omega_n = \Omega_n(\mathbb{R}^{n+k})$ bordizmus csoport

$\uparrow$ főnyt. leképezést approx. sima gener.-sal $\Rightarrow$

$$\Omega_n(\mathbb{R}^{n+k}) = S(n,k)$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Imm}^{SO}(n,k) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega_n(\mathbb{R}^{n+k}) = S(n,k) \arrow[d, equal] \\ \pi_{n+k}(\Gamma_2 MSO(k)) \arrow[r] & \pi_{n+k}(X^{SO}(k)) \end{tikzcd}$$

($X^{SO}(k)$, $\Gamma_2 MSO(k)$ homot. egz. sorozatából.)

ált.:  filtráció spektr. sorozata.

21. előadás

(Kőműves Balázs)

otiváció

Vnyalábnak mikor van adott részhalmazt elkerülő szelése?

G → Aut(V) repr., $\eta \subseteq V$ G-invar

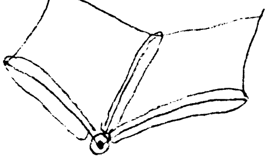
G strukt. csoportú vnyalábnak η-t elkerülő szeléséről beszélhetünk.

s szelés, $s^{-1}(\eta) \rightsquigarrow$ kohom. osztály B-ben.

(Pl. k lin. fgen. szelés ξ-ben: $V_k(\xi) \subset$ vnyaláb-ba eső szelés).

Def $\eta \subset X$ stratifikált, ha sima sokaságok diszj. uniója

Pl komplex alg. varietás



Áll $f: Y \to \underset{\underset{\eta}{\cup}}{X}$ ⋔ ∀ strátumra

$\eta \leftarrow$ ∀ strátum $\overset{ps}{\text{ptlan}}$ ds. $[\eta]_X \in H^*(X)$

$$[f^{-1}(\eta)]_Y = f^*[\eta]_X$$

Σ: max. ds. (= dim η) strátumok U-ja

Def $[\eta]_X$: $(X\setminus\Sigma) \supset (\eta\setminus\Sigma)$ ← nem sing.

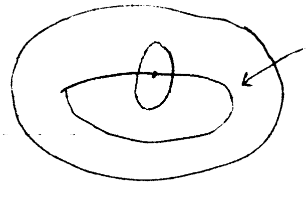
Thom-osztály $\in H^*(X\setminus\Sigma \mid \eta\setminus\Sigma)$ $\left(H^*(X|A) = H^*(X, X\setminus A)\right)$

$(X, X\setminus\Sigma, X\setminus\eta)_{\underset{\text{ш}}{\text{hm}}}$ $k \leq \mathrm{codim}(\eta)$ ([illegible])

$$H^k(X|\Sigma) \to H^k(X|\eta) \xrightarrow{\sim} H^k(X\setminus\Sigma|\eta) \to H^{k+1}(X|\Sigma)$$

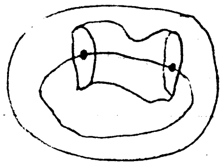
Áll. $H^k(X|\eta) = \begin{cases} 0 & k < \mathrm{codim}(\eta) \\ \mathbb{Q} & k = \mathrm{codim}(\eta) \end{cases}$ $\overset{\mathbb{R}\ \text{Thom izo.}}{H^{k-\mathrm{codim}(\eta)}(\eta)}$

$$H^k(X|\eta) \longrightarrow H^k(X)$$
$$\mu_\eta \longmapsto [\eta]_X$$



repr. kohom. osztály: egy komplementer ds. ciklushoz a metszéspontok számát rendeli.

jóldef., mert a homológiát transzverzálissá téve elkerüli a ≥ 2-kodimenziós szingularitásokat + a szakasznak két végpontja van



$\rho: G \to \mathrm{Aut}(V)$, $\eta \subset V$

ξ $\quad E\xi \supset \eta$

$$B_GV = EG \times_\rho V$$
$$\gamma \downarrow$$
$$BG$$

$$[\eta]_{E(\xi)} \in H^k(B(\xi))$$

$$\xi = f^*\gamma$$

$$f^*[\eta]_{B_GV} = [\eta]_{E(\xi)}$$
$$\shortparallel$$
$$[s^{-1}(\eta)]_{B(\xi)}$$

$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\text{homot. ekv.}"'] & B_GV \arrow[d] \\ B(\xi) \arrow[r, "f"] & BG \end{tikzcd}$$

$$Tp_G(\eta) := [\eta]_{B_GV} \in H^k(BG) \quad \text{Thom-polinom}$$

↑ gyakran pol-gyűrű

$H^*(BG) = ?$

Tétel (Borel) $\quad H^*(BG) = [H^*(BT)]^W \quad (T \hookrightarrow G$ indukálja$)$

G Lie-csop. , T max. tórusz (max. kompakt rcsp.)

$W = N_GT/T$ normalizátor

Pl $\quad G = GL(n) \quad$ T: diag. mátrixok

$W = S_n$: a diag. mtx elemeit permutálja

$BT = \underbrace{BU(1)}_{\mathbb{CP}^\infty} \times \dots \times BU(1)$

szimm pol-ok.

$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$

$H^*(EG \times_\rho X) = H^*_G(X)$

X/G

Pl $\quad \eta = \{0\} \subset V^k \qquad Tp = $ Euler-osztály

(0-szelés őse)

$B_G V$

$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1,2$ $\qquad \eta_1, \eta_2$

$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_1 \oplus V_2)$

$\eta_1 \times \eta_2 \subset V_1 \oplus V_2$

$Tp(\eta_1 \times \eta_2) = Tp(\eta_1) \times Tp(\eta_2)$.

(analóg: metszet duálisa a szorzat)

$T \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$, invar. altér.

kompakt komm. Lie-csop. repr.: 1-dim repr.-k összege.

$\varphi : T \longrightarrow \mathbb{C}^*$

$d_1\varphi \in t^* < g^*$

$$\Lambda^* = \underset{\underset{H^2(BT;\mathbb{Z})}{\shortparallel}}{\overset{\cup}{\Gamma}} \; \exp_T^{-1}(1) \text{ rács} = \Lambda \subset t$$

Pl $G = SL(3)$

$w \in \Gamma \qquad ET \times_{\underset{\varphi}{\exp(w)}} \mathbb{C} = \xi \qquad w_1 \mapsto c_1(\xi)$

$U(1) \longrightarrow GL(\mathbb{C}^n) \qquad \begin{bmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^n \end{bmatrix}$

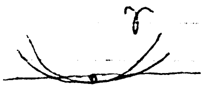
$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha^2 x_2, \dots, \alpha^n x_n)$

$t \longmapsto (t, t^2, \dots, t^n) \qquad \mathrm{Im}(t) = \eta$ rac normálgörbe.

Lemma. η_t, $t \in \mathbb{C}$ $\overset{\text{G-invar}}{\text{alg}}$ varietások családja, $G \to \mathrm{Aut}(V)$

$\tilde{\eta} = \{(x,t) \mid x \in \eta_t, t \in \mathbb{C}\} \subset V \times \mathbb{C}$ is ired alg varietás

$m_t \, \mathrm{Tp}(\eta_t) = m_s \, \mathrm{Tp}(\eta_s) \quad \forall t, s$



átdeformáljuk az η-t

~~$\tilde{\eta} \Rightarrow$~~ $V \times \mathbb{C} \supset V_t = \{(x,t) : x \in V\}$

$m_t = \tilde{\eta} \cap V_t$ metszési $\overset{\text{multiple}}{\text{index}}$

↑ ired ⇒ 1db szám

Áll $A, B \subset X$, $\dim(A \cap B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(X)$

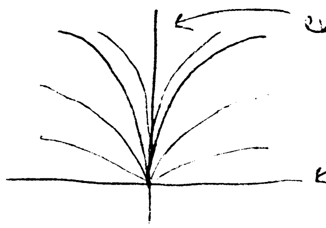
$A \cap B = Z_1 \cup \ldots \cup Z_k$ ired komp.-ek

$[A]_X \cup [B]_X = \sum m_i [Z_1]_X$

↑

metszési ~~index~~
multiplicitások

Pl $x^2 - y^3$



← ennek a Tp-jének 2-szerese.

← ennek 3-szorosa.

$\eta_s = \mathrm{im}(t \mapsto (t, st^2, st^3, \ldots, st^n))$ invar az α-s U(1)-hatásra.

$\tilde{\eta}$ sima, $\tilde{\eta} \pitchfork V_t$

$\eta_0 = \langle *, 0, \ldots, 0 \rangle$ altér, erre már tudjuk:

$H^*(BU(1)) = \mathbb{Q}[\beta]$ $(n!) \cdot \beta^{n-1}$. (a többi súlyok szorzata)

$G = GL(2)$

$V = \mathrm{Sym}^n \mathbb{C}^2$ ← n-edik szimm. tenzorhatvány

2-vált. homog. n-edfokú pol-ok terével izomorf

hatás: a 2 változón hatunk 2×2-es mtx-okkal és behelyettesítünk

$S : GL(2) \longrightarrow GL(\mathrm{Sym}^n \mathbb{C}^2)$

$\mathbb{C}P^1$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \quad \sum \lambda_i = n$

$\Sigma_\lambda \subset V$ (λ_i: i-szeres gyökök száma)

$Tp(\overline{\Sigma_\lambda})$

$x^{n-i}y^i = O_i$ orbit $\quad j_i : O_i \hookrightarrow V$

$$\begin{tikzcd} j_i^* : H^*(B_G V) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cup" description] & H^*(B_G O) \arrow[d, phantom, "\parallel" description] \\ Tp(\Sigma_\lambda) & H^*(BG_x) \end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ stab.

$(G_x \hookrightarrow G)^*$

$$\begin{tikzcd} U(1) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & T \arrow[d] \\ & GL(Sym) \end{tikzcd}$$

$[\alpha^i_{\alpha i - n}]$

22. előadás

(Bérczi Gergő)

Duistermaat-Heckman formula

G kompakt, öf. Lie-csoport, $T^k \subset G$

$\mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$

$\underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{k}$

V^n, $G \curvearrowright V^n$ lin.-an $\Rightarrow G \curvearrowright \mathbb{P}V$

$\eta \subset V$ sima, zárt orbit $\rightsquigarrow \mathbb{P}\eta \subset \mathbb{P}V^k$

$\uparrow$ kodim. (komplex)

$H^*(BT) = \mathbb{R}[\alpha_1, \dots, \alpha_k] \qquad \alpha_i \in H^2(BT)$

$$\begin{tikzcd} \gamma^1_{\mathbb{C}} \arrow[d] \\ BU(1) \end{tikzcd} \qquad \alpha_i = c_1(\gamma^1_{\mathbb{C}})$$

$H^*(BT) = H^*(BU(1) \times \dots \times BU(1))$

$T^k \subset G$, $H^*(BG) = [H^*(BT)]^W$

$$\begin{tikzcd} BV \arrow[d] & BT \arrow[d] \\ {} & {} \end{tikzcd}$$ visszahúzott.

$$\begin{tikzcd} \Sigma B\tau_i \arrow[r] \arrow[d] & BV \arrow[d] \\ BT \arrow[r] & BG \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} wT \arrow[r] \arrow[d, squiggly] & \mathcal{U}(1) \\ c_1(B\tau) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B\tau \arrow[d] \\ BG \end{tikzcd}$$

$$W \in H^2(BG)$$

<u>Jel.</u> $[\eta]_G \in H^{2c}(BG)$, $B\eta \subset BV$ PD-a

nem sima!

$[\mathbb{P}\eta]_G \in H^{2c}(B\mathbb{P}V)$

$$\begin{tikzcd} B\mathbb{P}V = EG \times_G \mathbb{P}V \arrow[d, "\mathbb{P}V"] \\ BG \end{tikzcd}$$

<u>1. lépés</u> $H^*(B\mathbb{P}V) = H^*(BG)[x] \Big/ \prod_{i=1}^{n}(x+\pi^*(w_i))$

$$\begin{tikzcd} \tau \arrow[d] \\ \mathbb{P}V \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} B\tau \arrow[d] \\ B\mathbb{P}V \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi^*(BV) \arrow[d] & B\cancel{V} \arrow[d] \\ B\mathbb{P}V \arrow[r] & BG \\ \pi^*(w_i) & w_1,\dots,w_n \in H^2(BG) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$x = -c_1(B\tau)$

Leray–Hirsch:

$$\begin{tikzcd} \pi^*\xi \arrow[d] & \xi \arrow[d] \\ P(\xi) \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

<u>Köv.</u> $[\mathbb{P}\eta]_G = \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i$, $g_i \in H^{2c-2i}(BG)$

<u>Áll</u> $g_0 = [\eta]_G$; $g_c = \deg \mathbb{P}\eta$

<u>Push-forward</u> (Gysin-leképezés)

M^m, N^n irányított, $f: M \to N$

$$f_!: H^*(M) \longrightarrow H^{*+n-m}(N)$$

(i) $(f \circ g)_! = f_! \circ g_!$

(ii) $H^*(M)$-modulus homom. $f_!(\alpha \cdot f^*\beta) = (f_!\alpha)\cdot\beta$

(iii) $f: M \hookrightarrow N$ $\quad f_! 1 = [\mathrm{Im}\, M]$

$$f^* f_! 1 = e(M \hookrightarrow N)$$

(iv) $f: M \to N$ fibrálásra

M, N $\quad f: M \xrightarrow{G} N$

$f: B_GM \to B_GN$

nem sokaságok!

$M \xrightarrow{\text{beágy.}} M \times N \xrightarrow{\text{fibr.}} N$

$m \longmapsto (m, f(m)) \longrightarrow f(m)$

Elég beágyazásra és fibrálásra def.-ni.

(i) $i: M \hookrightarrow N$, $\quad M \subset U$

$B_GM \hookrightarrow B_GU \qquad i_!^G(1) = [B_GM \hookrightarrow B_GU]$ ← normálnyaláb Thom-oszt.

$$\begin{tikzcd} H^{*-1}(N\setminus M) \arrow[r] & H^*(N, N\setminus M) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\varphi\ \text{Thom-izo.}"] & H^*(N) \\ & H^{*-(n-m)}(M) & \end{tikzcd}$$

$j^* \circ \varphi(\alpha)$

(ii) $f: M \to N$ fibr. $\Rightarrow$ $B_GM \to B_GN$ fibr.

$M/G \longrightarrow N/G$

<u>Jel.</u> $N = pt.$, $\pi: M \to pt$

(~~M~~) $\pi_!^G = \int_M : H^*(B_GM) \longrightarrow H^*(BG)$

<u>Áll.</u> $\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in H^*(B\mathbb{P}V) \Rightarrow \int_{\mathbb{P}V} \alpha = a_{n-1}$.

<u>Áll.</u> $q = \dfrac{e(T^*BV)}{x} \in H^{2n-2}(B\mathbb{P}V)$

$e(T^*BV) = \sum x^i \cdot c_{n-i}(BV)$

$q = \sum x^{i-1} c_{n-i}(BV)$.

$$[\eta_L]_G = \int_{\mathbb{P}V} q \cdot [\mathbb{P}\eta_L]_G \in H^*(BG)$$

<u>Áll</u> $i : \mathbb{P}\eta_L \hookrightarrow \mathbb{P}V$, $Bi : B\mathbb{P}\eta_L \longrightarrow B\mathbb{P}V$

$$[\eta_L]_G = \int_{\mathbb{P}\eta_L} (Bi)^* q$$

$G \curvearrowright M$, $T \subset G$ $\rightsquigarrow$ $T \curvearrowright M$ fixpontjai: $F = \bigcup_i P_i$.

$H_T^*(F)$ $\qquad$ $H_T^*(M)$

$i : F \hookrightarrow M$, $\quad i_!^F : H_T^*(F) \longrightarrow H_T^*(M)$, i_F^* ~~(F_*)~~

$\qquad\qquad i_!^P : \quad P \qquad M$, $\quad i_P^*$

$$H_T^*(F) \overset{\uparrow}{\cong} H^*(BT) \otimes H^*(F) = \sum H^*(BT) \otimes H^*(P)$$

Künneth + $T \curvearrowright F$ triv.

$$i_P^* i_!^P(A) = e(\nu_{P \subset M})$$

$$Q = \sum_P \frac{i_P^*}{e(\nu_P)} \qquad \text{az } i_! \text{ inverze}$$

↑ ekvivar. Euler-oszt.

$$Q : H_T^*(M) \longrightarrow H_T^*(P)$$

$\varphi \in H_T^*(M)$, $\quad \varphi = i_!^F Q\varphi = \sum_F \frac{i_!^F i_P^*}{e(B\nu_P)}$

$\int_P = \int_M i_!^F$

$$\int_M \varphi = \sum_P \int_P \frac{i_P^* \varphi}{e(B\nu_P)} \qquad \text{Atiyah-Bott } \int\text{-formula}$$

$i : P \hookrightarrow M$

M helyett $\mathbb{P}V$:

$$\begin{tikzcd}
f \in F \cap \mathbb{P}\eta_L \arrow[r, hook, "i_f"] \arrow[d, "i_{\mathbb{P}\eta_L, f}"] & \mathbb{P}V \arrow[d] \\
\mathbb{P}\eta_L \arrow[ur, "i_{\mathbb{P}\eta_L}"'] \arrow[r, bend right] & pt
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H_T^*(f) \arrow[r, "i_{f!}"] & H_T^*(\mathbb{P}V) \\
H_T^*(\mathbb{P}\eta_L) \arrow[u, "i^*_{f,\mathbb{P}\eta_L}"] \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

~~$(i^*_{\mathbb{P}\eta_L})^{-1} = \sum \frac{i^*_{\mathbb{P}\eta_L}}{e(\nu_{\dots})}$~~

$$[\eta_L]_G = \int_{\mathbb{P}\eta_L} (Bi)^* q = \int_{\mathbb{P}\eta_L} i^*_{\mathbb{P}\eta_L} q = \sum_{f \in \mathbb{P}\eta_L \cap F} i_{f!} \overbrace{i^*_{f,\mathbb{P}\eta_L} i^*_{\mathbb{P}\eta_L}}\, q =$$

$$= \sum_{f\in\mathbb{P}\eta\cap F} \frac{i_f^* q}{e(\nu_f)}$$

$i_F^* : H_T^*(M) \to H_T^*(F)$

$i_1^F : H_T^*(F) \longrightarrow H_T^*(M)$ $\qquad Q = \frac{i_f^*}{e(\nu_F)}$

$$[\eta]_T = \sum_{f\in\mathbb{P}\eta\cap F} e(BV)\,\left(e(T_f\mathbb{P}\eta)\cdot\omega_f\right)^{-1}$$

$BV \downarrow BT$ $\quad \Pi\ldots$

<u>DH formula:</u>

$$[\eta]_T = e(BV)\cdot\sum_{f\in\mathbb{P}\eta\cap F}\left(e(T_f\mathbb{P}\eta)\cdot\omega_f\right)^{-1}$$

tudjuk: polinom

PD

$V = ET\times_T V \supset B\eta$

$\downarrow$

BT

$\uparrow$ T-hatásra invar. egyenesek

$\uparrow$ súly, $T\to U(1)$ a hatás f egyenesén $\rightsquigarrow$ komplex irred- -ucibilis c_1-e.

$\mathbb{P}\eta$ sima, zárt, η kúp e felett.

(η G-orbit, f-ek a T-hatás fixpontjai)

$GL(n) \curvearrowright \Lambda^k\mathbb{C}^n$

$\langle e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\rangle$

$\mathbb{P}(e_1\wedge\ldots\wedge e_k$ orbitja$) = Gr(n,k)$

kúp

$Gr(n,k) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k\mathbb{C}^n)$ Plücker-beágy.

$\langle v_1,\ldots,v_k\rangle \longmapsto v_1\wedge\ldots\wedge v_k$

$T_{e_I}\eta \qquad I\in\binom{n}{k}$ multiindex.

T_{e_I} cone $Gr(n,k) = \langle e_{i_1}\wedge\ldots\wedge\hat{e}_{i_j}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\wedge e_l \mid e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\rangle$

$H^*(BT(n)) = \mathbb{R}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ $\qquad \alpha_{i_1}+\ldots+\hat{\alpha}_{i_j}+\ldots+\alpha_{i_k}+\alpha_l$

$e_I \rightsquigarrow \alpha_I = \alpha_{i_1}+\ldots+\alpha_{i_k}\in H^2(BT)$ $\qquad \alpha_{i_1}+\ldots+\alpha_{i_k}$

súlyok

$$e(T_j P^n_\ell) = \prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}} (\alpha_j - \alpha_i)$$

T = diag. mátrixok ⇒ $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$ fixpont (∀ vektor (e_{i}) egy konstanssal szorzódik a diag. mátrix hatására.)

$$T_p(Gr(n,k)) = \prod_{I\in\binom{n}{k}} (\alpha_{i_1}+\ldots+\alpha_{i_k}) \cdot \sum_{I\in\binom{n}{k}} \frac{1}{\prod_{\substack{i\notin I\\ j\in I}} (\alpha_i-\alpha_j)(\alpha_{i_1}+\ldots+\alpha_{i_k})}$$

↗ a súlyok szorzata az e(BV)

23. előadás

$f: N^n \longrightarrow P^r$ $\qquad \Sigma^r$ pontok $\qquad r \geq n$

$\Sigma^{i,j}$

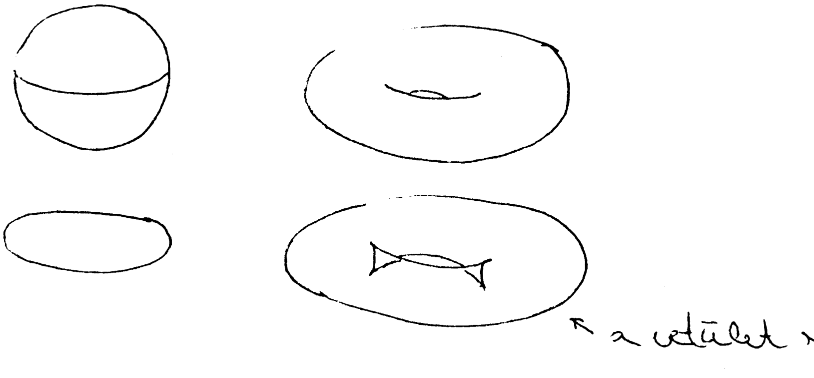
$C^\infty(M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2)$

Whitney: Nyílt sűrű halmazra:

Csak a köv.-k lehetnek a sing-ok lokálisan

			kodim
1)	$(\mathbb{R}^2,0) \to (\mathbb{R}^2,0)$ max. rangú sima	Σ^0	0
2)	hajtás: $(x,y) \to (x^2,y)$	$\Sigma^{1,0}$	1
3.)	cusp (csúcs) ⋀ $(x,y) \to (x^3+xy,y)$	$\Sigma^{1,1}$	2

$$\# \Sigma^{1,1} = w_2(M^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$\equiv \chi(M^2) \mod 2$$



↖ a vetület sing

Thom: $\exists$ pol. $p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$

$$[\Sigma^r(f)] = p(w_1(N), \dots, w_n(N), f^* w_1(P), \dots, f^* w_p(P))$$

Biz.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HOM}(TN, f^*TP) \supset \overline{\Sigma}^r \arrow[d, "{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \supset \overline{\Sigma}^r}"] \\ N \arrow[u, bend left, "j^1 f"] \end{tikzcd}$$

$j^1 f$ ↑ a differenciál

$\overline{\Sigma}^r$ ↑ legalább r-rel esik a rangja a mtx-nak

$$\begin{tikzcd} J^1 \arrow[d] \\ N \times P \supset \text{graf } f \arrow[d] \\ N \arrow[uu, bend left] \end{tikzcd}$$

graf f ↑ erre megszorít-juk

$$\Sigma^r(f) = (j^1 f)^{-1}(\Sigma^r)$$

(Σ^r invar. a strukt. csop.-ra: bázistransf. nem változtatja a rangot) $\Rightarrow$ beszélhetünk Σ^r-ről a nyalábban is

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HOM}(\dots) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{HOM}(\pi_1^*\gamma_n, \pi_2^*\gamma_p) \supset \overline{\Sigma}^r \arrow[d] & \\ N \arrow[r, "{(\tau_N, f \circ \tau_P)}"] & BO(n) \times BO(p) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ BO(n) & & BO(p) \end{tikzcd}$$

az érintőnyalábok klassz. leképezései

BO(n) s.w. ozt.   BO(p) s.w. ozt.

$[\Sigma^r(f)]$ kohom. $\longleftarrow\!\!\!\dashv$ $p(w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_p)$

ztálya N-ben,

és ezt

$(w_1(N), w_2(N), \dots)$

s.w. osztályok természetessége miatt

$f^* w_i(P) = (f \circ \tau_P)^*(v_i)$

$$p(w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_p) = [\overline{\Sigma}^r]$$

↗ ennek kohom. oszt. egy rtrat. halmazban (a ciklust $\overline{\Sigma}^r$-sal vett metszete adja)

$\square$

i-edrendű Thom-Boardman sing.-ok:

$\Sigma^{j_1, \dots, j_i}$ (i-jetektől függ)

$$\begin{tikzcd} J^i(N, P)\big|_{\text{graf } f} \arrow[d] \\ N \end{tikzcd}$$

← Strukt. csop.: $j^i \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n, 0) \times j^i \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^p, 0) \cong$

$$\cong GL_n(\mathbb{R}) \times GL_p(\mathbb{R}) \cong O(n) \times O(p)$$

$$\begin{tikzcd}
J^i(N,P)\big|_{\text{graf } f} \arrow[r] \arrow[d] & J^i \supset \Sigma^{j_1,\dots,j_i} \arrow[d] \\
N \arrow[r] & BO(n) \times BO(p) \\
{[\Sigma^{j_1,\dots,j_i}(f)]} & p(w_1,\dots w_n, v_1,\dots,v_p) \arrow[u] \arrow[l, "g^*"']
\end{tikzcd}$$

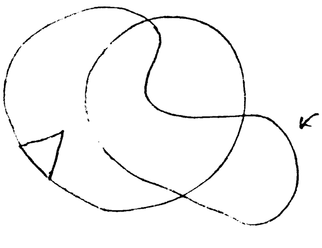
$p(w_1(N), \dots)$

$f : N^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gener.

1.) Csak hajtás szing: $(x, t_1,\dots,t_{n-1}) \longrightarrow (x^2, t_1,\dots,t_{n-1})$

A repr. kohom. oszt.: $w_1(N^n)$

Biz 1.) Tfh f szimpliciális.



a hajtás képe $\mathbb{R}^n$-ben

Irányítsuk $\mathbb{R}^n$ szimplexeit

$\Downarrow$

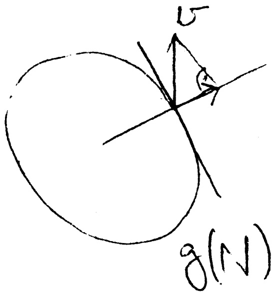
N szimplexeinek adódik ir., ez pont a hajtás mentén nem illeszkedik.

Volt: a nem illeszkedő halmaz $w_1(N)$-t repr. □

2)

$$\begin{tikzcd}
N^n \arrow[r, "g"] \arrow[rd] & \mathbb{R}^{n+k+1} \arrow[d] & (= P^{n+k} \times \mathbb{R}^1) \arrow[d] \\
 & \mathbb{R}^{n+k} & (P^{n+k})
\end{tikzcd}$$

Σ^1



$v \parallel (n+k+1)$-ik koord. ir. (ill. $\mathbb{R}^1$-gyel)

v-t vetítsük ν_g-re $\perp$-an

$\downarrow$

s szelést ν_g-ben

$$\Sigma^1(f) = s^{-1}(0) \longrightarrow \text{kohom. oszt. } e(\nu_g).$$

(A Thom pol. csak a két nyalb. kül.-től, azaz a „normálnyalábtól" függ.)

Sing. lek. kobord. elmélete

τ-leképezés: τ is a set of multising.

Def. Singularity: csírák ekv. osztálya

$$\begin{tikzcd}
(f)\ (\mathbb{R}^n,0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\text{diff-csíra}"] & (\mathbb{R}^p,0), \quad p = n+k \arrow[d, "\text{diff-csíra}"] \\
(\mathbb{R}^n,0) \arrow[r, "g"] & (\mathbb{R}^p,0)
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{A}$ - equiv. ($\Leftrightarrow$ left-right equiv.)

szuszpenzió: (vagy ekv.-t ad) $f \sim f \times id_{\mathbb{R}^1} : (\mathbb{R}^{n+1},0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+k+1},0)$

Def. Multising.: véges sok sing.-ból álló halmaz, elemeknek $\exists$ multipl

---

$$f : N^n \longrightarrow \underset{\substack{\cup \\ y}}{P^{n+k}} \quad \text{finite to one (véges} \to 1)$$

$f|_{f^{-1}(y)}$ csírája

Def. f τ-leképezés, ha $\forall\, y \in P$-re csíra$(f|_{f^{-1}(y)}) \in \tau$.

Pl $\tau = \{\{1\Sigma^0\}\}$ (lehet, hogy egy pontnak 0 őse van)

$\uparrow$ ekkor τ-lek. = beágy.

$\tau = \{\Sigma^0, 2\Sigma^0, 3\Sigma^0, \dots\}$ ← immerzió

$\tau = \{\Sigma^0, 2\Sigma^0, \Sigma^{1,0}\}$

Def $Cob_\tau(P^{n+k}) = \{f: M^n \longrightarrow P^{n+k}$ τ-lekép.$\} / \tau$-kob.

τ-kob.: $W^{n+1} \longrightarrow P \times [0,1]$ τ-lekép,

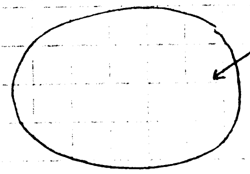
Def Stabil lekép. $f: N \longrightarrow P$

$\exists$ környezete $U_f \subset C^\infty(N,P)$, hogy

$\forall g \in U_f$-re g $\underset{\text{bal-jobb}}{\overset{}{\text{ekv.}}}$ f.

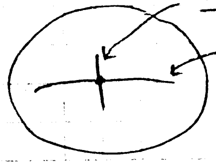
Leképezés csíra stabil, ha stabil leképez. csírája

Pl x^3 nem stabil $\quad x^3 \not\sim x^3 + \varepsilon x$ (l. 0-helyek száma)



C^∞-ben az $\mathcal{A}$-ekv. orbitok,

stabil egy leképez. $\Longleftrightarrow$ orbitja nyílt



unfolding: többparam. leképez. család

ha nem nyílt az orbit

$\uparrow$

a paraméterekkel együtt már stabil a nem stabil leképez.

Σ^0, $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$-k stabilak.

Pontrjagin-Thom konstr. τ-kobordizmusokra:

Rimányi - Szűcs

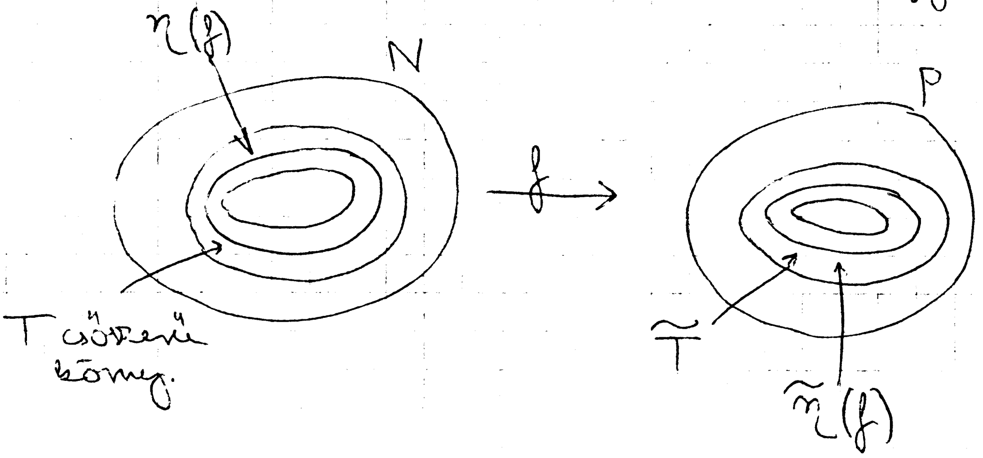
Kulcs: Globalizáció

$\tau = \{\tau', 1\cdot\eta\}$

<u>Def</u> ∃ hierarchia a multiszingularitásokon
(van esernyő ⇒ van 2-szeres pont
van 3-szoros pont ⇒ —||—)

részbenrendezés: $\xi < \eta$, ha η-pontok közelében van ξ-pont.
multiszing.

$\tau = \{\tau', 1\cdot\eta_L\}$ η top multiszing. (egyszeres)
$\forall\tau'$-belinél nagyobb



(f: $\eta(f) \to \tilde{\eta}(f)$ $\overset{\text{lok.}}{\text{diffeo.}}$, mert η top. 1 és $\eta(f)$ zárt.)

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "f|_T"] \arrow[d] & \tilde{T} \arrow[d] \\
\eta(f) \arrow[r] & \tilde{\eta}(f)
\end{tikzcd}$$

fibrumtartó, nem lin

nyaláb B felett →

$$\begin{tikzcd}
\xi \arrow[rrr, "\Phi_\eta"] \arrow[ddd, "\mathbb{R}^c"', "\text{ind.}"] & & & \tilde{\xi} \arrow[ddd, "\mathbb{R}^{c+k}"] \\
& T \arrow[ul] \arrow[r, "f|_T"] \arrow[d, "\mathbb{R}^c"] & \tilde{T} \arrow[ur] \arrow[d, "\mathbb{R}^{c+k}"] & \\
& \eta(f) \arrow[r] \arrow[dl] & \tilde{\eta}(f) \arrow[dr] & \\
B \arrow[rrr, "\mathrm{id}_B"] & & & \tilde{B} = B
\end{tikzcd}$$

indukálás

← globalizáció

a külső négyzet: univ. négyzet

Nehéz: $\xi, \tilde{\xi}$ megtalálása

<u>T.</u> $\exists$ univ. τ-leképez. $\left(\underset{\text{univ kéágy}}{BO(k) \subset MO(k)}\right)$

$$\begin{tikzcd}
 & f_\tau : \cancel{X} Y_\tau \arrow[r] \arrow[dl] & X_\tau \arrow[dd, bend left, "\text{ez adja}"] \\
\text{Thom pol} & N^n \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, phantom, "\circ"] & P^{n+k} \arrow[u, "\varphi"] \\
 & & {[P, X_\tau] = \mathrm{Cob}_\tau(\cancel{X} P)}
\end{tikzcd}$$

(a stratifikációk visszahúzottja a strat-t adja)

<u>Vizsga</u> (LETR) <u>VI.</u> $\overset{du}{4.}$, 11., 25. , füzetet használható
<u>VII</u> 11.